

SUR LA DIFFRACTION DES ONDES HERTZIENNES.

Par M. H. POINCARÉ (Paris).

Adunanza del 14 novembre 1909.

§ 1.

Équations générales du champ.

Le présent travail a un double but, l'application de la méthode de FREDHOLM aux questions relatives aux ondes hertziennes et l'étude de la diffraction de ces ondes. La pratique de la télégraphie sans fil a démontré que ces ondes, non-seulement contournent des obstacles considérables, mais se propagent à de grandes distances malgré la courbure de la Terre. On a coutume de dire que ces effets extraordinaires de diffraction sont dûs aux grandes longueurs d'onde employées et cela est exact, mais malgré ces grandes longueurs d'onde, le phénomène reste surprenant et mérite d'être étudié de plus près, car il reste permis de se demander si l'explication est suffisante, tant qu'un calcul plus précis n'a pas levé les derniers doutes.

J'emploierai les notations de MAXWELL, mais avec quelques simplifications: 1° Je choisirai les unités de façon que la vitesse de la lumière soit égale à 1. 2° Je supposerai les milieux non-magnétiques, de telle sorte que leur susceptibilité magnétique soit égale à 1, les effets de cette susceptibilité paraissant en tous cas négligeables. 3° Je supposerai que le pouvoir inducteur spécifique est partout égal à 1; car les seuls milieux que nous aurons à envisager sont l'air et les corps conducteurs; à l'intérieur de ces derniers corps les courants de conduction sont tellement prépondérants sur les courants de déplacement que l'on ne sait pas déterminer le pouvoir inducteur; et d'ailleurs, sauf dans une couche superficielle extrêmement mince, le champ est nul.

Nous désignerons donc par F , G , H les composantes du potentiel vecteur; par α , β , γ celles de la force magnétique; par f , g , h celles du déplacement électrique; par u , v , w celles du courant de conduction; par ψ le potentiel scalaire; par ρ la densité électrique, et nous aurons:

$$(1) \quad \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz},$$

$$(2) \quad 4\pi f = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx},$$

$$(3) \quad 4\pi \left(u + \frac{df}{dt} \right) = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},$$

$$(4) \quad \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \rho,$$

$$(5) \quad \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0.$$

Aux équations (1), (2), (3), il faut bien entendu adjoindre celles qu'on en déduit par symétrie.

On remarquera que toutes les quantités sont définies expérimentalement sauf le potentiel vecteur et le potentiel scalaire, et que les équations elles-mêmes ne suffisent pas pour définir complètement ces potentiels. Elles ne cesseront pas en effet d'être satisfaites, si on remplace F , G , H , ψ par

$$F + \frac{d\Phi}{dx}, \quad G + \frac{d\Phi}{dy}, \quad H + \frac{d\Phi}{dz}, \quad \psi - \frac{d\Phi}{dt},$$

Φ étant une fonction arbitraire.

Pour achever de définir ces potentiels, il faut donc se donner une équation complémentaire, c'est la suivante:

$$(6) \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} + \frac{d\psi}{dt} = 0.$$

On obtient ainsi les *potentiels de LORENTZ*. On trouve alors les équations suivantes:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi\rho = \frac{d^2\psi}{dt^2} - \Delta\psi, \\ 4\pi u = \frac{d^2F}{dt^2} - \Delta F, \\ 4\pi \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) = \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \Delta\alpha; \end{array} \right.$$

ce qui permet de représenter ψ , F et α par des *potentiels retardés*, représentation sur laquelle nous reviendrons.

Nous emploierons généralement les potentiels de LORENTZ; et, sauf avis contraire, ce sera toujours d'eux qu'il s'agira; cependant dans certains calculs, nous ferons usage d'autres solutions.

