Cours d'Electricité théorique.

professé par Mr Poincaré Membre de l'Institut.

1ère Leçon.

Etude de la propagation du courant en période variable, sur une ligne munie de récepteur.

Equation des Télégraphistes.

Je vous rappelle d'abord comment M. Pomey est arrivé dans son cours à l'équation des télégraphistes. Soit dx la longueur d'un élément de fil, $\lambda\, dx$ sa self-induction, $\rho\, dx$ sa résistance, $\gamma\, dx$ sa capacité, $E\, dx$ la force électromotrice qui règne dans cet élément, V le potentiel, i l'intensité ; on aura (par l'équation de Ohm)

$$\lambda \frac{di}{dt} + \rho i = E + \frac{dV}{dx}$$

D'autre part la quantité d'électricité qui se trouve sur l'élément de fil est $\gamma V\, dx$ et l'équation de continuité nous donne :

$$\frac{di}{dx} = \gamma \frac{dV}{dt}$$

Cette dernière équation montre qu'il existe une fonction Φ, telle que l'on ait :

$$i = \gamma \frac{d\Phi}{dt}, \quad V = \frac{d\Phi}{dx}$$

et en remplaçant i et V par ces valeurs, nous trouvons :

$$(1)\quad \gamma\lambda \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \rho\gamma \frac{d\Phi}{dt} - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = E$$

C'est l'équation des télégraphistes. Si l'on suppose que la force électromotrice E qui a donné naissance à la perturbation a cessé, l'équation devient :

$$(1^{bis})\quad \gamma\lambda \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \rho\gamma \frac{d\Phi}{dt} - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0$$

qui nous apprend comment se propage une perturbation une fois produite. Si l'isolement de la ligne était imparfait, de façon que la ligne fût affectée d'une perte constante, il faudrait ajouter au 1er membre un terme en Φ. L'équation ainsi obtenue se ramènerait d'ailleurs aisément à la forme (1 bis). Soit en effet :

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\Phi}{dt} + \gamma\Phi - \alpha \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0$$

l'équation complète, où β, γ et α sont des coefficients quelconques. Posons :

$$\Phi = U e^{Kt}$$

l'équation conserve la même forme et devient :

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2(K+\beta)\frac{dU}{dt} + (K^2 + 2K\beta + \gamma)U - \alpha\frac{d^2U}{dx^2} = 0$$

Si alors on prend $K = -\beta$ on fait disparaître le terme en $\frac{dU}{dt}$. Si au contraire on choisit K de façon à satisfaire à l'équation :

$$K^2 + 2K\beta + \gamma = 0$$

on fait disparaître le terme en U et on est ramené à l'équation (1 bis).

Reprenons l'équation (1 bis); il est clair que

nous pouvons y satisfaire en faisant :

$$\Phi = e^{qt + px}$$

pourvu que q et p soient des constantes liées par la relation :

$$(2) \quad \gamma \lambda q^2 + \rho \gamma q - p^2 = 0$$

Si q et p sont des constantes <u>imaginaires</u> satisfaisant à la même relation on satisfera encore à l'équation (1bis) en faisant

$$\Phi = \text{partie réelle } e^{qt + px}$$

Si q est <u>purement</u> imaginaire, la solution ainsi trouvée est une fonction périodique du temps ; c'est une solution <u>isochrone</u>.

Théorie rigoureuse de la propagation.

Mais avant d'aller plus loin, une question préjudicielle se pose. La façon dont nous avons établi l'équation (1) est-elle à l'abri de toute objection ? Nous avons traité la résistance ρ comme une constante ; or on sait que les courants à alternance rapide ont une tendance à se porter à la surface du conducteur, de sorte qu'une petite partie de la section de ce conducteur est utilisée et que sa résistance semble augmenter. Ainsi la résistance devrait dépendre de la fréquence, c'est-à-dire de q et être plus grande pour les fréquences élevées que pour les faibles fréquences. Il est donc nécessaire pour justifier l'équation que nous avons adoptée de recourir à une analyse plus complète. Je vais d'abord vous rappeler les équations du champ électromagnétique, telles que M. Lorney les a établies dans son cours (page 252).

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \quad \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} = 4\pi C X + K\frac{dX}{dt}$$

$$(3) \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz} = 4\pi C Y + K\frac{dY}{dt}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \quad \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = 4\pi C Z + K\frac{dZ}{dt}$$

X, Y, Z représentent les composantes de la force électrique, C la conductibilité, K le pouvoir inducteur. Supposons un conducteur cylindrique (génératrices parallèles à l'axe de x) et une perturbation se propageant le long de ce conducteur. A l'extérieur du conducteur, C sera nul et K sera égal à l'inverse du carré de la vitesse de la lumière. A l'intérieur du conducteur, C est très grand, K est inconnu, mais nous verrons plus loin qu'il n'interviennent pas, de sorte qu'on peut le négliger.

Dans ces conditions le champ électromagnétique est de révolution autour de l'axe des x, les lignes de force magnétique sont des cercles dans des plans perpendiculaires à cet axe, les lignes de force électrique sont des courbes planes situées dans des plans méridiens, c'est-à-dire dans des plans passant par l'axe des $\underline{x}$.

Nous pouvons poser alors :

$$(4) \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{d\Pi}{dz}, \quad \gamma = -\frac{d\Pi}{dy}$$

d'où l'on déduit immédiatement :

$$(5) \quad 4\pi C X + K\frac{dX}{dt} = \frac{d^2\Pi}{dy^2} + \frac{d^2\Pi}{dz^2}$$

$$4\pi C Y + K\frac{dY}{dt} = -\frac{d^2\Pi}{dx\,dy}$$

(5)

$$4\pi C Z + K\frac{dZ}{dt} = -\frac{d^2\Pi}{dx\,dz}$$

Je dis que l'on aura également :

$$(6)\quad 4\pi C\frac{d\Pi}{dt} + K\frac{d^2\Pi}{dt^2} - \frac{d^2\Pi}{dx^2} - \frac{d^2\Pi}{dy^2} - \frac{d^2\Pi}{dz^2} = 0$$

En effet, on peut déduire des équations précédentes que les dérivées du 1er membre de (6) tant par rapport à y que par rapport à z sont nulles ; c'est-à-dire que ce 1er membre est une fonction de x et de t. Mais la fonction Π n'est déterminée par les équations (4) <u>qu'à une fonction arbitraire près de x et de t</u>. On pourra alors toujours disposer de cette fonction arbitraire de telle façon que ce 1er membre se réduise à zéro.

Cela posé, le champ étant de révolution, si nous passons aux coordonnées semi-polaires en faisant :

$$y = r\cos\theta,\quad z = r\sin\theta,$$

la fonction Π ne dépendra que de x, t et r, et l'équation (6) deviendra :

$$(7)\quad 4\pi C\frac{d\Pi}{dt} + K\frac{d^2\Pi}{dt^2} - \frac{d^2\Pi}{dx^2} - \frac{d^2\Pi}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\Pi}{dr} = 0$$

Cherchons à satisfaire à cette équation en faisant

$$\Pi = f(r)\,e^{qt+px}$$

il viendra :

$$(8)\quad \frac{d^2\Pi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Pi}{dr} = (4\pi C q + K q^2 - p^2)\,\Pi$$

Nous ferons :

$(4\pi C q + K q^2 - p^2) = a$ dans l'air

$(4\pi C q + K q^2 - p^2) = a'$ dans le conducteur.

et l'équation aura la forme : (dans l'air par exemple)

$$(8\,bis)\quad \frac{d^2\Pi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Pi}{dr} = a\,\Pi$$

Propriétés des Fonctions de Bessel.

Cette équation ne nous est pas inconnue. Elle a été envisagée par M. Pomey dans son cours (page 278); c'est d'ailleurs une des transformées de l'équation de Bessel qui s'écrit comme on sait :

$$(9)\qquad J'' + \frac{1}{x} J' + J = 0$$

où J' et J'' représentent les dérivées successives de J par rapport à x. Alors la solution de l'équation (8 bis) sera évidemment :

$$\Pi = J(r\sqrt{-a})$$

L'équation (9) admet comme intégrale.

$$\int \frac{e^{izx}\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

L'intégrale peut être prise soit de -1 à $+1$, soit de -1 à l'∞, pourvu que z tende vers l'infini de telle façon que l'exponentielle e^{izx} tende vers zéro.

Si l'on intègre de -1 à $+1$, on obtiendra l'intégrale:

$$\pi J_0 = \pi \left[1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{(1!)^2} + \left(\frac{x}{2}\right)^4 \frac{1}{(2!)^2} - \left(\frac{x}{2}\right)^6 \frac{1}{(3!)^2} + \left(\frac{x}{2}\right)^8 \frac{1}{(4!)^2} \cdots\cdots \right.$$

où J_0 est la fonction de Bessel proprement dite; nous voyons que cette fonction est holomorphe pour toutes les valeurs de x. Pour x réel, elle est réelle et subit des oscillations analogues à celles du cosinus. Dès que x dépasse la valeur 2, on a très sensiblement:

$$J_0 = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2 \pi x}}$$

Pour x purement imaginaire, tous les termes du développement sont positifs, d'où il suit que la fonction J_0 est constamment réelle, positive, et croissante avec le module de x. Si ix est positif et très grand on a très sensiblement:

$$J_0 = \frac{e^{ix}}{\sqrt{2 \pi i x}}$$

Si au contraire on intègre de -1 à l'∞ on obtiendra une autre intégrale que j'appellerai I et dont les propriétés essentielles seront les suivantes; pour $x = 0$ elle devient infinie, pour x très petit, elle est sensiblement proportionnelle à $\log. x$, et pour x très grand elle est sensiblement proportionnelle à

$$\frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}}$$

Si on intégrait de $+1$ à l'∞, on obtiendrait une troisième intégrale I', qui pour x très grand serait sensiblement proportionnelle à

$$\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}$$

Suite de la théorie de la Propagation.

D'après cela on aura dans le conducteur

$$\Pi = e^{qt+px} J(r\sqrt{-a'})$$

J étant l'une des intégrales de (9) et dans l'air :

$$\Pi = e^{qt+px} J(r\sqrt{-a})$$

J étant une autre intégrale.

Quelle est maintenant celle de ces intégrales qu'il s'agit de choisir :

Dans le conducteur, l'intégrale choisie doit être proportionnelle à J_0, car elle doit rester finie pour $r=0$, dans l'air elle doit être proportionnelle à I_0, sans quoi à une très grande distance de l'axe, la perturbation serait comparable à deux ondes planes, l'une se rapprochant de l'axe, l'autre s'en éloignant, et en effet on aurait alors :

$$J = cI + c'I'$$

où I' serait l'intégrale obtenue en intégrant de $+1$ à l'∞ et c et c' deux coefficients constants ; on aurait donc pour r très grand :

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(c\, e^{qt+px-r\sqrt{a}} + c' e^{qt+px+r\sqrt{a}} + \dots \right.$$

Le premier terme représente une onde s'éloignant de l'axe, le second une onde se rapprochant de l'axe. Comme l'axe est l'origine de la perturbation, nous ne pouvons avoir que l'onde qui s'éloigne de l'axe I il faut donc que c' soit nul, c'est-à-dire que J soit proportionnel à I.

