DISCUSSIONS

A PROPOS DE LA LOGISTIQUE

Je me contenterai pour le moment de quelques observations sommaires en réponse à l'article de M. B. Russell. En effet, M. Russell n'expose sa nouvelle théorie (qu'il appelle pas de classes) que d'une façon tout à fait succincte et il a évidemment l'intention de la développer ailleurs. Il vaut mieux attendre la publication de ce développement pour se faire une opinion sur la nouvelle théorie. D'autre part, M. Zermelo va prochainement publier une étude complète sur le même sujet. J'attendrai également, pour répondre définitivement à M. Russell, que j'aie lu le travail de M. Zermelo, car la comparaison des deux théories ne peut être qu'instructive.

Je constate d'abord avec plaisir que nous avons fait l'un et l'autre un pas vers un accord. Qu'on relise, dans l'article de M. Russell, les pages 630 et 631.

La Logistique n'est plus qu'une auxiliaire de l'intuition. Elle a même besoin de l'intuition, non seulement à ses débuts, mais à chaque pas; non seulement pour lui demander des principes nouveaux, mais comme un incessant contrôle, de même qu'une théorie de physique mathématique n'a de valeur que quand elle a été confirmée par l'expérience. Si les logisticiens appliquent leurs règles aveuglément, c'est pour mieux démontrer qu'elles sont fausses, et en cela ils n'ont pas fait une œuvre inutile.

Nous voilà loin des huit notions et des vingt propositions qui renfermaient toute la pensée humaine ou du moins toute la pensée mathématique. Nous voilà loin de l'*Exegi monumentum ære perennius* de M. Couturat (inutile de rappeler aux lecteurs de cette revue que c'est de M. Russell que M. Couturat parlait ainsi). Loin du *Centenaire de la mort de Kant*. Je trouverais même plutôt que M. Russell va un peu trop loin.

D'autre part, M. Russell est d'accord avec moi au sujet du cercle vicieux, source des paradoxes en question.

Je ne veux pas discuter à fond la théorie pas de classes, j'attends pour cela de la mieux connaître; jusqu'ici il ne me semble pas qu'elle ait rendu aux raisonnements de Cantor la rigueur qui leur manque. Mon impression est que M. Russell répète textuellement ce qu'a dit Cantor et se borne, pour calmer ses propres scrupules à s'écrier de temps en temps : Messieurs, n'oublions pas que toutes ces choses dont nous parlons ne sont pas des entités et que nous n'avons pas le droit d'en parler. Mais ce n'est là qu'une impression que la lecture de l'ouvrage définitif modifiera peut-être.

Que dire maintenant du principe d'induction, objet principal du débat? Pour éviter toute espèce de confusion, introduisons deux définitions et une proposition.

Définition A. Un nombre *fini* est un nombre cardinal n tel que $n < n + 1$.

Définition B. Un nombre *inductif* est un nombre qui fait partie de toutes les classes récurrentes.

Proposition C. Tout nombre fini est inductif.

Pour M. Russell, c'est la définition B qui est le principe d'induction, et en partant de cette définition, il a cherché à démontrer la proposition C.

Pour moi, c'est la proposition C qui est le principe d'induction; cette proposition n'est pas une définition et elle est indémontrable (cet énoncé nouveau du principe d'induction n'est pas le même que ceux que j'ai proposés antérieurement; mais il leur est équivalent et il me semble préférable).

A la façon de voir de M. Russell, j'ai objecté que la définition B, pouvant impliquer un cercle vicieux, ne peut être appliquée que sous certaines restrictions, et que ces restrictions ne permettent pas l'emploi qu'il en fait. Que dit maintenant M. Russell? Il observe d'abord que les doutes qu'il a émis lui-même, dans un article précédent, venaient de l'impossibilité d'établir l'axiome multiplicatif (dit de Zermelo). Cela, c'est une autre objection à sa démonstration. Mais la mienne en est-elle moins bonne? Non, sans doute, car M. Russell ajoute : « Son objection, que cette preuve enveloppe un cercle vicieux, est formellement vraie suivant la théorie soutenue ci-dessus. » « Mais, continue M. Russell, ce paralogisme peut être évité si nous admettons une certaine assomption qui est requise pour d'autres raisons, et à laquelle, à ma connaissance, il n'y a pas d'objection sérieuse. »

Je n'ai rien compris à la démonstration modifiée, qui est exposée d'une façon trop succincte; je n'ai même pas compris l'énoncé de l'assomption. Je puis toutefois observer ceci : Cette assomption est un nouvel axiome, et pour qu'il y ait intérêt à le substituer au principe d'induction qu'il s'agit de démontrer, il faut qu'il soit plus directement évident que ce principe; or, est-ce le cas si cet axiome s'énonce:

« Tout énoncé contenant x et une variable apparente est équivalent pour toutes les valeurs de x, à quelque énoncé $\varphi(x)$ ne contenant aucune variable apparente. »

Mais je vous vois venir, vous allez me dire : « Vous aurez toujours besoin de mon assomption, même si vous admettez le principe d'induction; elle seule préservera ce principe du cercle vicieux. »

Non, permettez, c'est la définition B qui contient un cercle vicieux, la proposition C en est exempte, si je la regarde comme un axiome indémontrable, et je puis en faire usage sans difficulté.

Quant au rôle de la croyance à l'infini actuel, je continue à le regarder comme très important. M. Russell cite des exemples de paradoxes où n'interviennent que des nombres finis; l'un d'eux est nouveau et très amusant. Mais dans le cas des classes finies, il est toujours possible de s'en débarrasser, parce qu'on peut faire l'analyse des diverses classes qui figurent dans les propositions en poussant cette analyse jusqu'aux individus et cette analyse complète fera évanouir les contradictions. Si j'ai bien compris la théorie pas de classes, elle consiste précisément à proclamer la nécessité de cette analyse complète.

Mais dans les cas où l'on fait intervenir l'infini actuel, cette analyse complète est impossible, du moins à ce qu'il me semble, et l'on reste exposé à la contradiction.

Un mot pour terminer; je n'ai pas dit qu'il ne serait pas utile d'avoir des notions plus claires en logique, mais que ces notions ne résoudraient pas la question de l'axiome de Zermelo.

Je me bornerai pour le moment à ces remarques sommaires, me réservant de les justifier dans un article plus étendu qui paraîtra quand M. Russell et M. Zermelo auront publié leurs théories avec assez de détails pour qu'on puisse les discuter avec fruit.

H. POINCARÉ.