Nous allons encore écrire les équations de MAXWELL dans un système quelconque de coordonnées curvilignes, procédé que M. ABRAHAM a employé avec avantage. Soient x' , y' , z' les nouvelles coordonnées; nous supposons que ces coordonnées soient orthogonales, et que l'élément d'arc ds est donné par l'équation:

$$ds^2 = a^2 dx'^2 + b^2 dy'^2 + c^2 dz'^2.$$

Si, par exemple, il s'agit des coordonnées polaires, de sorte que x' soit le rayon vecteur, y' la colatitude et z' la longitude, on aura:

$$a = 1, \quad b = x', \quad c = x' \sin y'.$$

Nous définirons F' , G' , H' par l'identité :

$$F' dx' + G' dy' + H' dz' = F dx + G dy + H dz,$$

de telle sorte que les composantes du potentiel vecteur suivant les normales aux surfaces $x' = \text{const.}$, $y' = \text{const.}$, $z' = \text{const.}$ soient :

$$\frac{F'}{a}, \quad \frac{G'}{b}, \quad \frac{H'}{c}.$$

Nous définirons de la même manière f' , g' , h' ; α' , β' , γ' ; u' , v' , w' , et nous prendrons

$$\psi = \psi', \quad \rho dx dy dz = \rho' dx' dy' dz', \quad \text{ou} \quad \rho' = \frac{\rho}{abc}.$$

Nous trouverons ainsi les équations suivantes :

$$(1^{\text{bis}}) \quad \alpha' = \frac{a}{bc} \left(\frac{dH'}{dy'} - \frac{dG'}{dz'} \right),$$

$$(2^{\text{bis}}) \quad 4\pi f' = -\frac{dF'}{dt} - \frac{d\psi'}{dx'},$$

$$(3^{\text{bis}}) \quad 4\pi \left(u' + \frac{df'}{dt} \right) = \frac{a}{bc} \left(\frac{d\gamma'}{dy'} - \frac{d\beta'}{dz'} \right),$$

$$(4^{\text{bis}}) \quad \sum \frac{d}{dx'} \left(\frac{f' bc}{a} \right) = \rho',$$

$$(5^{\text{bis}}) \quad \sum \frac{d}{dx'} \left(\frac{\alpha' bc}{a} \right) = 0.$$

Quant à l'équation (6), elle devient :

$$(6^{\text{bis}}) \quad \sum \frac{d}{dx'} \left(\frac{F' bc}{a} \right) + \frac{1}{abc} \frac{d\psi'}{dt} = 0.$$

Vis-à-vis d'oscillations de très grandes fréquences, tout conducteur se comporte comme un conducteur parfait. Ce n'est là qu'une première approximation, et dans une étude récente, M. SOMMERFELD a cherché à se rendre compte de l'écart entre cette approximation et la réalité de la pratique. Nous nous contenterons néanmoins de cette première approximation, et nous regarderons tous nos conducteurs comme parfaits, d'où les conséquences suivantes :

1° A l'intérieur du conducteur le champ électrique est nul :

$$f = g = h = 0.$$

2° On trouve aisément :

$$\frac{d\alpha}{dt} = 4\pi \left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz} \right).$$

Donc à l'intérieur du conducteur $\frac{d\alpha}{dt}$ est nul, c'est-à-dire que, si l'on part du repos, le champ magnétique est nul.

3° Les courants de conduction et l'électricité libre ρ sont localisés à la surface des conducteurs.

4° L'examen des équations montre que les composantes tangentielles de la force électrique, et la composante normale de la force magnétique sont continues. Prenons en effet pour axe des z la normale à la surface du conducteur. Nos quantités, et leurs dérivées par rapport à x et à y seront finies; il ne peut y avoir doute que pour les dérivées par rapport à z . Or on trouve:

$$\frac{dg}{dz} = \frac{dh}{dy} + \frac{1}{4\pi} \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{df}{dz} = \frac{dh}{dx} + \frac{1}{4\pi} \frac{d\beta}{dt}, \quad \frac{d\gamma}{dz} = -\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy},$$

ce qui montre que $\frac{dg}{dz}$, $\frac{df}{dz}$, $\frac{d\gamma}{dz}$ sont finies, c'est-à-dire que f , g , γ sont continues. C. Q. F. D.

Donc à la surface du conducteur, et du côté extérieur, les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface, tandis que les lignes de force magnétique sont tangentes à la surface. Pour voir que la première condition entraîne la seconde, il suffit de se rappeler l'équation

$$\frac{d\gamma}{dt} = 4\pi \left(\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy} \right).$$

5° Considérons encore une normale à la surface, prenons-la pour axe des z , et considérons les parties de cette normale très voisines de son pied; en ces points on aura, d'après ce qui précède,

$$f = g = 0,$$

d'où

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \frac{dh}{dz} = \rho,$$

ou, en intégrant et remarquant qu'à l'intérieur h est nul, et étendant l'intégration à toute l'étendue de la couche superficielle où il y a de l'électricité libre :

$$h = \int \rho dz.$$

Cette intégrale représente la densité superficielle de l'électricité libre, tandis que ρ représente la densité de volume. Cette densité superficielle est donc égale au déplacement électrique en un point très voisin de la surface du côté externe.