Comme le rayon du fil est très petit, nous

aurons donc dans l'air :

$$J = A \log r$$

A étant une constante, et dans le fil :

$$J = B\, J_0 \left(r \sqrt{-a'} \right)$$

B étant une constante.

Il y a une discontinuité à la surface de séparation des deux milieux (conducteur et air), c'est-à-dire à la surface du fil. Il faut que la composante tangentielle de la force magnétique, et celle de la force électrique soient continues.

Force magnétique. — Elle est égale à $\frac{d\Pi}{dr}$; elle est donc dans l'air $\frac{A}{r}$ et dans le fil

$B \sqrt{-a'}\, J_0' \left(r \sqrt{-a'} \right)$; d'où une 1re équation :

$$(10) \qquad B \sqrt{-a'}\, J_0 \left(r \sqrt{-a'} \right) = \frac{A}{r}$$

(r représente ici le rayon du fil).

Force électrique. — Il s'agit ici de la composante tangentielle, c'est-à-dire de X. On a d'ailleurs :

$$4\pi C X + K \frac{dX}{dt} = (4\pi C + Kq) X = \frac{d^2\Pi}{dy^2} + \frac{d^2\Pi}{dz^2} = \frac{d^2\Pi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Pi}{dr}$$

d'où dans l'air : ($C = 0$) :

$$Kq X = a \Pi = a e^{qt + px} A \log r$$

et dans le conducteur ($K = 0$)

$$4\pi C X = a' \Pi = a' e^{qt + px} B J_0 \left(r \sqrt{-a'} \right)$$

d'où une deuxième équation :

$$(11) \quad 4\pi C a A \log r = B K q\, a' J_0 \left(r \sqrt{-a'} \right)$$

en éliminant le rapport $\frac{A}{B}$ entre les équations (10) et (11), on trouve :

$$(12)\quad 4\pi C a \log r \left[r\sqrt{-a'}\, J_0 (r\sqrt{-a'}) \right] = K q a' J_0 (r\sqrt{-a'})$$

Si $r\sqrt{-a'}$ est petit, on pourra réduire les développements de J_0 et de J'_0 à leurs premiers termes, ce qui donne :

$$J_0 = 1 \ , \quad r\sqrt{-a'}\, J'_0 = \frac{a' r^2}{2}$$

et l'équation (12) devient :

$$(13)\qquad 2\pi C a\, r^2 \log r = K q$$

or $a = Kq^2 - p^2$; je puis donc écrire

$$(14)\quad Kq^2 - \frac{Kq}{2\pi C r^2 \log r} - p^2 = 0$$

Ce n'est pas autre chose que l'équation (2) ; on a en effet, si r est petit

$$\gamma = -\frac{K}{2\log r} \ , \quad \lambda = -2\log r \ , \quad \rho = \frac{1}{\pi C r^2}$$

L'équation (2) étant équivalente à l'équation (1), l'équation des télégraphistes se trouve vérifiée <u>dans le cas où $r\sqrt{-a'}$ est petit</u>.

Si au contraire $r\sqrt{-a'}$ est grand, on aura sensiblement :

$$J_0 = \frac{1-i}{\sqrt{\pi r \sqrt{-a'}}}\, e^{r\sqrt{-a'}} \ , \quad J_0 = \frac{(1-i)\, i}{\sqrt{\pi r \sqrt{-a'}}}\, e^{r\sqrt{-a'}}$$

ce qui montre que J_0 croît rapidement avec r et par conséquent que le courant est localisé à la surface du fil. L'équation (12) devient alors :

$$4\pi C a r \log r = K q \sqrt{a'}$$

ou si l'on observe que

$$a' = 4\pi C q$$

car $K q^2 - p^2$ est négligeable devant $4\pi c q$

$$(15) \quad K q^2 - p^2 = \frac{K q \sqrt{q}}{r \log r \sqrt{4\pi C}}$$

On voit que dans ce cas, l'équation des télégraphistes n'est plus appréciable.

Evaluations Numériques

On a dans le cuivre $C = 1,25.10^{-4}$, et dans l'air $K = \frac{1}{9} 10^{-20}$. Avec les oscillations hertziennes on a : $\frac{q}{i} = \pi 10^8$. Donc $K q^2$ est plus de 400.000.000 de fois plus petit que $4\pi C q$; nous pouvons donc négliger dans a' les termes en $K q^2 - p^2$ devant $4\pi C q$; et cela quand même K serait dans un métal beaucoup plus grand que dans l'air. Cela est vrai pour les oscillations hertziennes et <u>a fortiori</u> pour les oscillations plus lentes.

Quel est maintenant l'ordre de grandeur de $r\sqrt{-a'} = \sqrt{-a\, 4\pi C q}$. S'il y a 10^{2n} vibration par seconde, on a $|q| = \pi 10^{2n}$; d'où : pour $r = 0,2$:

$$|r\sqrt{-a'}| = 0,2\, n \sqrt{5}\, 10^{n-2}$$

Avec une fréquence de 10 000 on aura donc $|r\sqrt{-a'}|$ voisin de 1 et la formule (14) restera sensiblement applicable ; avec une fréquence hertzienne, on aurait $|r\sqrt{-a'}|$ voisin de 100 et il faudra appliquer la formule (15)

Cas extrêmes

Si la fréquence est très élevée, le terme en q est

négligeable devant le terme en q^2 et l'équation (14) se réduit à :

$$K q^2 - p^2 = 0$$

L'équation des télégraphistes peut donc avec les grandes fréquences être réduite à :

$$\gamma \lambda \frac{d^2 \Phi}{d t^2} - \frac{d^2 \Phi}{d x^2} = 0$$

en supprimant le terme en $\frac{d\Phi}{dt}$, c'est l'équation des cordes vibrantes. Il est vrai qu'avec une fréquence hertzienne, l'équation (14) n'est plus valable, et qu'il faut la remplacer par l'équation (15) ; le terme en q est alors remplacé par un terme de $q\sqrt{q}$, il est donc plus grand que si l'on conservait l'équation (14), il n'en reste pas moins négligeable devant un terme en q^2.

Avec les oscillations hertziennes, par conséquent, tout se passe comme si le terme en $\frac{d\Phi}{dt}$ n'existait pas. C'est ce qui nous permet d'appliquer l'équation des télégraphistes même aux cas où la fréquence devient très grande parce qu'alors les termes par lesquels les équations (14) et (15) diffèrent deviennent l'un et l'autre négligeable.

L'autre cas extrême nous est fourni par les câbles sous-marins. Lord Kelvin en a établi la théorie en négligeant le terme en $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$, c'est-à-dire en réduisant l'équation des télégraphistes à celle de la propagation de la chaleur.

Qu'est ce qui lui en donnait le droit ? Le câble est ici formé : 1° d'une âme métallique ; 2° d'une enveloppe isolante ; 3° d'une enveloppe extérieure conductrice formée par l'armature du fil et maintenue au potentiel zéro parce qu'elle est en communication directe avec l'eau de la mer. C'est un véritable condensateur, et quand le fil prend une charge, l'armature prend une charge égale

et de signe contraire. Les courants dans le fil et l'armature sont donc égaux et de signe contraire, et produisent des effets d'induction inverses de sorte que la self-induction est à peu près nulle ; le terme en λ disparaît donc dans l'équation des télégraphistes.

2me Leçon

Intégration de l'Equation

Nous considérerons d'abord une ligne indéfinie, pas de fuite, et pas de force électromotrice, sauf à l'origine ($x = 0$) où régnera une force électromotrice variable $f(t)$.

Nous choisirons les unités de façon que :

$$\gamma = 1, \quad \rho\gamma = 2, \quad \gamma\lambda = 1$$

quitte à rétablir plus tard l'homogénité.

On aura alors, tant pour $x > 0$ que pour $x < 0$:

$$(16) \quad \frac{d^2\Phi}{dt^2} + 2\frac{d\Phi}{dt} - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0 \; ; \; i = \frac{d\Phi}{dt} \; ; \; V = \frac{d\Phi}{dx}$$

Pour $x = 0$, Φ sera continu, mais les valeurs de $\frac{d\Phi}{dx}$ différeront de $f(t)$.

On voit que par symétrie, Φ et i ne changent pas et V se change en $-V$ quand on change x en $-x$. On a donc pour $x = +\varepsilon$, $V = \frac{1}{2} f(t)$ et pour $x = -\varepsilon$, $V = -\frac{1}{2} f(t)$.

Solution Isochrone

Soit d'abord $f(t) = e^{iqt}$, q étant réel ; Φ devra être proportionnel à e^{iqt} ; d'où :

$$\Phi = A e^{i(qt+px)} + B e^{i(qt-px)}$$

où A et B sont des coéfficients constants, et où p est donné par :

$$q^2 - 2iq - p^2 = 0 .$$

Nous supposerons que la partie réelle de $q\,p$ est négative, alors le premier terme de Φ représente une onde marchant vers la droite, c'est-à-dire vers les x positifs et le second terme représente une onde marchant vers la gauche.
Comme l'origine de la perturbation est en $x = 0$, il ne doit y avoir pour $x > 0$ qu'une onde marchant vers la droite et pour $x < 0$ une onde marchant vers la gauche. On aura donc pour $x > 0$:

$$\Phi = A e^{i(qt+px)}$$

et par symétrie pour $x < 0$

$$\Phi = A e^{i(qt-px)}$$

Il reste à déterminer A ; on a :

$$V = A i p\, e^{i(qt+px)}$$

ce qui doit se réduire à $\frac{1}{2} e^{iqt}$ pour $x = 0$.
On a donc :

$$A = \frac{1}{2ip}$$

Solution Générale

Supposons $f(t)$ quelconque ; cette fonction peut se

peut se développer par l'intégrale de Fourier sous la forme :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(q)\, e^{iqt}\, dq \,.$$

avec

$$\theta(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-iq\tau}\, d\tau$$

La fonction $f(t)$ est ainsi décomposée en ses composantes isochrones ; il suffit de considérer séparément chacune de ces composantes, par exemple la composante :

$$\theta(q)\, e^{iqt}\, dq$$

elle donne pour $x > 0$

$$\Phi = \frac{\theta(q)\, dq}{2ip}\, e^{i(qt+px)}$$

On aura donc pour la solution générale :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(q) \frac{1}{2ip}\, e^{i(qt+px)}\, dq$$

ou en remplaçant $\theta(q)$ par sa valeur :

$$\Phi = \iint f(\tau) \frac{1}{4i\pi p}\, e^{i(qt-q\tau+px)}\, dq\, d\tau$$

ou en renversant l'ordre des intégrations :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, d\tau \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{4i\pi p}\, e^{i[q(t-\tau)+px]} \right]$$

Ébranlement élémentaire.

