ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 16 JANVIER 1905,

PRÉSIDENCE DE M. TROOST.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

GÉOMÉTRIE. — *Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de Géométrie.* Note de M. H. **Poincaré**.

La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits; mais nous n'avons aucun théorème analogue pour le tétraèdre.

La surface d'un triangle sphérique est proportionnelle à l'excès sphérique; mais nous n'avons aucun théorème analogue pour le tétraèdre hypersphérique tracé sur l'hypersphère de l'espace à quatre dimensions.

On peut donc se demander si les théorèmes en question sont susceptibles d'être étendus aux espaces à plus de trois dimensions. Ainsi qne nous allons le voir, le premier de ces théorèmes peut être généralisé dans tout espace d'un nombre pair de dimensions, mais non dans les espaces d'un nombre impair de dimensions. Le second théorème peut être étendu aux hypersphères des espaces à un nombre impair de dimensions, mais non aux hypersphères des espaces à un nombre pair de dimensions.

Plaçons-nous dans l'espace à n dimensions, et soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les coordonnées d'un point dans cet espace et

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1 \tag{1}$$

l'équation d'une hypersphère. Soient

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_n = 0 \tag{2}$$

les équations de n plans passant par l'origine. Alors $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des polynomes linéaires et homogènes en $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Nous pouvons toujours supposer que l'on a identiquement

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \xi_n. \tag{3}$$

En effet, quels que soient ces polynomes, on pourra trouver n constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ telles que $\sum \lambda_i X_i = \xi_n$; mais comme nous pouvons aussi bien écrire les équations des plans $\lambda_i X_i = 0$, au lieu de $X_i = 0$, nous ne restreignons pas la généralité en supposant que ces constantes sont égales à 1.

Ces n plans (2) divisent la surface de l'hypersphère (1) en 2^n régions, qui se distinguent entre elles par les signes des polynomes X. L'une de ces régions sera le tétraèdre hypersphérique que nous voulons étudier et que j'appelle T; ce sera par exemple celle pour laquelle tous les polynomes X sont positifs.

Mais ce n'est pas tout à fait comme cela que nous opérerons; nous commencerons par diviser l'hypersphère en deux hémisphères par le plan $\xi_n = 0$, et nous envisagerons seulement l'hémisphère $\xi_n > 0$; la surface de cet hémisphère sera partagée en $2^n - 1$ régions seulement; car, en vertu de l'équation (3), tous les X ne peuvent être négatifs si leur somme ξ_n est positive.

Pour distinguer ces régions les unes des autres, nous désignerons chacune d'elles par les indices de ceux des polynomes X qui sont positifs à l'intérieur de cette région. Ainsi la région où les polynomes X_2, X_4, X_5 sont positifs et tous les autres négatifs sera la région 245. Nous appellerons régions R_p celles où p de nos polynomes seront positifs et qui seront désignées par conséquent par p indices. Le nombre total des régions R_p est évidemment

$$\frac{n!}{p!\,\overline{n-p}!}.$$

Il n'y a qu'une seule région R_n qui est le tétraèdre T, il n'y a pas de région R_0. La surface des diverses régions sera évaluée en prenant pour unité la surface de l'hémisphère.

Cela posé, il nous faut définir les angles du tétraèdre; et distinguer parmi eux les angles dièdres ou angles A_2, les angles trièdres ou angles A_3, et plus généralement les angles A_p limités par p plans.

Un angle A_p sera donc l'ensemble des régions où les p polynomes X correspondant aux plans limites de l'angle sont tous positifs, ou tous négatifs. Ce sera la somme des surfaces de ces régions qui sera la mesure de l'angle A_p. Cela revient, pour les angles dièdres par exemple, à prendre π pour unité d'angle.

Les régions R_q faisant partie d'un angle A_p seront celles où les p polynomes X correspondant aux plans limites seront tous positifs ainsi que $q-p$ autres, et celles où ces p polynomes seront tous négatifs ainsi que $n-q-p$ autres. Il y aura donc

$$\frac{\overline{n-p}!}{\overline{n-q}!\,\overline{q-p}!}+\frac{\overline{n-p}!}{q!\,\overline{n-p-q}!}$$

régions R_q dans l'angle A_p. Soit alors μ_p la somme des angles A_p; nous voyons que chaque région R_q figurera

$$\frac{q!}{\overline{q-p}!\,p!}+\frac{\overline{n-q}!}{\overline{n-p-q}!\,p!}$$

fois dans cette somme; d'où

$$\mu_p=\sum_{q=0}^{q=n}\left(\frac{q!}{\overline{q-p}!\,p!}+\frac{\overline{n-q}!}{\overline{n-p-q}!\,p!}\right)\sum R_q, \tag{4}$$