6° Considérons l'équation

$$4\pi \left(u + \frac{df}{dt} \right) = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$

et observons que dans la couche superficielle $\frac{df}{dt}$ et $\frac{d\gamma}{dy}$ sont finis, tandis que u et $\frac{d\beta}{dz}$ sont très grands. Intégrons comme dans le cas précédent, et remarquons qu'à l'intérieur β est nul, il viendra :

$$4\pi \int u dz + 4\pi \int \frac{df}{dt} dz = \int \frac{d\gamma}{dy} dz - \beta.$$

Le second terme du premier membre et le premier du second sont négligeables; et il reste :

$$\beta = -4\pi \int u dz$$

et de même :

$$\alpha = 4\pi \int v d\zeta.$$

Or $\int u d\zeta$, $\int v d\zeta$ représentent la densité superficielle des courants de conduction, tandis que u et v en représentent la densité de volume. Donc la force magnétique à la surface, du côté externe, est perpendiculaire au courant de conduction, et lui est proportionnelle.

Nous retrouverons ces deux derniers résultats en parlant des potentiels retardés.

7° Le courant de conduction étant superficiel, le vecteur u , v , w est tangent à la surface.

§ 2.

Les potentiels retardés.

Soit $\varphi(x, y, z, t)$ une fonction quelconque. Considérons les deux points x, y, z (point attiré) et x', y', z' (point attirant); soit

$$r = \sqrt{\sum (x - x')^2}$$

leur distance. L'intégrale

$$(1) \quad \iiint \varphi(x', y', z', t - r) \frac{1}{r} dx' dy' dz',$$

étendue à tout l'espace, s'appellera le *potentiel retardé* de φ et pourra être représentée par la notation

$$V = P(\varphi).$$

Elle satisfera à l'équation suivante (analogue à celle de Poisson):

$$\Delta V - \frac{d^2 V}{dt^2} = -4\pi\varphi.$$

Si alors on se reporte aux équations (7) du § précédent, on voit que ψ , F , G , H , α , β , γ , sont respectivement les potentiels retardés de

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho, \quad u, \quad v, \quad w, \\ \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \quad \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} - \frac{du}{y}. \end{array} \right.$$

Les oscillations auxquelles nous aurons affaire seront toujours, soit des oscillations pendulaires simples, soit des oscillations pendulaires amorties. Cela nous permet de supposer que toutes nos fonctions sont proportionnelles à une exponentielle $e^{i\omega t}$. A la vérité, nous obtenons ainsi une solution imaginaire de nos équations, et cette solution ne saurait directement convenir; mais il est aisé, par un procédé bien connu, d'en déduire une solution réelle correspondant au cas de la nature. Il suffira de conserver

la partie réelle de cette solution imaginaire, qui sera également une solution de nos équations. Dans ces conditions, si la solution imaginaire se présente sous la forme

$$A e^{i\omega t},$$

la partie réelle de ω définit la période, la partie imaginaire de ω définit l'amortissement, le module de A représente l'amplitude de la solution réelle, et son argument en représente la phase.

Si alors φ est proportionnel à $e^{i\omega t}$, l'intégrale (1) peut se mettre sous une nouvelle forme. Soit $d\tau' = dx' dy' dz'$ l'élément de volume qui a son centre de gravité au point attirant. Soit

$$\varphi' = \varphi(x', y', z', t).$$

On aura :

$$\varphi(x', y', z', t - r) = \varphi' e^{-i\omega r}$$

Notre intégrale deviendra alors :

$$(3) \quad P(\varphi) = \int \varphi' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\tau'.$$

C'est alors un potentiel analogue au potentiel newtonien, mais avec une loi d'attraction un peu différente. J'observerai que ce potentiel possède les propriétés essentielles du potentiel newtonien, en ce qui concerne la continuité. Si en effet j'envisage la différence

$$\frac{e^{-i\omega r}}{r} - \frac{1}{r}$$

des deux expressions, correspondant aux deux sortes de potentiels, cette différence reste finie pour $r = 0$.