Je suppose que $f(t)$ soit nul sauf quand t est compris entre 0 et ε, et cela de telle façon que dans cet intervalle

$f(t)$ soit très grand et que :

$$\int_0^{\varepsilon} f(t)\,dt = 1$$

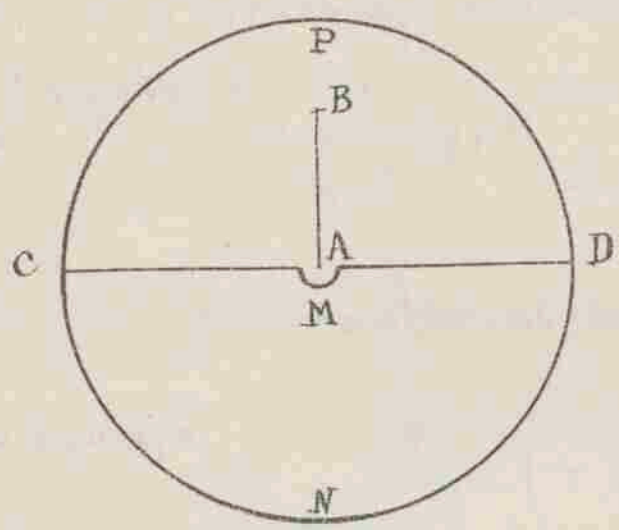
C'est ce que nous pouvons appeler un ébranlement élémentaire se produisant à l'instant zéro. Notre formule devient alors :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{4i\pi\sqrt{q^2-2iq}}\, e^{i(qt+px)}$$

C'est cette intégrale représentant l'effet d'un ébranlement élémentaire, qu'il s'agit maintenant d'étudier. La fonction sous le signe $\int$ admet deux points singuliers :

$$q = 0 \;,\; q = 2i$$

Nous voulons que la partie réelle de $\frac{q}{p}$ reste négative, au moins pour q réel, pour cela nous évitons de franchir la droite qui joint les deux points singuliers et qui jouera le rôle de coupure. Sur la figure, A et B représentent les deux points singuliers, A B est la coupure ; nous devons prendre notre intégrale depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, c'est-à-dire le long du chemin C M D ; le point C est $-\infty$, le point D est $+\infty$; nous allons de C en D en suivant l'axe des quantités réelles ; seulement nous décrivons autour du point A un petit arc de cercle M de façon à éviter le point singulier A et à ne pas franchir la coupure. On peut ainsi joindre C à D par deux autres chemins, à savoir les deux demi circonférences de rayon très grand C N D et C P D.



Si q est très grand, on a sensiblement $p = -q$; de sorte que l'exponentielle $e^{i(qt+px)}$ se réduit à :

$$e^{iq(t-x)}$$

d'où cette conséquence ; si $t < x$, cette exponentielle sera sensiblement nulle le long de la demi-circonférence CND ; si $t > x$, elle sera sensiblement nulle le long de la demi-circonférence CPD.

Donc si $t < x$; nous pourrons dire (l'intégrale le long de CND étant nulle) que Φ est égal à l'intégrale prise le long du contour CMDNC, c'est-à-dire à zéro, puisque nous n'avons aucun point singulier à l'intérieur du contour.

Cela veut dire que Φ est nul en tous les points qui n'auraient pu être atteints par une perturbation partie de l'origine à l'instant de l'ébranlement et marchant avec une vitesse 1, c'est-à-dire avec nos unités, avec la vitesse de la lumière.

Si au contraire $t > x$, nous voyons que (l'intégrale le long de CPD étant nulle) Φ est égal à l'intégrale prise le long du contour CMDPC, ou ce qui revient au même le long d'un contour quelconque enveloppant les deux points singuliers, par exemple le long d'un cercle de rayon très grand.

Calculons cette intégrale et pour cela posons :

$$(q-i)\,t + p\,x = \rho\sqrt{x^2-t^2}$$

$$p\,t + (q-i)\,x = \mu\sqrt{x^2-t^2}$$

d'où

$$\rho^2-\mu^2 = p^2-(q-i)^2 = 1$$

et

$$\frac{dq}{p} = \frac{dp}{q-i} = \frac{d\rho}{\mu}$$

De sorte que notre intégrale devient :

$$\Phi = \int \frac{d\rho}{4i\pi\mu}\, e^{-t+i\rho\sqrt{x^2-t^2}} = e^{-t}\int \frac{d\rho}{4\pi}\,\frac{e^{i\rho\sqrt{x^2-t^2}}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

Lorsque φ décrit un cercle de rayon très grand, il en est de même de ρ, notre intégrale doit donc être prise le long d'un cercle de rayon très grand, mais comme la fonction sous le signe $\int$ n'a que deux points singuliers $\rho = \pm 1$, il reviendra au même d'intégrer le long d'un contour quelconque enveloppant ces deux points singuliers, par exemple, on peut aller de -1 à $+1$ et revenir de $+1$ à -1, en contournant les points singuliers par des cercles infiniment petits comme sur la figure ;

Il vient alors :

$$\Phi = e^{-t} \int_{-1}^{+1} \frac{d\rho}{2\pi} \frac{e^{i\rho\sqrt{x^2-t^2}}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

Nous reconnaissons la fonction J_0 ; on a donc :

$$\Phi = \frac{e^{-t}}{2} J_0 \left(\sqrt{x^2-t^2}\right)$$

Comme nous supposons que $t > x$, l'argument de J_0 est purement imaginaire, cette fonction est donc positive et croît constamment avec le module de son argument.

Supposons x fini et t très grand, on aura sensiblement :

$$\Phi = \frac{e^{-t}}{2} \frac{e^{\sqrt{t^2-x^2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{t^2-x^2}}$$

ou avec la même approximation :

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}$$

Voilà avec quelle lenteur décroît Φ ; heureusement ce sont ses dérivées qui nous intéressent et elles décroissent plus rapidement.

Si t et x croissaient en même temps et de telle

façon que :

$$\lim \frac{t}{x} = \alpha > 1$$

$\sqrt{t^2 - x^2}$ serait sensiblement égal à $x\sqrt{\alpha^2 - 1}$ d'où :

$$\Phi = \frac{e^{t(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{t}\sqrt[4]{\alpha^2 - 1}}$$

Variations de Φ.

Nous pouvons poser :

$$F(x,t) = 0 \text{ pour } t < x$$

$$F(x,t) = \frac{e^{-t}}{2} J_0\left(\sqrt{x^2 - t^2}\right) \text{ pour } t > x$$

Qu'arrive-t-il quand on fait varier t, x restant constant. Si x est assez grand, et t plus grand que x, $\sqrt{t^2 - x^2} = \sqrt{(t-x)(t+x)}$ sera grand et nous pourrons poser :

$$J_0 = \frac{e^{\sqrt{t^2 - x^2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{t^2 - x^2}}$$

Soit $t^2 - x^2 = u^2$, nous aurons :

$$2\sqrt{2\pi}\, F = e^{-\sqrt{u^2 + x^2}} \frac{e^u}{\sqrt{u}}$$

Ecrivons que $\frac{dF}{du} = 0$, il viendra :

$$1 - \frac{1}{2u} + \frac{u}{\sqrt{u^2 + x^2}} = 0$$

Posons :

$$u = \frac{2x\xi}{1 - \xi^2}, \quad \sqrt{u^2 + x^2} = x\frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2}$$

l'équation deviendra :

$$1 - \frac{1-\xi^2}{4x\xi} - \frac{2\xi}{1+\xi^2} = 0$$

d'où :

$$4x = \frac{(1+\xi)(1+\xi^2)}{\xi(1-\xi)}$$

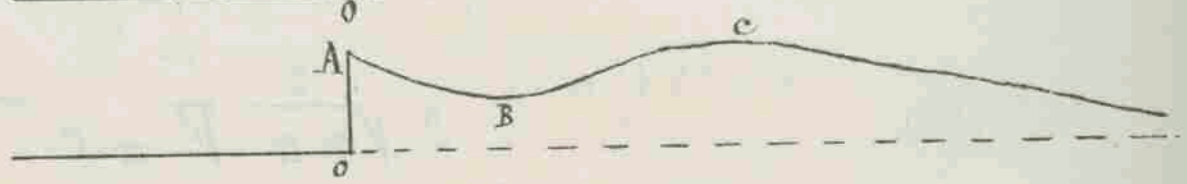
Quand t varie de x à l'∞, ξ varie de 0 à 1 ; faisons donc varier ξ de 0 à 1 ; la valeur de x qui satisfait à l'équation précédente (c'est-à-dire pour laquelle $\frac{dF}{du}$ s'annule) sera positive ; infinie pour $\xi = 0$ elle décroîtra jusqu'à un certain minimum x_0, qui correspondra à la valeur de ξ donnée par l'équation réciproque :

$$\xi^4 - 2\xi^3 - 2\xi^2 - 2\xi + 1 = 0$$

et croît ensuite jusqu'à l'∞ qui est atteint pour $\xi = 1$. Si donc x est $< x_0$, la fonction F n'a ni maximum ni minimum ; si $x > x_0$, elle a un minimum et un maximum. Les variations de cette fonction sont alors représentées par les figures suivantes :

pour $x < x_0$

pour $x > x_0$



Mais la formule précédente n'est valable que pour u suffisamment grand ; lorsque x est très grand, le minimum de F tel que le donnerait la formule précédente, aurait lieu pour une valeur de u voisine de 2. Dans ces conditions, la formule n'est plus applicable, de sorte qu'on peut se demander si le minimum existe encore. Or il vient :

$$j_0 = 1 + \frac{u^2}{4} + \text{-----}$$

$$e^{-\sqrt{u^2+x^2}} = e^{-x} e^{-\frac{u^2}{2x}} = e^{-x}\left(1 - \frac{u^2}{2x} + \cdots\right.$$

d'où

$$F = \frac{e^{-x}}{2}\left[1 + u^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2x}\right) + \cdots\cdots\right.$$

ce qui montre que la fonction F est décroissante pour $u = 0$ (comme sur les deux figures précédentes) si $x < 2$, mais que pour $x > 2$, elle est croissante. On a donc la figure suivante.

pour $x > 2$

Si nous supposons x très grand, nous aurons sensiblement :

pour le maximum $x = \dfrac{1}{1-\xi}$, $u = x^2$, $t = x^2$, $F = \dfrac{1}{x\,2\sqrt{2\pi}}$

La valeur de F au point A correspondant à $t = x\,u = 0$, étant d'ailleurs $\dfrac{e^{-x}}{2}$.

La valeur de F au point C est donc de l'ordre de $\dfrac{1}{x}$ et par conséquent beaucoup plus grande que la valeur au point A qui est de l'ordre de e^{-x}. Il en résulte qu'à de très grandes distances, la propagation de l'électricité semble se rapprocher des lois de la propagation de la chaleur ; le maximum au lieu d'être brusquement atteint, ne l'est plus que progressivement.