$\sum R_q$ représentant la somme des surfaces de toutes les régions R_q. Posons alors

$$B_q=\sum R_q+\sum R_{n-q}$$

avec

$$B_q=2\sum R_q \qquad \text{pour} \qquad q=\frac{n}{2}.$$

Il résulte de cette définition que

$$B_q=B_{n-q}, \qquad B_n=B_0=T,$$

l'équation (4) peut alors s'écrire :

$$\mu_p=\sum\frac{q!}{\overline{q-p}!\,p!}B_q. \tag{5}$$

Dans cette équation, l'indice p peut prendre les valeurs 2, 3, ..., $n-1$;

nous compléterons donc le tableau des équations (5) en posant

$$(6)\qquad \begin{cases} \mu_0 = B_0 + B_1 + \ldots + B_n = 2, \\ \mu_1 = B_1 + 2B_2 + \ldots + nB_n = n, \\ \mu_n = B_n = T. \end{cases}$$

Toutes ces formules (5) et (6) peuvent se résumer dans l'identité

$$(7)\qquad \sum \mu_p x^p = \sum B_q (x+1)^q = \psi(x).$$

Comme on a $B_q = B_{n-q}$, on aura :

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{-x}{x+1}\right)(x+1)^n$$

ou

$$(8)\qquad \sum \mu_p x^p = \sum \mu_q (-x)^q (x+1)^{n-q},$$

ou, en égalant les coefficients de x^p,

$$(9)\qquad \mu_p = \sum \mu_q (-1)^q \frac{n-q!}{p-q!\,n-p!}.$$

Ces relations peuvent d'ailleurs se mettre sous une autre forme. Posons

$$(10)\qquad n-p!\,\mu_p = \lambda_p, \qquad \sum \lambda_p x^p = \varphi(x),$$

la relation (9) deviendra :

$$(11)\qquad \lambda_p = \sum \lambda_q (-1)^q \frac{1}{p-q!}.$$

Ces relations sont établies pour $p \leqq n$; mais si $p > n$, μ_p devient nul et $n-p!$ infini, de sorte que λ_p est indéterminé. Rien n'empêche alors de supposer que ces relations définissent encore λ_p pour $p > n$. On remarquera que ces relations (11) sont indépendantes de n. Elles peuvent d'ailleurs s'écrire :

$$(12)\qquad \varphi(x) = \varphi(-x)\,e^x,$$

d'où l'on tire :

$$(13)\qquad \varphi(x) = \theta(x^2)\,e^{\frac{x}{2}},$$

$\theta(x^2)$ étant une série quelconque procédant suivant les puissances de x^2. La relation (13) permet de calculer les λ_p et par conséquent les μ_p.

Reprenons l'équation (9) et faisons-y $p = n$. Dans le premier membre, le coefficient de μ_n est 1 et, dans le second membre, $+1$ si n est pair et -1 si n est impair, de sorte que les termes en μ_n se détruisent dans le premier cas et ne se détruisent pas dans le second.

Si donc n est impair, c'est-à-dire dans un espace d'un nombre impair de dimensions, il y a une relation linéaire entre : μ_n, qui représente la surface du tétraèdre hypersphérique T; $\mu_{n-1}, \mu_{n-2}, \ldots, \mu_2$, qui représentent les sommes de ses angles des différents ordres; μ_1 et μ_0, qui sont égaux à n et à 2. C'est la généralisation du théorème sur le triangle sphérique.

Pour passer du tétraèdre hypersphérique au tétraèdre plan, il suffit de supposer ce tétraèdre infiniment petit; c'est ainsi en effet que l'on passe du triangle sphérique au triangle plan. Ainsi, pour avoir la relation entre la somme des angles des différents ordres du tétraèdre plan situé dans l'espace plan à $n - 1$ dimensions, il suffira de prendre l'équation (9) et d'y faire :

$$p = n, \qquad n \text{ impair}, \qquad \mu_n = 0.$$

C'est là la généralisation du théorème sur la somme des angles d'un triangle rectiligne.

Je n'aurais pas développé cette généralisation si je ne poursuivais un but particulier. Ce but, c'est de faciliter la recherche des groupes finis ou discontinus contenus dans un groupe continu donné et en particulier dans le groupe linéaire, et par là l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires. C'est là une théorie à laquelle les beaux travaux de M. Klein et de M. Jordan ont déjà fait faire beaucoup de progrès.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur quelques théorèmes relatifs aux surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure à l'unité.* Note de M. **Émile Picard.**

1. J'ai récemment fait connaître (*Comptes rendus*, 21 novembre 1904) un théorème général sur les surfaces algébriques dont la connexion linéaire est supérieure à *un*. La démonstration que j'ai indiquée met en œuvre une propriété du groupe d'une certaine équation linéaire E. Une seconde démonstration m'a permis d'établir, outre le théorème rappelé, plusieurs autres propositions où figure la différence $p_g - p_n$ entre le genre géomé-