bestimmt worden. Daneben war noch die Fadenkorrektion der Dampfthermometer und eine, wenn auch nur geringe Wasserkorrektion ΔQ infolge nicht ganz konstanter Temperaturen zu beachten, womit sich dann die in der Tabelle enthaltenen Werte ergaben. Alsdann folgt die spezifische Wärme c_p des Wasserdampfes aus

$$c_p = \frac{W(t_2 - t_1) - 2{,}4\,(t_2 - t_w) + \Delta Q}{G\,(\tau_1 - \tau_2)} \tag{1}$$

für das Temperaturintervall $\tau_1 - \tau_2$ bezw. die Mitteltemperatur $\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$ und den Druck $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, siehe Zeile 19. Hierin ist jedoch der Einfluss der Druckänderung, der sich nach den Versuchen von Thomson und Joule an Luft und Kohlensäure in der Temperaturdifferenz $\tau_1 - \tau_2$ ausdrücken muss, noch nicht beachtet. Bezeichnet man die den Drucken p_1 und p_2 entsprechenden Sättigungstemperaturen des Dampfes (Zeile 6 und 7 nach Regnault-Zeuner) mit ϑ_1 und ϑ_2, so hat man für die Bildungswärme von 1 kg überhitzten Wasserdampfes aus Wasser von 0^0 bei vorläufig konstant angenommenem c_p die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= 606{,}5 + 0{,}305\,\vartheta_1 + c_p(\tau_1 - \vartheta_1)\\ \lambda_2 &= 606{,}5 + 0{,}305\,\vartheta_2 + c_p(\tau_2 - \vartheta_2)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die zur Überführung eines Zustandes in den andern nötige Wärme ist aber für G kg Dampf

$$Q = G\,(\lambda_1 - \lambda_2) \tag{3}$$

oder auch, ausgedrückt in den Versuchsdaten

$$Q = W(t_2 - t_1) - 2{,}4\,(t_2 - t_w) + \Delta Q. \tag{4}$$

Durch Elimination von Q, λ_1 und λ_2 aus (2) bis (4) folgt schliesslich

$$c_p = \frac{W(t_2 - t_1) - 2{,}4(t_2 - t_w) + \Delta Q - 0{,}305\,G(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{G\,(\tau_1 - \tau_2 - \vartheta_1 + \vartheta_2)}. \tag{5}$$

Die hieraus berechneten Werte sind in Zeile 20 der Tabelle enthalten. Als wahrscheinlichste Werte betrachte ich allerdings die in Zeile 21 enthaltenen Mittelwerte von (1) und (5), da der Einfluss der Druckerniedrigung entschieden nicht voll in Ansatz gebracht werden darf, weil die Manometeranschlüsse sich noch ausserhalb der Thermometerbüchsen am Kalorimeter befinden.

Die Mittelwerte Zeile (21) entsprechen leidlich genau der empirischen Formel

$$c_p = 0{,}43 + 3600000\,\frac{p}{T^3}, \tag{6}$$

worin $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ den mittleren Dampfdruck in kg/qcm und $T = 273 + \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$ die mittlere absolute Dampftemperatur bedeutet. Die hiernach berechneten Werte sind in Zeile 22 enthalten, ihre Differenzen von den Mittelwerten 21 schliesslich in Zeile 23. Für die mittlere Temperatur von $\tau = +172^0$ bei atmosphärischem Druck, welche dem von Regnault bestimmten Wert $c_p = 0{,}48$ entspricht, ergiebt die Formel (6) $c_p = 0{,}471$, eine angesichts der Versuchsschwierigkeiten recht befriedigende Übereinstimmung.

(Eingegangen 25. Mai 1904.)

Über die horistische Methode Gyldéns.

Von H. Poincaré.