Retour à la solution générale

Dans le cas général, on a manifestement :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, f(\tau)\, F(x, t-\tau)$$

Nous en déduisons :

$$i = \frac{d\Phi}{dt} = \int d\tau f \frac{dF}{dt} = -\int d\tau f \frac{dF}{d\tau}$$

Supposons un signal simple de durée ε, de sorte que $f = 0$ sauf quand x est compris entre 0 et ε, et $f = 1$ pour $0 < x < \varepsilon$. Il vient alors :

$$i = -\int_0^{\varepsilon} d\tau \frac{dF}{d\tau} = F(x,t) - F(x, t-\varepsilon)$$

Il est aisé de voir comment varie i :

Pour $t < x$ on a $i = 0$

Pour $x < t < x + \varepsilon$, on a $i = \frac{e^{-t}}{2} J_0(\sqrt{x^2 - t^2})$, c'est <u>l'intensité utile</u>.

Pour $t > x + \varepsilon$ on a :

$$i = \frac{e^{-t}}{2} J_0 \sqrt{x^2 - t^2} - \frac{e^{-t-\varepsilon}}{2} J_0 \sqrt{x^2 - (t-\varepsilon)^2}$$

c'est <u>l'intensité nuisible</u> ; ou sensiblement :

$$i = \varepsilon \frac{dF}{dt}$$

ou pour t grand, x fini :

$$i = \frac{-\varepsilon}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t\sqrt{t}}$$

formule qui montre avec quelle lenteur décroît l'intensité nuisible.

Supposons maintenant x très grand, on aura pour l'intensité utile maximum :

$$i = \frac{e^{-x}}{2}$$

Soit $u = k x^2$, k étant fini ; on aura sensiblement :

$$\frac{d \log F}{dt} = \frac{d \log F'}{du} = \frac{1}{2 k^2 x^2}\left(\frac{1}{k^2} - 1\right) F = \frac{e^{-\frac{1}{2k^2}}}{x^2 \sqrt{2\pi}}$$

et pour l'intensité nuisible :

$$\frac{-e^{-\frac{1}{2k^2}}}{2\sqrt{2\pi}} \quad \frac{\varepsilon}{x^3}$$

Le rapport de l'intensité nuisible à l'intensité utile est donc proportionnelle à

$$\frac{\varepsilon \; e^{x}}{x^3}$$

Nous voyons que $\frac{e^{x}}{x^3}$ croît avec x, c'est-à-dire avec la distance ; en revanche notre rapport est proportionnel à ε, d'où l'avantage des signaux courts.

Nous pouvons supposer un signal double, c'est-à-dire :

$f = 0$ de $-\infty$ à 0
$f = 1$ de 0 à ε
$f = -1$ de ε à 2ε
$f = 0$ de 2ε à $+\infty$

On en déduit :

$$i = -\int_0^{\varepsilon} d\tau \frac{dF}{d\tau} + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} d\tau \frac{dF}{d\tau} = F(x,t) - 2F(x, t-\varepsilon) + F(x, t-2\varepsilon)$$

De $t = x$ à $t = x + \varepsilon$ on a :

$$i = F(x,t) \quad \text{(intensité utile)}$$

De $t = x + 2\varepsilon$ a $t = \infty$, on a :

$$i = 2\varepsilon^2 \frac{d^2 F'}{dt^2} \quad \text{(intensité nuisible)}$$

On voit que pour t très grand x fini, l'intensité nuisible décroît non plus comme $t^{-\frac{3}{2}}$ mais comme $t^{-\frac{5}{2}}$.

Pour x très grand, $\frac{u}{x^2}$ fini, l'intensité utile est proportionnelle à e^{-x}, l'intensité nuisible à $\frac{e^2}{x^5}$, ce qui montre que le rapport est plus favorable que dans le cas précédent, surtout pour des signaux très courts.

Effet des Réflexions.

Supposons maintenant que la ligne toujours indéfinie dans un sens, soit limitée dans l'autre sens. Nous pouvons supposer soit que l'extrémité est isolée, soit qu'elle est à la terre.

Dans le 1er cas, on devra avoir à l'extrémité une intensité nulle, c'est-à-dire :

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

ou puisque nous partons du repos :

$$\Phi = 0$$

Dans le 2e cas, on devra avoir à l'extrémité un potentiel nul, c'est-à-dire :

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0$$

Supposons que dans le cas de la ligne indéfinie, on ait $\Phi = f(x)$, pour $x > 0$ et $\Phi = f(-x)$ pour $x < 0$. Soit maintenant l la longueur de la ligne depuis la pile jusqu'à l'extrémité. Si cette extrémité est isolée, on devra avoir $\Phi = 0$ pour $x = l$. Nous satisferons à cette condition, en

prenant :

$$\Phi = f(x) - f(2l - x)$$

Si l'extrémité est à la terre, on doit avoir $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ pour $x = l$. Nous satisferons à cette condition en prenant :

$$\Phi = f(x) + f(2l - x)$$

Dans chacune de ces deux formules le 1er terme $f(x)$ représente l'onde directe, et le second terme l'onde réfléchie. Mais on voit que les conditions de la réflexion sont très différentes dans les deux cas.

Tout se passe comme si la ligne était indéfinie, mais pourvue de deux piles, l'une placée en $x = 0$, l'autre en $x = 2l$. Seulement dans le 1er cas, les forces électromotrices des deux piles sont égales et de signe contraire, dans le 2e cas, elles sont égales et de même signe.

Lignes fermées

Supposons maintenant une ligne fermée sur elle-même de longueur $2l$; elle se comportera évidemment comme une ligne indéfinie sur laquelle seraient placées des piles de même force électromotrice, aux points :

$$x = 0,\ x = 2l,\ x = 4l, \ldots\ldots$$
$$,\ x = -2l,\ x = -4l, \ldots\ldots$$

Si donc on a trouvé pour une ligne indéfinie

$$\Phi = f(x)$$

on aura pour une ligne fermée :

$$\Phi = \sum f(|x - 2nl|),\ n = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, +\infty$$

Remarquons que dans la série du 2e membre, il n'y a jamais à envisager qu'un nombre fini de termes puisque ceux pour lesquels

$$|x - 2nl| > t$$

sont tous nuls. Ces termes décroissent d'ailleurs très rapidement.

Intercaler ici la remarque A page

Réflexions multiples.

Supposons maintenant une ligne limitée dans les deux sens ; supposons par exemple qu'en $x = a$ et en $x = b$, elle soit mise à la terre.

Alors tout se passera comme si nous avions une série de piles, qui auraient à chaque instant même force électromotrice et qui seraient placées aux points :

$$x = 0,\ x = 2a,\ x = -2b,\ x = 2n(a+b),\ x = 2(n+1)a + 2nb$$

n étant un entier quelconque positif ou négatif. On aura donc :

$$\Phi = \Sigma f(|x - 2n(a+b)|) + \Sigma f(|x - 2(n+1)a + 2nb|)$$

On vérifie en effet que l'on a $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ pour $x = a$ et pour $x = -b$.

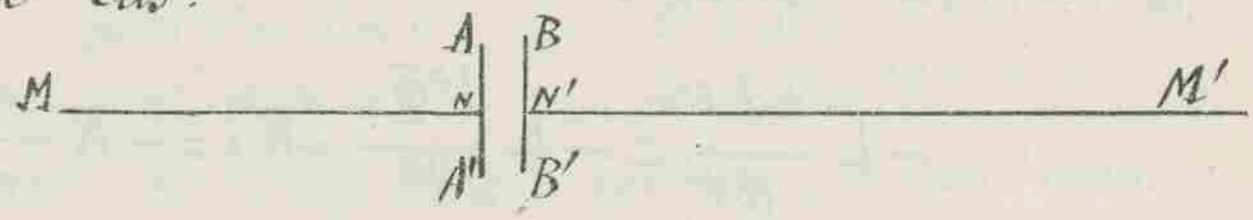
Il est aisé de voir comment on devrait modifier la formule, si l'une des extrémités, ou toutes deux étaient isolées au lieu d'être à la terre.

Cas du Récepteur.

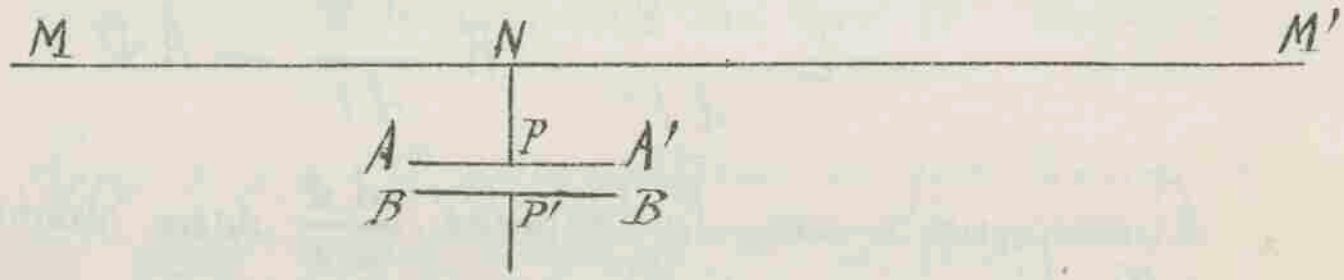
Supposons maintenant une ligne indéfinie dans les deux sens, mais imaginons qu'on ait

placé en $x = a$ un récepteur. Nous nous bornerons d'abord à assimiler ce récepteur à une self-induction accompagnée d'une résistance et d'une capacité.

Mais au sujet de cette capacité on doit distinguer deux cas :



Ou bien tout se passe comme si la ligne M M' était interrompue en N N' par un condensateur dont les deux armatures seraient A A' et B B'. Ce sont les <u>capacités de la 1re sorte</u>, comme sur la figure ci-dessous.



ou bien tout se passe comme si la ligne portait en N une dérivation allant au plateau A A' d'un condensateur dont l'autre armature B B' est à la terre. Ce sont les <u>capacités de la 2de sorte</u>.

Dans tous les cas le récepteur introduit une discontinuité, mais si la capacité est de la 1re sorte, l'intensité du courant $\frac{d\Phi}{dt}$ et par conséquent Φ reste une fonction continue de x pour $x = a$; car la quantité d'électricité positive amenée au plateau A A' par le fil M N, est égale à la quantité d'électricité <u>négative</u> amenée au plateau B B' par le fil M' N', puisque les charges des deux plateaux doivent rester égales et de signe contraire. En revanche il y a en <u>a</u> une force électromotrice de sorte que $\frac{d\Phi}{dx}$ n'est pas continue.

Si au contraire on a des capacités de la 2de sorte la fonction Φ est également discontinue.

