

seulement repéré tant bien que mal les points marquants du spectre cométaire, en prolongeant les lignes voisines qui représentent dans l'image ordinaire et dans le spectre le déplacement des étoiles par rapport à la comète. Or deux condensations de l'ultraviolet ont été trouvées voisines des bandes $\lambda 388$ et $\lambda 391,45$ de la comète Morehouse, qui ont été rapportées au cyanogène et à l'azote illuminés électriquement. Mais la mesure est trop peu précise pour permettre aucune conclusion (1).

De plus, le 6, l'image de la comète offrait un noyau à peu près circulaire, duquel se détachaient des rayons courbes, peu brillants, mais nets et comparables aux antennes d'un insecte ou encore aux deux branches d'une fourche à deux dents. La direction de ces rayons est telle qu'il semble difficile de les attribuer à la seule force répulsive émanée du Soleil. Le 7, ces appendices n'étaient plus visibles et, d'une manière générale, l'éclat de la comète paraissait avoir diminué.

En résumé, ces premières observations montrent que la comète a déjà une lumière propre, qui même est due en partie à des gaz incandescents.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE. — *Sur une généralisation de la méthode de Jacobi.*
Note de M. H. POINCARÉ.

On sait que la méthode de la variation des constantes permet de résoudre un problème de Dynamique quand on sait résoudre un autre problème de Dynamique plus simple, mais très peu différent. Mais il est avantageux de résoudre ce problème approché simple par la méthode de Jacobi, afin que les équations conservent la forme canonique. On peut rencontrer pour cela des difficultés, et c'est ce qui m'est arrivé quand j'ai voulu appliquer cette méthode à la théorie de la précession et de la rotation des corps solides; j'ai été ainsi conduit à généraliser un peu la méthode de Jacobi.

Soit un système dynamique à n degrés de liberté, dont la situation est définie par n coordonnées x_i ; nous appellerons T l'énergie cinétique, et U l'énergie potentielle, $T + U = F$ l'énergie totale; nous poserons $y_i = \frac{dT}{dx_i}$

(1) En corrigeant ces épreuves, nous avons sous les yeux un autre spectre semblable de la comète, obtenu le 13 décembre. Le noyau a donné un spectre continu plus intense que les jours précédents; et les condensations ultraviolettes sont plus larges, étant émises évidemment par la luminosité qui, dans les images ordinaires de la comète, entoure le noyau.

et nous aurons les équations canoniques de Hamilton

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dy}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{dF}{dx}.$$

Faisons un changement de variables, en exprimant les x en fonction de $n + n'$ variables nouvelles q_k , en nombre plus grand que celui des degrés de liberté, et posons

$$p_k = \frac{dT}{dq_k}.$$

Nous reconnaitrons qu'on a l'identité

$$(2) \quad \sum y dx = \sum p dq;$$

que les p sont liés par n' relations linéaires, de sorte que n seulement d'entre eux sont indépendants; je les appellerai les p_a ; les autres, que j'appellerai les p_b , seront des fonctions des p_a , des q_a et des q_b . On pourrait se demander alors si T peut s'exprimer en fonction des p et des q ; l'égalité

$$dT = \sum q' dp,$$

qui a lieu quand on regarde les q comme des constantes, nous permet de répondre affirmativement. Donc T et F peuvent s'exprimer en fonctions des p_a , des q_a et des q_b , et l'équation des forces vives peut s'écrire

$$(3) \quad F(p_a, q_a, q_b) = \text{const.}$$

Soit maintenant S une fonction des q_a et des p_b , définie par l'équation aux dérivées partielles

$$(4) \quad F\left(\frac{dS}{dq_a}, q_a, -\frac{dS}{dp_b}\right) = \text{const.},$$

de sorte que

$$(5) \quad p_a = \frac{dS}{dq_a}, \quad q_b = -\frac{dS}{dp_b},$$

et dépendent en outre de n constantes arbitraires y'_i (autant que de degrés de liberté); posons

$$(6) \quad x'_i = \frac{dS}{dy'_i},$$

d'où

$$(7) \quad dS = \sum p_a dq_a - \sum q_b dp_b + \sum x'_i dy'_i.$$

Le second membre de cette égalité est une différentielle exacte, si les p_b

sont regardés comme des variables indépendantes et, *a fortiori*, si les p_b sont supposés liés aux p_a par les relations linéaires dont nous avons parlé. En rapprochant (7) de (2) on voit que

$$(8) \quad dS_1 = \Sigma y dx - \Sigma y' dx'$$

est une différentielle exacte; l'identité (8) nous montre d'abord que S_1 est fonction seulement des x et des x' , et qu'on a

$$(9) \quad y = \frac{dS_1}{dx}, \quad y' = -\frac{dS_1}{dx'}$$

équations qui définissent les x' et les y' en fonctions des x et des y . La relation (8) montre que le changement de variables est canonique et n'altère pas la forme canonique des équations. On aura donc pour le problème approché simple

