MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** annonce à l'Académie qu'une souscription est ouverte dans le but d'élever un monument à Pierre-Simon Laplace, qui vit le jour à Beaumont-en-Auge, le 22 mars 1749 et y fut élève de l'École militaire.

Un Comité d'initiative s'est formé dans ce but à Beaumont-en-Auge et un autre à Paris, sous la présidence de M. H. Poincaré.

L'Académie s'associe à l'hommage qui va être rendu à Laplace.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques.* Note de M. **H. Poincaré.**

On sait que MM. Enriques, Castelnuovo et Severi ont récemment mis en évidence la relation qui existe entre le nombre des intégrales de différentielles totales de première espèce attachées à une surface algébrique et les systèmes continus non linéaires de courbes algébriques que l'on peut tracer sur cette surface, et que ce résultat a renouvelé diverses parties de la théorie des surfaces algébriques.

J'ai cherché à retrouver ce théorème par une autre voie, en me plaçant au point de vue transcendant, et j'ai été conduit ainsi à quelques conséquences dignes d'être signalées.

Considérons les sections planes de la surface $f=0$ qui est de degré n par les plans $y=$ const.; soit p le genre de ces sections planes que j'appellerai les courbes K. Soient

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p \tag{1}$$

p intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe K; on aura

$$u_i = \int \frac{R_i\, dx}{f'_z},$$

où R_i est un polynome entier d'ordre $n-3$ en x et z, s'annulant aux points doubles de K. R_i dépend de y, ou, si l'on adopte les coordonnées homogènes x, y, z, t de y et de t, ce sera alors une fonction rationnelle homogène d'ordre $n-2$ en x, y, z, t. Le choix des fonctions rationnelles R_i peut se faire d'une infinité de manières.

Nous dirons qu'une valeur de y ou de $\frac{y}{t}$ est *critique* de la première sorte pour u_i si, pour cette valeur, la forme bilinéaire classique formée avec les parties réelles et imaginaires des périodes s'annule. Dans ce cas R_i s'annule identiquement pour cette valeur de y. Il peut arriver exceptionnellement (par exemple s'il y a un point conique) que R_i s'annule identiquement sans que notre forme bilinéaire s'annule. On a alors une *valeur critique apparente* par opposition aux valeurs critiques effectives. Les valeurs critiques de la seconde sorte seront celles pour lesquelles R_i devient infini.

La condition pour qu'il existe des intégrales de différentielles totales de première espèce, c'est qu'on puisse choisir les fonctions R_i de telle façon qu'il y ait une ou plusieurs intégrales u_i dépourvues de valeurs critiques. Le nombre des intégrales de différentielles totales de première espèce se trouve ainsi rattaché à la différence entre le genre p des sections planes K et le nombre des surfaces d'ordre $n-3$ que l'on peut mener par la courbe double de la surface.

Considérons une courbe algébrique quelconque C tracée sur la surface et supposons que cette courbe algébrique rencontre les sections planes K en m points variables. Faisons la somme des valeurs de u_i pour ces m points, et soit v_i cette somme ; ce sera évidemment une fonction de y, de sorte que la courbe C se trouve caractérisée par p fonctions de y :

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_p.$$

L'étude analytique de ces fonctions permet d'abord de démontrer le théorème de MM. Enriques, Castelnuovo et Severi; elle conduit ensuite à une classification des courbes tracées sur une surface algébrique; on voit que toutes ces courbes peuvent se déduire par une construction simple d'un nombre fini de courbes que l'on peut appeler *courbes primitives*. Pour une surface du troisième ordre, par exemple, il y a six courbes primitives qui sont 6 des 27 droites. Suivant le nombre des valeurs critiques, on peut déterminer le nombre des courbes primitives ou seulement un maximum de ce nombre.

Pour l'étude des systèmes linéaires, il conviendrait d'adjoindre aux intégrales u_i un certain nombre d'intégrales de troisième espèce et de se servir des procédés analytiques employés par Clebsch et Gordan à propos de ce qu'ils appellent *das erweiterte Umkehrproblem*.