Bornons nous d'abord au cas où il n'y a que des capacités de la 1re sorte. Soit L la self induction du récepteur, R sa résistance, $\frac{1}{A}$ sa capacité. Les forces électromotrices dues à la self-induction et à la résistance seront :

$$-L\frac{di}{dt} = -L\frac{d^2\Phi}{dt^2} - Ri = -R\frac{d\Phi}{dt}$$

L'intensité $\frac{d\Phi}{dt}$ étant la dérivée de la charge du condensateur $AA'BB'$, cette charge sera Φ et la force électromotrice correspondante sera $-A\Phi$; de sorte que la force totale sera :

$$-L\frac{d^2\Phi}{dt^2} - R\frac{d\Phi}{dt} - A\Phi$$

Donc pour $x = a$, la dérivée $\frac{d\Phi}{dx}$ sera discontinue de telle façon que si l'on pose :

$$\delta = \frac{d\Phi}{dx}(x = a + \varepsilon) - \frac{d\Phi}{dx}(x = a - \varepsilon)$$

on ait

$$\delta = L\frac{d^2\Phi}{dt^2} - R\frac{d\Phi}{dt} - A\Phi$$

On a d'ailleurs pour $x = 0$

$$\frac{d\Phi}{dx}(x = \varepsilon) - \frac{d\Phi}{dx}(x = -\varepsilon) = E = f(t)$$

Partout ailleurs $\frac{d\Phi}{dx}$ est continue.

Solution Isochrone

Suivant la même marche que plus haut, faisons

d'abord $f(t) = e^{iqt}$. Soit encore

$$p^2 = q^2 - 2iq$$

on aura :

pour $x < 0$ $\quad \Phi = A e^{i(qt - px)}$

pour $0 < x < a$ $\quad \Phi = B e^{i(qt + px)} + C e^{i(qt - px)}$

pour $x > a$ $\quad \Phi = D e^{i(qt + px)}$

Pour $x = 0$, Φ est continu, ce qui donne :

$$(1) \qquad A = B + C$$

$\frac{d\Phi}{dx}$ subit un saut brusque égal à e^{iqt}, ce qui donne :

$$(2) \qquad Bip - Cip = -Aip + 1$$

De ces deux équations on tire $B = \frac{1}{2ip}$.

Pour $x = a$, Φ est continu ce qui donne :

$$(3) \qquad Be^{ipa} + Ce^{-ipa} = De^{ipa}$$

Pour $x = a$, $\frac{d\Phi}{dx}$ subit un saut brusque égal à $\delta = +Q\Phi$, où :

$$Q = Lq^2 - Riq - A$$

On a donc :

$$(4) \quad Bipe^{ipa} - Cipe^{-ipa} = Dipe^{ipa} - QDe^{ipa}$$

De (3) et (4) on tire :

$$2Bip = D(2ip - Q)$$

d'où :

$$D = \frac{1}{2ip - Q}$$

de sorte que l'on a pour $x = a$, c'est-à-dire au récepteur :

$$\Phi = \frac{e^{i(qt + pa)}}{2ip - Q}$$

Solution générale

Soit comme plus haut :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(q) e^{iqt} dq \ , \ \theta(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-iq\tau} d\tau$$

on trouvera toujours par le même calcul :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(q) \frac{e^{i(qt-q\tau+pa)}}{2ip-Q} dq = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) d\tau \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{i(qt+q\tau+pa)}}{2ip-Q} \right]$$

Ébranlement élémentaire.

Ce que nous avons appelé l'ébranlement élémentaire est alors représenté par l'intégrale :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{i(qt+pa)}}{2ip-Q}$$

On raisonnera sur cette intégrale tout à fait comme plus haut, si $t < a$, au lieu d'intégrer le long de la droite CMD (voir figure 1) on pourra intégrer le long du contour fermé CMDN ; on vérifierait qu'il n'y a pas de point singulier à l'intérieur du contour, cette vérification est inutile, nous sommes certains qu'elle est nulle, parce que rien ne saurait se passer dans le récepteur avant que la perturbation l'ait atteinte.

Si $t > a$, on pourra intégrer le long du contour CMDP ou le long du cercle CNDP.

Pour transformer cette intégrale posons : $u^2 = a^2 - t^2$

$$(q-i)t + pa = \rho u$$
$$pt + (q-i)a = \mu u$$

d'où :

$$\rho^2-\mu^2=p^2-(q-i)^2=+1 \qquad \frac{dp}{q-i}=\frac{dq}{p}=\frac{d\rho}{\mu}=\frac{d\mu}{\rho}$$

Soit :

$$\rho+\mu=\xi\ ,\ \rho-\mu=\frac{1}{\xi},\ 2\rho=\xi+\frac{1}{\xi},\ \frac{dq}{p}=\frac{d\xi}{\xi}$$

d'où notre intégrale :

$$\Phi=e^{-t}\int\frac{e^{i\frac{u}{2}(\xi+\frac{1}{\xi})}\,p\,d\xi}{\xi(2ip-Q)}$$

Il est clair que

$$\mathcal{R}=\frac{p}{\xi(2ip-Q)}$$

est une fonction rationnelle de ξ, puisque p et q sont des fonctions rationnelles de ξ et que Q est un polynôme entier en q.

Pour $\xi=\infty$, on a $\rho=\mu$, c'est-à-dire $q-i=p$; c'est-à-dire que p et q sont très grands et sensiblement égaux, et comme Q est du 2d degré en q on aura $\mathcal{R}=0$, ce qui veut dire que $\mathcal{R}$ est décomposable en éléments simples sous la forme :

$$\mathcal{R}=\sum\frac{A}{\xi-\alpha}.$$

d'où

$$\Phi=e^{-t}\sum A\int\frac{e^{i\frac{u}{2}(\xi+\frac{1}{\xi})}\,d\xi}{\xi-\alpha}$$

Quel est le contour d'intégration ? Quand q décrit le cercle CNDP, le point ξ décrit un cercle très petit autour de la valeur de ξ qui correspond à $p=-q=\infty$,

c'est-à-dire autour de l'origine.

Or si nous envisageons l'intégrale :

$$\int \frac{e^{i\frac{u}{2}(\xi+\frac{1}{\xi})}\, d\xi}{\xi^{n}}$$

prise le long du même contour, nous reconnaissons une des fonctions de Bessel. C'est à un facteur constant près la fonction $J_{n-1}(u)$; ce facteur constant est d'ailleurs $2\pi i^{n-1}$, Or :

$$\int \frac{e^{i\frac{u}{2}(\xi+\frac{1}{\xi})}\, d\xi}{\xi-\alpha} = \sum \frac{1}{\alpha^{n+1}} \int \xi^{n} e^{i\frac{u}{2}(\xi+\frac{1}{\xi})}\, d\xi$$

d'où (en se rappelant que $J_{-n} = \pm J_n$

$$\int \frac{e^{i\frac{u}{2}(\xi+\frac{1}{\xi})}\, d\xi}{\xi-\alpha} = \sum \frac{\pm 2\pi}{\alpha^{n+1}}\, i^{(n-1)} J_{n-1}(u)$$

Cette série est convergente pour toutes les valeurs de u et de α.

Pour les propriétés des fonctions de Bessel, on pourra se reporter en particulier au Chapitre XII du tome I de la "Mécanique Céleste de Tisserand.

Mais ce dont nous avons besoin, c'est de voir ce que deviennent ces intégrales quand t et a sont très grands, et d'en déduire une expression asymptotique qu'on puisse utiliser dans la discussion de la même façon que l'expression analogue des fonctions de Bessel

Et d'abord, vers quelle limite tend α quand t et a croissent indéfiniment :

Les points singuliers de notre intégrale sont donnés par les deux équations du 2d degré :

$$(A) \quad \begin{aligned} q^2 - 2iq &= p^2 \\ 2ip &= Q. \end{aligned}$$

Les valeurs correspondantes de α seront donc données par :

$$u\alpha = (q - i + p)(t + a)$$

où q et p sont définis par les deux équations précédentes (A) et sont par conséquent des constantes numériques.

Comme $u = \sqrt{a^2 - t^2}$, on voit que α dépend seulement du rapport $\frac{t}{a}$. Quand t et a tendent vers l'∞ de façon que leur rapport soit constant, α demeurera donc constant. Quand on suppose que le rapport $\frac{t}{a}$ est très grand, il vient :

$$i\alpha = q - i + p. \quad \left[\text{on trouve } \alpha = \infty \text{ si ce rapport est égal à } 1\right]$$

Prenons donc l'intégrale

$$\int \frac{e^{\frac{iu}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} d\xi}{\xi - \alpha}$$

où α est constant et cherchons sa valeur pour u très grand.

Pour cela construisons dans le plan des ξ les courbes

$$\text{partie réelle de } \xi + \frac{1}{\xi} = \text{const.}$$

Si nous appelons ρ le module et ω l'argument de ξ, ces courbes de coordonnées polaires auront pour équation

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \omega = \text{const.}$$

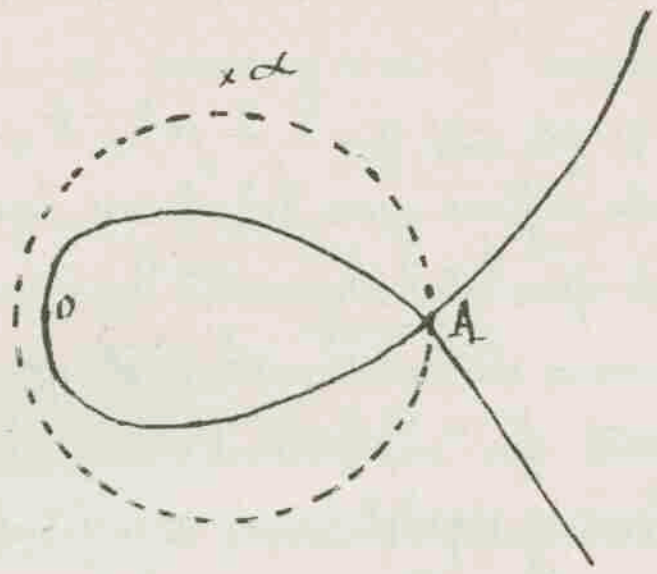
Ce dont nous avons besoin c'est de la courbe

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \omega = 2$$

d'où

$$\rho = \frac{1 \pm \sin \omega}{\cos \omega}$$

c'est l'équation d'une strophoïde.



Deux cas sont à distinguer suivant que le point α est intérieur ou extérieur à la boucle de la strophoïde. Dans le 2d cas, on pourra remplacer le contour d'intégration qui est un petit cercle autour de O par le contour en traits pointillés - - - - -, laissant en dehors le point α.

Le long du contour en trait pointillé la partie réelle de $\xi + \frac{1}{\xi}$ est toujours plus petite que 2, sauf au point A où elle est égale à 2.

Nous savons que $u = \pm\sqrt{a^2 - t^2}$ est purement imaginaire et très grand ; si donc nous prenons devant le radical le signe convenable, (ce que je suppose une fois pour toutes) iu sera réel positif et très grand. Dans ces conditions on a :

$$\left| e^{\frac{iu}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} \right| = e^{\frac{iu}{2} R}$$

R étant la partie réelle de $\xi + \frac{1}{\xi}$; si donc R a en deux points les valeurs R' et R'' et que $R' > R''$, la valeur de l'exponentielle

$$e^{\frac{iu}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)}$$

sera beaucoup plus petite au 2d de ces points qu'au premier.