Mais nous avons encore à tenir compte d'une autre circonstance. Les quantités (2) sont nulles, sauf dans une couche extrêmement mince à la surface des conducteurs.

L'intégrale (3), qui est un potentiel de volume, va donc se transformer en un potentiel de surface.

Désignons par

$$\mu, \quad U, \quad V, \quad W$$

les densités *superficielles* de l'électricité et du courant de conduction. On a alors :

$$\mu = \int \rho dz, \quad U = \int u dz,$$

les intégrales du 2^d membre étant celles qui ont été envisagées à la fin du § précédent.

Nous pouvons alors écrire :

$$\psi = \int \mu' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma', \quad F = \int U' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma',$$

où $d\sigma'$ est l'élément de surface du conducteur ayant pour centre le point attirant, tandis que μ' et U' sont les valeurs de μ et de U en ce point attirant. Les potentiels scalaire et vecteur se présentent ainsi comme des potentiels de simple couche; ils sont donc continus, tandis que leurs dérivées ne le sont pas.

En ce qui concerne la force magnétique, la chose est un peu plus compliquée.

Nous pouvons observer que le courant de conduction étant superficiel, les composantes U , V , W ne sont pas indépendantes; elles sont liées par la relation

$$lU + mV + nW = 0,$$

l , m , n désignant les cosinus directeurs de la normale à la surface du conducteur.

Considérons maintenant le vecteur dont les composantes sont:

$$A = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \quad B = \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \quad C = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy};$$

ce vecteur est nul en dehors de la couche superficielle; il est très grand à l'intérieur de cette couche.

Mais il y a une distinction à faire, la composante normale de ce vecteur est très grande du 1^{er} ordre si nous considérons l'épaisseur de la couche comme très petite du 1^{er} ordre, tandis que les composantes tangentielles sont très grandes du 2^d ordre. Il en résulte que notre potentiel se décompose en un potentiel de double couche et un potentiel de simple couche; c'est ce que nous allons examiner de plus près.

Notre équation peut s'écrire:

$$\alpha = \int A' \theta d\tau',$$

où A' est la valeur de A au point attirant et θ la fonction $\frac{e^{-i\omega r}}{r}$. Soit $d\sigma'$ un élément de la surface du conducteur, une normale au conducteur, ζ' la distance du point attirant à cette surface comptée sur cette normale. Comme ζ' est toujours très petit, nous pourrions supposer que la section droite d'un faisceau très délié de normales est égale à $k d\sigma'$, où $k = \gamma + \zeta'(c_1 + c_2)$, c_1 et c_2 étant les deux courbures principales de la surface, de sorte que

$$d\tau' = k d\sigma' d\zeta'.$$

D'autre part, nous pourrions développer θ suivant les puissances de ζ' et négliger ζ'^2 , ce qui donne:

$$\theta = \theta_0 + \zeta' \frac{d\theta_0}{d\zeta'}$$

et enfin, toujours avec la même approximation,

$$(4) \quad \alpha = \int \left(\int A' d\zeta' \right) \theta_0 k d\sigma' + \int \left(\int A' \zeta' d\zeta' \right) \frac{d\theta_0}{d\zeta'} d\sigma'$$

(et en effet dans le 2^d terme qui est très petit, k peut être remplacé par sa valeur approchée qui est 1).

Cette formule nous apprend que α est la somme de deux potentiels: le premier de simple couche, dont la densité superficielle est $\int k A' d\zeta'$; et le second de double couche, dont la densité superficielle est $\int A' \zeta' d\zeta'$.

Il reste à calculer ces densités, que j'écrirai, en supprimant les accents, $\int k A d\zeta$, $\int A \zeta d\zeta$, en les rapportant ainsi au point x , y , z ; nous aurons aussi à calculer les quantités correspondants $\int k B d\zeta$, etc. relatives à β et γ .