In seinem Werke: Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes (Stockholm, Imprimerie Centrale, 1892) hat Gyldén zwei Methoden auseinandergesetzt, die er horistische nennt. Die erste dieser Methoden unterliegt ziemlich schweren Bedenken. Herr Backlund und ich haben gezeigt, dass sie in gewissen Fällen zu unzulässigen Resultaten führt und dass man sie nur mit Vorsicht gebrauchen darf. (Vgl. Compt. rend. **132**, 50 u. 291, Bulletin astron. **19**, 433). Ich habe es infolgedessen für angezeigt gehalten, die zweite dieser Methoden einer näheren Diskussion zu unterwerfen. Dieselbe besteht kurz gesagt in folgendem:

Gyldén betrachtet (loc. cit. S. 227 u. f.) die Gleichung:

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + z - \beta z^3 = X. \tag{1}$$

Der Koeffizient von z, den Gyldén Z nennt, ist eine Konstante, wenigstens in dem hier in Betracht kommenden Teile des Werkes (S. 227 bis 234); ich kann dieselbe also durch geeignete Wahl der Einheiten auf 1 reduzieren.

Es ist:

$$X = -\Sigma A_n \cos G_n \qquad G_n = 2\lambda_n v + B_n,$$

wobei A_n, B_n, λ_n konstante gegebene Werte sind und $2\lambda_n$ nahe gleich 1 ist.

Gyldén setzt: $z = \frac{y}{1+\psi}$ in der Art, dass ψ und y durch die Gleichungen definiert werden:

$$\frac{d^2\psi}{dv^2} - 2\nu^2\psi = (1-\psi)\,\nu^2 - \beta\,\frac{y^2}{1+\psi} \tag{2}$$

$$\frac{d^2 y}{dv^2} + (1-\nu^2)y = (1+\psi)X + \frac{2}{1+\psi}\,\frac{d\psi}{dv}\,\frac{dy}{dv} - \frac{2y}{(1+\psi)^2}\left(\frac{d\psi}{dv}\right)^2 y. \tag{3}$$

Wir bezeichnen mit ν^2 eine Konstante, welche so zu wählen ist, dass ψ eine trigonometrische Reihe wird; und wir haben (2) und (3) in der Weise zu integrieren, dass wir zuerst ψ auf den rechten Seiten gleich 0 setzen, dann bei der zweiten Annäherung auf diesen rechten Seiten ψ durch seinen in erster Annäherung gefundenen Wert ersetzen und so fortfahren.

Man findet so:

$$y = \Sigma x_n \cos G_n \qquad x_n = \frac{A_n}{4\lambda_n^2 - 1 + \nu^2} \tag{4}$$

und weiter:

$$(5)\qquad \begin{aligned} v^2 &= \frac{\beta}{2} \Sigma x_n^2 \\ \psi &= \Sigma \frac{\beta x_n x_p}{4(\lambda_n + \lambda_p)^2 + 2v^2} \cos(G_n + G_p). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung (4) und die erste Gleichung (5) gestatten die x und v^2 zu berechnen und liefern für diese Grössen endliche Werte.

Es ist klar, dass ein solches Verfahren nur berechtigt ist unter der Bedingung, dass die auf den rechten Seiten von (2) und (3) vernachlässigten Glieder kleiner sind, als die mitgenommenen. Nun steht aber auf der rechten Seite von (2) ein Glied, welches zu Zweifeln in dieser Hinsicht Anlass giebt und welches näher zu untersuchen ist; es ist das Glied:

$$\frac{2d\psi}{dv} \cdot \frac{dy}{dv}.$$

Man findet dafür:

$$(6)\qquad \frac{2d\psi}{dv} \cdot \frac{dy}{dv} = \Sigma \frac{\beta x_i x_j x_n}{2(\lambda_i \pm \lambda_j)^2 + v^2} (\lambda_i + \lambda_j) \lambda_n \cos(G_i \pm G_j \pm G_n).$$

Wir werden nur die kritischen Glieder beibehalten, d. h. diejenigen, wo der Koeffizient von v nahe gleich 1 ist. Es genügt für diesen Zweck, die Glieder der Form $G_i + G_j - G_n$ oder $G_i - G_j + G_n$ zu berücksichtigen.

Sei α eine Grösse von der Ordnung von A_n und σ eine Grösse von der Ordnung von $2\lambda_n - 1$.