Donc si t et a sont très grands, il suffira de

considérer, dans le contour en trait pointillé, les parties très voisines du point A.

Or dans ce cas, on a sensiblement :

$$\xi - \alpha = 1 - \alpha$$

et

$$\xi + \frac{1}{\xi} = 2 + (\xi - 1)^2$$

L'intégrale peut donc être remplacé par

$$\int \frac{e^{i\frac{u}{2}\left[2+(\xi-1)^2\right]} d\xi}{1-\alpha}$$

prise le long d'un petit arc passant en A, par exemple le long d'un petit segment de droite parallèle à l'axe des parties imaginaires. Prolongeons cette droite indéfiniment dans les deux sens. En tous les points de cette droite, sauf au point A, la partie réelle de $\xi + \frac{1}{\xi}$ est plus petite que 2 ; et par conséquent la fonction sous le signe $\int$ est négligeable devant ce qu'elle est en A ; on peut donc, faire l'intégration le long de cette droite tout entière, les parties ainsi ajoutées sont négligeables.

Soit :

$$\xi = 1 + i\,\eta, \quad d\xi = i\,d\eta$$

il faudra faire varier η depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ et l'intégrale devient :

$$\frac{1}{1-\alpha}\, i e^{iu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u\eta^2}{2}} d\eta = \frac{i e^{iu}}{\sqrt{iu}} \frac{\sqrt{\pi}}{1-\alpha} = \frac{i e^{\sqrt{t^2-a^2}}}{\sqrt{t^2-a^2}} \frac{\sqrt{\pi}}{1-\alpha}$$

Supposons maintenant que α soit à l'intérieur de la boucle de la strophoïde. En vertu du théorème de

Cauchy, l'intégrale prise le long du petit cercle qui entoure O n'est plus égale à l'intégrale prise le long du contour en trait pointillé, mais à cette seconde intégrale plus $2i\pi$ multiplié par le résidu correspondant au pôle α, c'est-à-dire à cette 2de intégrale plus

$$(B) \qquad 2i\pi e^{i\frac{u}{2}(\alpha+\frac{1}{\alpha})}$$

et comme cette 2de intégrale dont nous venons de trouver la valeur asymptotique est très petite par rapport à cette expression B, ce sera cette expression B qui sera la valeur asymptotique cherchée de la 1re intégrale.

Revenons à l'expression :

$$\Phi = e^{-t}\int \frac{e^{i\frac{u}{2}(\xi+\frac{1}{\xi})}\, p\, d\xi}{\xi(2ip-Q)}$$

Si aucun des α n'est à l'intérieur de la boucle de strophoïde la valeur asymptotique de Φ sera :

$$i\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-t+\sqrt{t^2-a^2}}}{\sqrt[4]{t^2-a^2}}\,D,$$

en désignant par D, la valeur de

$$\frac{p}{2ip-Q}$$

pour $\xi = 1$.

S'il y a des α à l'intérieur de la boucle de strophoïde, la valeur asymptotique de Φ sera au facteur $2i\pi$ près, le résidu de la fonction sous le signe $\int$ relatif à celui des points α pour lequel la partie réelle de $\alpha+\frac{1}{\alpha}$ est la plus grande (ou la somme des résidus, s'il y a plusieurs α pour lesquels cette partie réelle est la même, et il

arrivera souvent en effet que deux α seront imaginaires conjugués)

Je ne poussera pas jusqu'au bout cette discussion dont on a maintenant tous les éléments ; on opérerait avec les valeurs asymptotiques ainsi trouvées comme on a fait dans le cas d'une ligne indéfinie.

Cas où le récepteur est à la terre

Ordinairement la ligne ne se poursuit pas indéfiniment au delà du récepteur mais elle est mise à la Terre ; je supposerai le fil de Terre très court, de sorte que le potentiel pour $x = a + \varepsilon$ doit être nul. On a pour $x = a - \varepsilon$ et pour $x = a + \varepsilon$

$$B = \frac{1}{2ip}, \quad Be^{ipa} + Ce^{-ipa} = \Phi e^{-iqt}$$

Le potentiel pour $x = a + \varepsilon$ étant nul, le potentiel pour $x = a - \varepsilon$ sera $-Q\Phi$ ce qui donne :

$$Bipe^{ipa} - Cipe^{-ipa} = -Q\Phi e^{-iqt}$$

d'où :

$$\Phi = \frac{e^{iqt+ipa}}{ip - Q}$$

La discussion est toute pareille à celle qui précède.

Cas où il y a des Capacités de la 2de Sorte

Si nous supposons une capacité de la 2de sorte

placée en un point de la ligne sans que l'on ait en ce point de self-induction, de résistance ni de capacité de la 1re sorte. Alors Φ ne sera plus continue, mais $\frac{d\Phi}{dx}$ sera continu, car nous n'avons pas en ce point de force électromotrice.

Soient alors Φ et $\Phi + \delta\Phi$ les valeurs de la fonction Φ en amont et en aval de notre capacité; de la 2de sorte la charge de cette capacité sera $\delta\Phi$, de sorte que l'on aura :

$$\delta\Phi = -C\frac{d\Phi}{dx}$$

si C est la valeur de cette capacité.

Nous pouvons imaginer maintenant des récepteurs formés de combinaisons quelconques de self-inductions, de résistances et de capacités des deux sortes.

Imaginons, par exemple, que nous rencontrions d'abord un récepteur formé de trois sections successives en série; la 1re section ayant une self L, une résistance R, une capacité de 1re sorte A, la 2de ayant seulement une capacité de 2e sorte C, la 3e semblable à la 1re mais avec les constantes L_1, R_1, A_1.

En amont de la 1re, la fonction Φ aura la valeur Φ et le potentiel $\frac{d\Phi}{dx}$; en aval, la fonction Φ sera encore égale à Φ et le potentiel à

$$V' = \frac{d\Phi}{dx} - L\frac{d^2\Phi}{dt^2} - R\frac{d\Phi}{dt} - A\Phi$$

En aval de la 2de, le potentiel aura la même valeur, mais la fonction Φ sera devenue :

$$\Phi' = \Phi - CV' = \Phi - C\frac{d\Phi}{dx} - LC\frac{d^2\Phi}{dt^2} - LR\frac{d\Phi}{dt} - LA\Phi.$$

En aval de la 3e, la fonction Φ sera continue, et restera égale à Φ', mais le potentiel deviendra :

$$V'' = V' - L_1 \frac{d^2 \Phi'}{dt^2} - R_1 \frac{d\Phi'}{dt} - A_1 \Phi'$$

qui est une fonction linéaire de Φ, de $\frac{d\Phi}{dx}$ et de leurs dérivées par rapport au temps.

Plus généralement quelle que soit la complication d'un récepteur, qu'il soit formé d'un réseau plus ou moins complexe de selfs, de résistances de capacités des deux sortes placées en dérivation ou en série, il sera toujours caractérisé par ce fait qu'il y aura deux relations linéaires entre les valeurs de Φ et du potentiel en amont et en aval du récepteur et quelques unes de leurs dérivées par rapport au temps. Il en serait encore de même si l'on tenait compte de l'induction mutuelle des diverses parties du récepteur.

Méthode Générale

Que devons nous faire alors ? On opérera toujours de la même manière ; on cherchera d'abord la solution isochrone. Pour cela on considérera la ligne comme divisée en plusieurs sections, les points de division étant la pile, le récepteur, les extrémités de ligne isolées ou mises à la Terre, etc..

Dans chacune de ces sections on aura :

$$\Phi = A e^{i(qt+px)} + B e^{i(qt-px)}$$

A et B étant des coefficients constants, et p étant lié à q par la relation

$$q^2 - 2iq = p^2$$

ou plus généralement :

$$\delta \lambda q^2 - i \rho \gamma q = \rho^2$$

les constantes γ λ, ρ pouvant ne pas être les mêmes dans les différentes sections.

Si la section est indéfinie dans un sens, l'un des deux termes de Φ devra disparaître.

Si une section se termine par une extrémité isolée, ou une mise à la Terre, on aura en ce point

$$\Phi = 0, \text{ ou } \frac{d\Phi}{dx} = 0 \text{ ; ce qui donne}$$

une relation entre les coefficients A et B.

Maintenant si nous comparons deux sections consécutives, nous aurons deux relations linéaires entre les valeurs de Φ et de $\frac{d\Phi}{dx}$ de part et d'autre du point de division et entre leurs dérivées successives par rapport au temps. Si nous observons que pour une solution isochrone, la dérivée d'une de ces fonctions par rapport au temps est égale à cette fonction elle-même multipliée par iq, nous voyons que nous aurons deux relations linéaires entre les valeurs de Φ et $\frac{d\Phi}{dx}$ de part et d'autre de point de division mais que les coefficients de ces relations dépendent de q. Ces relations nous fournissent alors deux équations linéaires entre les coefficients A et B des deux sections consécutives.

On peut déterminer ces coefficients A et B à l'aide de ces diverses relations, et ces coefficients seront des fonctions de q, puisque nos équations linéaires dépendent de q. On aura ainsi :

$$\Phi = \Omega(q)\, e^{iqt}$$

Appelons $f(t)$ la force électromotrice de la pile

et posons :

$$f(t) = \int \theta(q)\, e^{iqt}\, dq, \quad \theta(q) = \frac{1}{2\pi} \int f(\tau) e^{-iq\tau}\, d\tau$$

nous aurons pour la solution générale :

$$\Phi = \iint \frac{f(\tau)}{2\pi}\, e^{iq(t-\tau)}\, \Omega(q)\, dq\, d\tau$$

et pour "l'ébranlement élémentaire ."

$$\Phi = \int \frac{e^{iqt}}{2\pi}\, \Omega(q)\, dq$$

Nous pourrons ainsi dans tous les cas mettre la fonction cherchée sous la forme d'une intégrale définie.

Premier cas.

Le premier cas est celui où il n'y a qu'un récepteur, qui peut être d'ailleurs aussi compliqué que l'on veut, mais qui est immédiatement réuni à la Terre, ou bien suivi d'une ligne indéfinie ; la ligne de l'autre côté de la pile est indéfinie, ou bien le second pôle de la pile est mis immédiatement à la Terre. Il n'y a donc qu'une section de <u>longueur finie</u> c'est celle qui s'étend de la pile au récepteur. Soit <u>a</u> sa longueur.

Nous cherchons la valeur Φ au récepteur, c'est-à-dire pour $x = a$. Dans ce cas $\Omega(q)$ est égal à e^{ipa} multiplié par une fonction rationnelle de <u>p</u> et de <u>q</u>. Notre intégrale peut alors être décomposée comme plus haut en éléments simples de la forme :

$$\int \frac{e^{\frac{i\mu}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)}\, d\xi}{\xi - \alpha}$$

Si nous voulions la fonction Φ en un point quelconque de la section comprise entre la pile et le récepteur, nous verrions que $\Omega(q)$ est une somme de deux termes l'un contenant l'exponentielle e^{ipx}, l'autre l'exponentielle $e^{ip(2a-x)}$ l'une et l'autre multipliée par une fonction rationelle de q et de p.