Occupons-nous d'abord du potentiel de simple couche, et par conséquent cherchons à évaluer en un point donné de la surface le vecteur

$$(5) \quad \int k A d\zeta, \quad \int k B d\zeta, \quad \int k C d\zeta.$$

Supposons pour un instant que nous ayons pris pour axes des x et des y les tangentes aux lignes de courbure et pour axe des z la normale au point considéré, de telle sorte que $d\zeta = dz$ tout le long de la normale considérée. Nous trouverons d'abord :

$$\int k C d\zeta = \int C d\zeta = \int \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) dz = \frac{d}{dx} \int v dz - \frac{d}{dy} \int u dz = \frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}.$$

En effet, on a au point considéré $\int v dz = \int v d\zeta = V$; en est-il encore de même en un point infiniment voisin, ainsi qu'il est nécessaire pour qu'on ait le droit de différentier par rapport à x ? On a $d\zeta = dz \cos \varepsilon$, ε étant l'angle des deux normales; cet angle étant très petit, on a encore $d\zeta = dz$ à des infiniment petits près du 2^d ordre. Les valeurs de v en deux points correspondants diffèrent très peu, la formule subsiste. Les dérivées prises par rapport à x et à y sont très grandes seulement du 1^{er} ordre, les dérivées par rapport à z sont du 2^d ordre. Cela, à cause de la petitesse de ζ , nous permet de faire $k = 1$, dans tous les termes qui ne contiennent pas de dérivée par rapport à z .

Comme U , V , W n'existent qu'à la surface du conducteur, leurs dérivées sont prises en les supposant exprimées en fonctions de x et de y , regardées comme variables indépendantes, tandis que z est regardée comme une fonction de x et de y définie par l'équation de la surface du conducteur. Si l'on veut une définition indépendante du choix des axes, j'écrirai l'égalité

$$\int (U dx + V dy + W dz) = \int v d\sigma.$$

La 1^{ère} intégrale est étendue à une courbe fermée quelconque tracée sur la surface du conducteur, et la seconde à tous les éléments d'aire $d\sigma$ de la portion de cette surface limitée par cette courbe; cette équation définit la quantité v en chaque point de la surface. On voit alors que la composante du vecteur (5) normale à la surface est égale à v .

Passons aux composantes tangentielles et prenons d'abord :

$$\int k A d\zeta = \int k A dz = \int \frac{dw}{dy} dz - \int k \frac{dv}{dz} dz = \int \frac{dw}{dy} dz - \int \frac{dv}{dz} dz - (c_1 + c_2) \int \frac{dv}{dz} z dz.$$

La 2^{de} intégrale du 3^e membre est nulle, et en effet l'intégrale indéfinie se réduit à v et s'annule aux deux limites, c'est-à-dire en dehors de la couche superficielle.

Quant à la 1^{ère}, elle se réduit à

$$\frac{dW}{dy}$$

en vertu du même raisonnement que plus haut; mais on a trouvé plus haut

$$lU + mV + nW = 0$$

et au point considéré on a

$$l = m = W = 0, \quad n = 1.$$

Si nous différencions cette équation par rapport à y , puis, qu'après la différentiation, nous fassions $l = m = W = 0$, $n = 1$, il reste:

$$\frac{dW}{dy} = -U \frac{dl}{dy} - V \frac{dm}{dy}.$$

Il reste donc pour les composantes cherchées:

$$\begin{aligned} \int k A d\zeta &= -U \frac{dl}{dy} - V \frac{dm}{dy} - (c_1 + c_2) \int \frac{dv}{d\zeta} \zeta d\zeta, \\ \int k B d\zeta &= U \frac{dl}{dx} + V \frac{dm}{dx} + (c_1 + c_2) \int \frac{du}{d\zeta} \zeta d\zeta. \end{aligned}$$

Nous trouverons plus loin

$$\int \frac{dv}{d\zeta} \zeta d\zeta = -V,$$

et nous avons d'ailleurs

$$\frac{dl}{dy} = 0, \quad \frac{dm}{dy} = c_2,$$

il restera donc

$$\int k A d\zeta = c_1 V,$$

et de même

$$\int k B d\zeta = -c_2 U.$$

Avec des axes quelconques, nous trouverons pour la densité de la simple couche qui figure dans l'équation (4):

$$h_1 U + h_2 V + h_3 W + h_4 v,$$

les h étant des coefficients dépendant, en chaque point de la surface, des deux courbures principales et de l'orientation de la normale et des tangentes aux lignes de courbure.