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dF}{dy'}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF}{dx'}$$

équations qui s'intègrent immédiatement puisque F ne dépend que des y' , et pour le problème complet où F est remplacé par F^* :

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dF^*}{dy'}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF^*}{dx'}$$

Appliquons cette méthode à la théorie de la précession; nous prendrons

$$F^* = T + U, \quad F = T,$$

parce que U est petit par rapport à T . Nous avons trois degrés de liberté, mais nous prendrons $n + n' = 5$ coordonnées analogues à nos variables q , qui seront :

- 1° L'angle φ du plan OPz , passant par l'axe Oz mobile et par un axe arbitraire OP avec le plan Oyz des yz mobiles;
- 2° L'angle ψ de l'axe Oz mobile et de l'axe OP ;
- 3° L'angle χ du plan OPz , avec le plan OPZ qui passe par OP et par l'axe OZ fixe;
- 4° L'angle ω de OP avec OZ ;
- 5° L'angle θ du plan OPZ avec le plan OYZ des YZ fixes.

Les variables p seront

$$\Phi = \frac{dT}{d\varphi}, \quad \Psi = \frac{dT}{d\psi}, \quad G = \frac{dT}{d\chi}, \quad \Omega = \frac{dT}{d\omega}, \quad \Theta = \frac{dT}{d\theta};$$

elles représentent les moments de rotation par rapport à Oz , à une perpen-

diculaire à POz, à OP, à une perpendiculaire à POZ, et enfin à OZ. On peut alors exprimer T en fonction de

$$\varphi, \psi, \theta, \omega, \chi, \Phi, G, \Theta;$$

et, en introduisant notre fonction S et ne faisant pas varier les constantes y'_i , on aura

$$(10) \quad dS = \Phi d\varphi + G d\chi + \Theta d\theta - \psi d\Psi - \omega d\Omega.$$

Il faut alors déterminer Φ, G, Θ, ψ et ω de façon que le second membre de (10) soit une différentielle exacte et que

$$T(\varphi, \psi, \theta, \omega, \chi, \Phi, G, \Theta)$$

se réduise à une constante; la solution doit dépendre de trois constantes arbitraires. On y parviendra en faisant

$$(11) \quad \begin{cases} \psi = \text{const.}, & \omega = \text{const.}, & G = \text{const.}, \\ \Phi = G \cos \psi = \text{const.}, & \Theta = G \cos \omega = \text{const.}; \end{cases}$$

ce qui introduit bien trois constantes arbitraires indépendantes G, Φ et Θ , et qui donne

$$\begin{aligned} S &= \Phi\varphi + G\chi + \Theta\theta - \psi\Psi - \omega\Omega, \\ T &= \frac{G^2}{2A} + \frac{(A-C)\Phi^2}{2AC} \end{aligned}$$

(A et C sont les deux moments d'inertie de la Terre).

Les conditions (11) signifient que OP est l'axe des moments de rotation; et l'on en conclut

$$\Psi = \Omega = 0, \quad S = \Phi\varphi + G\chi + \Theta\theta.$$

Les variables Φ, G, Θ jouent le rôle des y' , donc $\varphi = \frac{dS}{d\Phi}$, χ et θ joueront le rôle des x' ; les six variables forment donc un système canonique; et l'on a pour une fonction $F^* = T + U$ quelconque

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= \frac{dF^*}{dG}, & \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{dF^*}{d\Phi}, & \frac{d\theta}{dt} &= \frac{dF^*}{d\Theta}, \\ \frac{dG}{dt} &= -\frac{dF^*}{d\chi}, & \frac{d\Phi}{dt} &= -\frac{dF^*}{d\varphi}, & \frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{dF^*}{d\theta}; \end{aligned}$$

pour le problème approché simple où $F = T$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} = \frac{dT}{dG} = \frac{G}{A} = \text{const.}, & \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dT}{d\Phi} = \frac{A-C}{2AC} \Phi = \text{const.}, & \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{d\Theta} = 0, \\ \frac{dG}{dt} = -\frac{dT}{d\chi} = 0, & \quad \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dT}{d\varphi} = 0, & \quad \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{dT}{d\theta} = 0. \end{aligned}$$