Deuxième cas.

Le deuxième cas est plus compliqué, c'est celui où il y a plusieurs sections de longueur finie. C'est-ce qui arriverait par exemple :

1° Si le récepteur est relié à la Terre, non pas immédiatement, mais par un fil de longueur finie ;

2° Si le second pôle de la pile était à la Terre par un fil de longueur finie ;

3° Si la ligne était fermée sur elle-même de façon à équivaloir à une série indéfinie de piles et de récepteurs équidistants. (Voir plus haut le cas d'une ligne fermée) ;

4° Si la ligne était formée de plusieurs fils de section différente raccordés ensemble.

S'il en est ainsi $\Omega(q)$ n'est plus une exponentielle multipliée par une fonction rationnelle de p et de q. Mais $\Omega(q)$ dépend rationnellement de p, de q et de <u>plusieurs</u> exponentielles. Nous avons même des combinaisons d'exponentielles au dénominateur.

Interprétation physique du 2me cas

On peut se représenter comme il suit la façon

dont les choses se passent, l'onde émanée de la pile se propage dans les deux sens quand elle rencontre un point de division entre deux sections, une partie de la perturbation est transmise à la section suivante, une partie est réfléchie et revient en arrière.

C'est de la superposition de toutes ces ondes ayant subi des réflexions multiples que provient la fonction Φ. Il y a là quelque chose de tout à fait analogue au phénomène des anneaux colorés.

Lorsqu'on n'a qu'une section de longueur finie, comprise entre la pile et le récepteur, il y a réflexion au récepteur, mais il n'y a pas réflexion à la pile; nous avons alors au plus une onde directe et une onde réfléchie, ce qui donne en tout pour $\Omega(q)$ deux termes, chacun d'eux contenant en facteur une exponentielle.

Si au contraire, il y a plusieurs sections de longueur finie; il y a plusieurs points où se produisent des réflexions, de sorte qu'une onde, renvoyée de l'un à l'autre peut subir une infinité de réflexions successives.

Nous aurons donc à considérer une infinité d'ondes distinctes. A chacune d'elles correspondra dans $\Omega(q)$ un terme formé d'une exponentielle, multipliée par une fonction rationnelle de p et de q. C'est la somme de tous ces termes qui est alors égale à une fonction rationnelle d'un certain nombre d'exponentielles, ainsi que de p et de q. Mais nous devons observer qu'à chaque réflexion, la perturbation est considérablement affaiblie; de sorte que ces termes décroissent rapidement et qu'il n'est nécessaire d'en considérer qu'un très petit nombre.

Nous avons donc deux manières d'écrire $\Omega(q)$; nous pouvons l'écrire en bloc; sous forme finie elle est alors rationnelle non seulement par rapport à p

et à q, mais encore par rapport à un certain nombre d'exponentielles. La solution du problème (pour un ébranlement élémentaire) se présente alors sous la forme d'une intégrale définie simple.

$$\Phi = \int \Omega(q) e^{iqt} \, dq$$

mais qui se prête mal à la discussion. Nous pouvons aussi la développer en série procédant suivant les puissances des exponentielles (Il faut naturellement développer suivant les puissances croissantes de celles de ces exponentielles dont la valeur absolue est plus petite que 1). On sépare ainsi les différentes ondes réfléchies ; chaque terme est de la forme :

$$e^{ipl} R$$

où l est une longueur dépendant des longueurs des différentes sections et où R est rationnel en p et en q. La solution se présente alors sous la forme :

$$\Phi = \sum R e^{i(qt+pl)} dq .$$

Il n'est pas nécessaire, comme je l'ai dit plus haut, de considérer un grand nombre de termes ; et chacun de ces termes peut se traiter comme dans le 1er cas.

Raccordement de deux fils de différente section

Il peut arriver que dans deux sections consécutives de la ligne, les constantes du fil, C, λ, γ, n'aient pas la même valeur. On peut par exemple

raccorder deux fils de diamètre différent, ou bien raccorder une ligne sous-marine avec une ligne aérienne. Dans ce cas la valeur de p n'est pas la même dans les deux sections puisque l'équation qui définit p

$$\lambda \gamma q^2 - \rho \gamma i q = p^2$$

n'a pas les mêmes coefficients. De plus, au point de raccordement les ondes subissent une réflexion. Quelles sont les conditions de cette réflexion ? D'abord il n'y a pas de force électromotrice donc $\frac{d\Phi}{dx}$ est continu. Ensuite l'intensité doit être la même dans les deux sections ; donc $\gamma \frac{d\Phi}{dt}$ et $\gamma \Phi$ sont continus. Cela suffit pour déterminer les conditions de la réflexion, c'est-à-dire les relations linéaires entre les coefficients A et B relatifs aux deux sections.

Influence des Pertes.

Reprenons le calcul quand la ligne est affectée d'une perte uniforme.

Nous avons toujours l'équation de Ohm :

$$\lambda \frac{di}{dt} + \rho i = E + \frac{dV}{dx}$$

mais l'équation de continuité est modifiée. La dérivée de la charge par rapport au temps, c'est-à-dire $\gamma \frac{dV}{dt}$, n'est pas égale à l'apport dû au courant, c'est-à-dire à $\frac{di}{dx}$! il faut tenir compte d'une perte proportionnelle à V et que je représenterai par αV ; on a donc :

$$\frac{di}{dx} = \gamma \frac{dV}{dt} + \alpha V$$

ce qui montre qu'il existe une fonction Φ telle que l'on ait :

$$V = \frac{d\Phi}{dx}, \quad i = \gamma \frac{d\Phi}{dt} + \alpha \Phi .$$

de sorte que l'on a :

$$\lambda \gamma \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \lambda(\alpha + \rho\gamma)\frac{d\Phi}{dt} + \alpha \rho \Phi - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = E$$

ou en employant la notation symbolique :

$$\left(\lambda \frac{d}{dt} + \rho\right)\left(\gamma \frac{d}{dt} + \alpha\right)\Phi - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = E$$

Si l'on suppose $E = 0$, il vient :

$$\lambda \gamma \frac{d^2\Phi}{dt^2} + (\lambda\alpha + \rho\gamma)\frac{d\Phi}{dt} + \alpha\rho\Phi = \frac{d^2\Phi}{dx^2}$$

Si nous posons :

$\Phi = e^{kt} U$ et qu'on choisisse k de telle sorte que

$$\lambda \gamma k^2 + (\lambda\alpha + \rho\gamma) k + \alpha\rho = 0$$

ou

$$(\lambda k + \rho)(\gamma k + \alpha) = 0$$

On est ramené à l'équation des télégraphistes. En effet on a symboliquement :

$$\frac{d}{dt}(e^{kt} U) = e^{kt}\left(\frac{dU}{dt} + kU\right) = e^{kt}\left(\frac{d}{dt} + k\right) U$$

de sorte que U satisfait à l'équation :

$$\left(\lambda\frac{d}{dt}+\lambda k+\rho\right)\left(\gamma\frac{d}{dt}+\gamma k+\alpha\right)U=\frac{d^2U}{dx^2}$$

Il y a deux valeurs de k pour lesquelles cette équation se réduit à celle des télégraphistes ;

1° Si $\lambda k+\rho$ est nul ; il reste :

$$\lambda\gamma\frac{d^2U}{dt^2}+(\alpha\lambda-\gamma\rho)\frac{dU}{dt}=\frac{d^2U}{dx^2}$$

2° Si $\gamma k+\alpha$ est nul, il reste :

$$\lambda\gamma\frac{d^2U}{dt^2}+(\gamma\rho-\alpha\lambda)\frac{dU}{dt}=\frac{d^2U}{dx^2}$$

On remarquera que dans l'une de ces deux équations le coefficient de $\frac{dU}{dt}$ est positif, de sorte qu'on peut disposer des unités de façon que le coefficient de $\frac{d^2U}{dt^2}$ devienne égal à 1 et celui de $\frac{dU}{dt}$ à 2, ce qui est l'hypothèse que nous avons faite dans les calculs antérieurs.

Quelle est la signification des deux valeurs de k. Supposons qu'après avoir isolé parfaitement la ligne à ses deux extrémités, on lui communique une charge uniforme, cette charge se dissipera peu à peu à cause des pertes ; mais la charge restera uniforme ; il ne naîtra donc aucun courant dans la ligne, et nous aurons :

$$\gamma\frac{dV}{dt}+\alpha V=0$$

d'où

$$V=e^{kt},\quad \gamma k+\alpha=0$$

La seconde valeur de k définit donc la rapidité avec laquelle se perd la charge ; elle est essentiellement négative.

Supposons maintenant que la ligne soit soumise pendant un certain temps à une force électromotrice E uniformément répartie tout le long de la ligne ; dans le régime qui s'établira, l'intensité i sera constante et égale à $\frac{E}{\rho}$ tout le long de la ligne ; la ligne ne prendra aucune charge et on aura $V=0$. Faisons maintenant disparaître brusquement la force électromotrice, le courant i restera indépendant de x et V restera nul de sorte qu'on aura :

$$\lambda \frac{di}{dt} + \rho i = 0$$

d'où

$$i = e^{kt} \quad ; \lambda k + \rho = 0$$

La première valeur de k définit la rapidité avec laquelle disparaît un courant uniforme, quand la ligne n'a pris aucune charge ; elle est essentiellement négative.

Qu'arrive-t-il maintenant si les deux valeurs de k sont égales ; on a alors :

$$\gamma \rho - \alpha \lambda = 0$$

de sorte que notre équation se réduit à :

$$\lambda \gamma \frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{d^2 U}{dx^2} .$$

C'est l'équation des cordes vibrantes, la valeur de U se propage avec une vitesse uniforme, égale à celle de la lumière et sans altération. Quant à celle

de $\Phi = e^{kt} v$, elle se propage avec cette même vitesse, et sans autre altération qu'un affaiblissement représenté par le facteur exponentiel e^{kt}.

Ainsi pour une certaine valeur de la perte, qu'on pourrait appeler <u>perte idéale</u>, les signaux s'affaiblissent avec la distance, mais <u>sans rien perdre de leur netteté</u>.

On conçoit donc que dans certains cas, une perte puisse améliorer les transmissions.

Remarque sur le Transmetteur.

Dans tout ce qui précède nous avons toujours supposé que la force électromotrice de la pile $f(t)$ était donnée en fonction du temps. Cela est vrai si la ligne mise à la pile pendant l'émission des signaux, est mise immédiatement à la Terre dans l'intervalle des signaux. Les choses se passeraient d'une façon plus compliquée si dans l'intervalle des signaux la ligne était isolée, ou réunie à la Terre par l'intermédiaire d'un récepteur.