Si, en effet,

$$l_1, m_1, n_1; \quad l_2, m_2, n_2; \quad l, m, n$$

sont les cosinus directeurs des deux tangentes aux lignes de courbure et de la normale, on aura:

$$\begin{aligned} h_1 &= l_1 l_2 (c_1 - c_2), \\ h_2 &= c_1 l_1 m_2 - c_2 l_2 m_1, \\ h_3 &= c_1 l_1 n_2 - c_2 l_2 n_1, \\ h_4 &= l. \end{aligned}$$

On voit que ces coefficients restent finis partout, si les courbures restent finies. On pourrait éliminer l'une des trois quantités U , V , W de cette expression, à l'aide de l'équation $lU + mV + nW = 0$.

Passons au potentiel de double couche, c'est-à-dire au vecteur :

$$\int A\zeta d\zeta, \quad \int B\zeta d\zeta, \quad \int C\zeta d\zeta.$$

Prenons encore la normale pour axe des ζ ; il viendra :

$$\int A\zeta d\zeta = \int A\zeta d\zeta = \int \frac{dw}{dy} \zeta d\zeta - \int \frac{dv}{d\zeta} \zeta d\zeta.$$

La première intégrale du 3^e membre est négligeable à cause de la petitesse de ζ dans la couche superficielle; pour la 2^{de} (qu'on ne peut plus négliger parce qu'il y figure une dérivée prise par rapport à ζ) on trouve, en intégrant par parties,

$$- \int \frac{dv}{d\zeta} \zeta d\zeta = \int v d\zeta = V.$$

On trouverait de même :

$$\int B\zeta d\zeta = -U, \quad \int C\zeta d\zeta = \int \frac{dv}{dx} \zeta d\zeta - \int \frac{du}{dy} \zeta d\zeta = 0.$$

Les trois composantes de notre vecteur sont donc

$$(6) \quad V, \quad -U, \quad 0.$$

Et, avec des axes quelconques, la densité de la double couche qui figure dans l'équation (4) est

$$nV - mW.$$

Géométriquement, le vecteur (6) est tangent à la surface du conducteur et perpendiculaire au courant.

On sait que le potentiel d'une double couche présente une discontinuité sur la surface du conducteur, tandis que sa dérivée normale est continue; au contraire le potentiel d'une simple couche est continu, et sa dérivée normale discontinue.

Il est aisé d'estimer la valeur de ces discontinuités.

Le champ magnétique étant nul à l'intérieur, cela nous permet d'évaluer ce champ pour des points très voisins de la surface, mais du côté externe. En ce qui concerne d'abord le champ lui-même, c'est-à-dire α , β , γ , il suffira d'envisager le potentiel de double couche; α , β , γ seront égaux, au facteur 4π près, aux densités correspondantes de la double couche. Si donc on prend pour axe des ζ la normale au point considéré, on aura :

$$\alpha = 4\pi V, \quad \beta = -4\pi U, \quad \gamma = 0,$$

résultat déjà obtenu au § précédent.

Considérons maintenant les dérivées normales de α , β , γ , c'est-à-dire $\frac{d\alpha}{d\zeta}$, $\frac{d\beta}{d\zeta}$, $\frac{d\gamma}{d\zeta}$; elles seront égales, au facteur 4π près, aux densités correspondantes de la simple couche, d'où

$$\frac{d\alpha}{d\zeta} = -4\pi c_1 V, \quad \frac{d\beta}{d\zeta} = 4\pi c_2 U, \quad \frac{d\gamma}{d\zeta} = -4\pi v,$$

et on a en effet :

$$\frac{d\alpha}{d\zeta} = \frac{d\gamma}{dx}, \quad \frac{d\beta}{d\zeta} = \frac{d\gamma}{dy},$$

parce que les composantes tangentielles f et g sont nulles à la surface. Or on a

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

parce que, à la surface, la force magnétique est tangentielle; d'où, en différentiant et remarquant qu'au point considéré $l = m = \gamma = 0$, $n = 1$:

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\alpha \frac{dl}{dx} - \beta \frac{dm}{dx}, \quad \frac{d\gamma}{dy} = -\alpha \frac{dl}{dy} - \beta \frac{dm}{dy},$$

ou

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\alpha c_1, \quad \frac{d\gamma}{dy} = -\beta c_2;$$

d'où enfin, en se rappelant les expressions de α et β ,

$$\frac{d\alpha}{d\zeta} = -4\pi c_1 V, \quad \frac{d\beta}{d\zeta} = 4\pi c_2 U.$$