Zwei Fälle sind zu unterscheiden: Entweder σ^3 ist gross im Verhältnis zu $\beta\alpha^2$ und dann ist x von Ordnung $\frac{\alpha}{\sigma}$, v^2 von der Ordnung $\frac{\beta\alpha^2}{\sigma^2}$ und das allgemeine Glied in (6) höchstens von der Ordnung:

$$\frac{\beta x^3}{\sigma} = \frac{\beta\alpha^3}{\sigma^4} = x \cdot \frac{\beta\alpha^2}{\sigma^3},$$

also im allgemeinen klein gegen x und in gewissen Fällen auch gegen α; hier ist die horistische Methode anwendbar, aber zugleich überflüssig, da die sog. Horistik v^2 sehr klein wird im Verhältnis zu $4\lambda_n^2 - 1$.

Oder aber σ^3 ist von kleinerer oder gleicher Grössenordnung, wie $\beta\alpha^2$; dann ist x von der Ordnung $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}$; das allgemeine Glied in (6) wird (wenn man den Fall $\lambda_i + \lambda_j$, $G_i + G_j - G_n$ nimmt) von der Ordnung $\beta x^3 = \alpha$; es ist also von derselben Ordnung wie X, wie die Glieder, die man vornherein mitgenommen hat.

Setzen wir voraus, dass X sich auf ein einziges Glied $-A \cos G$ reduziert und dass man σ gegenüber v^2 vernachlässigen kann, so folgt:

$$y = x \cos G \qquad x = \frac{2A}{\beta x^2} \qquad v^2 = \frac{\beta x^2}{2},$$

$$\psi = \frac{\beta x^2}{4} \cos 2G,\ \frac{dy}{dv} = -x \sin G,\ \frac{d\psi}{dv} = -\frac{\beta x^2}{2} \sin 2G$$

$$\frac{2dy}{dv} \cdot \frac{d\psi}{dv} = \beta x^3 \sin 2G \cdot \sin G = A(\cos 3G - \cos G).$$

Man darf das Glied mit $\cos 3G$ beiseite lassen, da es nicht kritisch ist; aber das Glied $-A \cos G$ ist kritisch, und man darf es um so weniger vernachlässigen, als es genau gleich dem beibehaltenen Gliede X ist.

Im Falle, wo X sich auf ein einziges Glied reduziert, ist die horistische Methode in passender Modifikation geeignet nicht zur Aufsuchung der allgemeinen Lösung der Gleichung (1), aber zur Bestimmung einer partikulären Lösung, und zwar derjenigen, die ich periodische Lösung nenne. Hier giebt sie, richtig angewendet:

$$y = +\sqrt[3]{\frac{4A}{3\beta}} \cos G,$$

während die Formel Gyldéns ergiebt:

$$y = \sqrt[3]{\frac{2A}{\beta}} \cos G.$$

Der Irrtum Gyldéns ist um so sonderbarer, als er selbst den Fall, wo sich x auf ein einziges Glied reduziert, durch Ausdrücke integriert hat, welche völlig streng werden, wenn man sich auf die periodische Lösung beschränkt.

Es ist keine Verkennung der ausserordentlichen Verdienste Gyldéns um die Wissenschaft, wenn man die Fehler bezeichnet, die ihm untergelaufen sind und die seine Nachfolger auf diesem Gebiete irreführen könnten; ich glaube im Gegenteil, dass man damit seinem Andenken einen Dienst erweist; daher trage ich kein Bedenken, mein Urteil klar zu formulieren.

Wer die horistische Methode anwendet, wird sich leicht in illusorischen Sätzen verlieren; es giebt Fälle, wo sie einwandsfrei ist, es giebt keine, wo sie von Nutzen ist.

Man sieht a fortiori ein, welcher Täuschung sich jemand hingiebt, der aus der horistischen Methode gleichmässig konvergente Entwickelungen im strengen Sinne des Wortes abzuleiten hofft.

Was den Schlusssatz des Werkes angeht, dass nämlich die Glieder hoher Ordnung in der Störungsfunktion niemals zu Librationen führen können, so ist er offenbar falsch.

(Eingegangen 13. Juni 1904.)