Considérons le cas où la ligne est isolée; on a; pour $x = 0$

1° avant l'émission du signal :

$$\Phi = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dx} = 0 \quad ;$$

2° pendant l'émission du signal

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} \text{ la force de la pile étant } 1;$$

3° après l'émission du signal $\frac{d\Phi}{dx} = 0$, $\Phi = C$

Si l'on avait après l'émission du signal $\frac{d\Phi}{dx} = 0$, et si le signal était très court, émis au temps zéro et la ligne indéfinie, on aurait :

$$\text{pour } t < x,\ \Phi = 0,\ \text{pour } t > x,\ \Phi = K e^{-t} J_0(\sqrt{x^2 - t^2})$$

et on trouverait des valeurs analogues si l'on supposait que la durée de l'émission est finie (vide supra)

Soit Φ_0 la valeur de Φ correspondant à cette hypothèse, $\Phi_0 + \Phi_1$ la véritable valeur de Φ ; on aura avant et pendant l'émission ; $\Phi = 0$ puisque les hypothèses ne deviennent différentes qu'après l'émission. Après l'émission on aura ; pour $x = 0$

$$\Phi_1 = C - \Phi_0$$

de sorte que Φ_1 est donné pour $x = 0$. Nous remarquerons que cette valeur donnée de Φ_1 est toujours positive, parce que pour $x = 0$ les fonctions $e^{-t} J_0(it)$ et Φ_0 sont toujours décroissantes.

Ainsi Φ_1 est donnée en fonction de t ; elle est nulle jusqu'à la fin de l'émission et positive ensuite. Le calcul de Φ_1 pour des valeurs de x différentes de zéro est facile. Nous trouvons ; si $\Phi_1 = e^{iqt}$ pour $x = 0$: (et dans le cas de la ligne indéfinie)

$$\Phi_1 = e^{i(qt + px)}$$

d'où pour un ébranlement instantané :

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(qt + px)} dq = \varphi(t, x).$$

Si nous supposons $\Phi_1 = f(t)$ pour $x = 0$, il vient, comme plus haut :

$$\Phi_1 = \int f(\tau)\, \varphi(t - \tau, x)\, d\tau$$

je remarque seulement que $f(\tau)$ étant essentiellement positif, la fonction Φ_1 ne décroîtra que très lentement

et que les transmissions seront beaucoup plus mauvaises.

Si l'on supposait qu'après l'émission la ligne est mise à la Terre par l'intermédiaire d'un récepteur, le calcul serait analogue. On aurait :

avant l'émission $\Phi = \frac{d\Phi}{dx} = 0$

pendant ——— $\frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{2}$

après ——— une certaine relation entre Φ et ses dérivés que j'écris $\Delta\Phi = 0$. Soit alors Φ_0 ce qui serait Φ si on mettait <u>directement</u> à la Terre après l'émission, $\Phi_0 + \Phi_1$, la vraie valeur de Φ.

On a alors

Avant et pendant l'émission $\Phi_1 = \Delta\Phi_1 = 0$

Après l'émission $\Delta\Phi_1 = -\Delta\Phi_0$

c'est-à-dire que $\Delta\Phi_1$ est une fonction connue du temps. On cherchera la solution isochrone en supposant d'abord $\Delta\Phi_1 = e^{iqt}$ et on en déduira, toujours par le même procédé, la solution générale et l'ébranlement élémentaire. Il est clair qu'on peut encore opérer de même dans des cas plus compliqués.

Remarque

Si les différentes sections de la ligne sont formées de fils, dont les constantes ne sont pas les mêmes, la valeur de p n'est pas la même dans les différentes sections. Alors $\Omega(q)$ est une fonction rationnelle de q, de diverses quantités $p_1, p_2, \ldots$, liées à q par des équations du 2d degré, et de diverses exponentielles $e^{ip_1 a_1}, \ldots$, où p_1 a toujours le même sens, tandis que a_1 est la longueur de la section correspondante.

(Si l'on veut l'intensité en un point quelconque de la ligne, on pourra toujours considérer ce point comme un point de division séparant deux sections).

Nos intégrales se présentent alors sous une forme encore plus compliquée. Mais on peut, quand on en veut avoir une expression asymptotique, opérer toujours d'après les mêmes principes. On développera suivant les puissances des exponentielles e^{ipx}, comme p a toujours sa valeur imaginaire positive, cette expression a son module plus petit que 1 et la série converge rapidement. — Chacun des termes est une exponentielle multipliée par une fonction rationnelle de q et de p. Considérons l'un de ces termes et cherchons une valeur asymptotique de l'intégrale correspondante. Pour cela il suffira de déformer le contour d'intégration jusqu'à ce qu'il aille passer par un point singulier, et de telle façon qu'en ce point singulier l'exponentielle soit beaucoup plus grande que sur tout le reste du contour; on aura l'expression asymptotique en réduisant le contour à ses parties les plus voisines du point singulier, le reste étant négligeable.

Remarque A

~~Nous avons dit plus haut que l'on pouvait développer $\Omega(q)$ suivant les puissances croissantes des exponentielles, et que chacun des termes du développement correspond à l'une des ondes réfléchies. Je voudrais le montrer sur un exemple simple, et je choisirai le cas d'une ligne fermée de longueur l, avec une pile de force électromotrice $f(t)$ au point $x = 0$, et pas de récepteur.~~

On peut ~~s'en rendre com~~ par l'analyse qui va suivre se rendre mieux compte de ce qui se passe.

Soit d'abord $f(t) = e^{iqt}$, $\Phi = \Omega(q)\, e^{iqt}$; d'où

$$\Omega(q) = A e^{ipx} + B e^{-ipx}$$

J'écris que Φ est continu et que $\frac{d\Phi}{dx}$ subit un saut brusque e^{iqt} ; c'est-à-dire que si Φ_0 et Φ_1, $\frac{d\Phi_0}{dx}$ et $\frac{d\Phi_1}{dx}$ sont les valeurs de Φ et $\frac{d\Phi}{dx}$ pour $x=0$ et pour $x=l$, on a :

$$\Phi_0 = \Phi_1 \quad , \frac{d\Phi_0}{dx} = \frac{d\Phi_1}{dx} + e^{iqt}$$

cela donne :

$$A + B = Ae^{ipl} + Be^{-ipl}$$
$$Aip - Bip = Aipe^{ipl} - Bipe^{-ipl} + 1$$

d'où :

$$A = \frac{1}{ip(1-e^{ipl})} \, , B = \frac{1}{ip(1-e^{-ipl})} = Ae^{ipl}$$

$$\Phi = e^{iqt} \frac{e^{ipx} + e^{ip(l-x)}}{ip(1-e^{ipl})} = \frac{e^{iqt}}{ip}\left[\sum e^{ip(x+nl)} + \sum e^{ip(l-x+nl)}\right]$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots \infty)$$

Le terme $e^{ip(x+nl)}$ représente l'onde qui arrive au point x après avoir fait n tours complets dans le sens direct, le terme $e^{ip(l-x+nl)}$ représente l'onde qui a fait n tours complets dans le sens rétrograde.

Remarque

Nous avons plus haut discuté l'intégrale :

$$\int R e^{\frac{iu}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} d\xi$$

et nous avons distingué deux cas, selon que l'un des pôles de R était intérieur à une boucle de strophoïde ou non. Cette strophoïde que j'appelle S a pour sommet $\xi = 0$ et pour point double $\xi = 1$.

Je dis que le 1er cas ne se présentera pas pratiquement.

Qu'arrive-t-il quand q est réel ; on trouve :

$$(q - i + p)(t + a) = \xi u$$
$$(q - i - p)(t - a) = \frac{1}{\xi} u$$

Nous savons que $t > a$; par conséquent iu est réel, et dans ce qui précède nous avons supposé

$$iu = +\sqrt{t^2 - a^2} > 0$$

Si donc nous posons :

$$k = \frac{iu}{t+a} = \frac{t-a}{iu}$$

On aura :

$$0 < k < 1,$$

et

$$q - i + p = -ik\xi$$
$$q - i - p = \frac{-i}{k\xi}$$

d'où :

$$2q = i\left(2 - k\xi - \frac{1}{k\xi}\right)$$

pour que q soit réel, il faut donc que :

$$\text{partie réelle}\left(k\xi + \frac{1}{k\xi}\right) = 2$$

Cette équation représente une strophoïde qui a pour sommet $\xi = 0$, et pour point double $\xi = \frac{1}{k}$. Cette strophoïde je l'appelle S'.

Ainsi quand q est réel, ξ décrit la strophoïde de S' ; à savoir la boucle de S' quand la partie réelle de $\frac{p}{q}$ est négative, et le reste de S' quand cette partie réelle est positive. Reportons nous à la figure où sont représentés les contours d'intégration dans <u>le plan des q</u>. Le chemin DNC par un demi cercle de rayon très petit contournant l'origine ; l'aire limitée par le contour fermé CMDNC

est représentée par l'aire limitée par la boucle de S'.
Or nous avons vu que dans cette aire CMDNC, il ne peut y avoir de point singulier sans quoi la perturbation atteindrait le récepteur pour $t < a$, ce qui est physiquement absurde. Donc il n'y en a pas à l'intérieur de la boucle de S' ; et comme la boucle de S est tout entière à l'intérieur de S', il n'y en a pas non plus à l'intérieur de la boucle de S.

C.Q.F.D.

La formule asymptotique qui donne la valeur approchée de Φ est donc :

$$\Phi = K \frac{e^{-t+iu}}{\sqrt{iu}} D_1$$

où K est un facteur numérique et D_1 la valeur de R pour $\xi = 1$; D_1 dépend alors du rapport $\frac{t}{a}$; si nous supposons $\frac{t}{a}$ très grand, D_1 s'annule et la formule devient illusoire.

Que convient-il de faire quand R s'annule pour $\xi = 1$. Nous posons $\xi = 1 + i\eta$ et nous développons R suivant les puissances croissantes de η ; et comme les seules parties du contour qu'il convient de conserver sont celles qui correspondent aux petites valeurs de η, nous ne conserverons que les premiers termes du développement. Nous pourrons d'ailleurs remplacer $\xi + \frac{1}{\xi}$ par sa valeur approchée $2 - \eta^2$ et comme plus haut, remplacer le contour d'intégration par une droite indéfinie, nous aurons ainsi :

$$\Phi = \frac{1}{i} e^{-t+iu} \int_{-\infty}^{+\infty} R e^{-\frac{iu\eta^2}{2}} d\eta$$

Il est clair que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta^K e^{-\frac{iu\eta^2}{2}} d\eta$$

est nulle si K est impaire, et que si K est pair, cette integra-le s'obtient aisément en partant du cas de $K = 0$, et en différentiant $\frac{K}{2}$ fois sous le signe $\int$ par rapport à u.

En opérant de la sorte, on voit que les transmissions sont d'autant meilleures que le coefficient A qui figure dans Q est plus grand, c'est-à-dire que la capacité du récepteur est plus petite, puisque A représente l'inverse de cette capacité.

Remarquons que s'il n'y avait pas de récepteur, tout se passerait comme si les deux plateaux du condensateur fictif qui représente cette capacité de la 1re sorte étaient amenés au contact l'un de l'autre, c'est-à-dire comme si cette capacité était devenue infinie.

Fin.