On trouve, d'autre part,

$$\frac{d\gamma}{d\zeta} = -\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}.$$

Or nous avons à la surface du conducteur, en un point quelconque,

$$\alpha = 4\pi(nV - mW),$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{d\alpha}{dx} = 4\pi \left(V \frac{dn}{dx} + n \frac{dV}{dx} - m \frac{dW}{dx} - W \frac{dm}{dx} \right).$$

Mais au point considéré :

$$\frac{dn}{dx} = m = W = 0, \quad n = 1,$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{dx} = 4\pi \frac{dV}{dx};$$

et de même :

$$\frac{d\beta}{dy} = -4\pi \frac{dU}{dy}.$$

Il reste donc

$$\frac{d\gamma}{d\zeta} = -4\pi \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy} \right) = -4\pi v \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Passons au potentiel qui donne ψ , et qui est un potentiel de simple couche dont la densité est μ . Considérons la composante normale de la force électrique; elle est donnée par la formule

$$4\pi h = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{d\zeta}$$

et elle doit être égale du côté externe à $4\pi\mu$; le saut brusque subi par les potentiels du 2^d membre doit donc être égal à $4\pi\mu$; le premier terme $-\frac{dH}{dt}$ est un potentiel

de simple couche qui ne subit pas de saut brusque; quant au second terme $-\frac{d\psi}{dz}$ c'est la dérivée normale d'un potentiel de simple couche de densité μ ; le saut brusque qu'il subit en valeur absolue est $4\pi\mu$.
C. Q. F. D.

§ 3.

Le problème de Fredholm pour les corps de révolution.

Supposons que nous ayons deux conducteurs que j'appellerai le *conducteur extérieur* et le *conducteur intérieur*; le premier engendrera le *champ extérieur* et l'autre le *champ intérieur*; nous réservons les notations

$$\psi, F, G, H, f, \dots$$

pour les quantités *relatives au champ intérieur*; nous désignerons par

$$\psi^*, F^*, G^*, H^*, f^*, \dots$$

les quantités correspondantes relatives au champ extérieur, et par

$$\psi + \psi^*, F + F^*, \dots$$

les quantités relatives au champ total. Si alors, comme dans le § précédent, nous représentons ces quantités par des potentiels retardés, les intégrales qui expriment ces quantités devront être étendues à la surface du conducteur intérieur seulement en ce qui concerne le champ intérieur $\psi, F, \dots$; à la surface du conducteur extérieur seulement en ce qui concerne le champ extérieur, $\psi^*, F^*, \dots$; et enfin à la surface des deux conducteurs en ce qui concerne le champ total.

Dans le problème de la réception des signaux, le conducteur extérieur est l'excitateur, le conducteur intérieur est le récepteur; le champ extérieur doit être regardé comme donné, ainsi que la constante ω , et c'est le champ intérieur qu'il s'agit de déterminer.

Dans le problème de l'émission des signaux, il n'y a qu'un seul conducteur, qui est l'excitateur, et qui sera regardé comme le conducteur intérieur. Le champ extérieur est nul, et nous devons déterminer à la fois ω et le champ intérieur.

Enfin, dans le problème de la diffraction, le conducteur extérieur est l'excitateur, le conducteur intérieur est le corps diffringent; le champ extérieur est donné ainsi que la constante ω , et c'est encore le champ intérieur qu'il s'agit de déterminer.

Nous allons chercher à ramener ces différents problèmes à la résolution d'une équation intégrale de FREDHOLM. Mais nous traiterons d'abord le cas où tous les conducteurs sont des corps de révolution autour d'un même axe, et où le champ présente aussi la même symétrie, de telle sorte que les lignes de force magnétique soient des cercles dans des plans perpendiculaires à l'axe, tandis que les lignes de courant et les lignes de force électrique sont dans des plans méridiens.

Écrivons qu'en un point très voisin de la surface du conducteur intérieur, et du

côté interne, la composante normale de la force électrique est nulle. Cette composante normale, en ce qui concerne le champ intérieur, est

$$-l \frac{dF}{dt} - m \frac{dG}{dt} - n \frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dn},$$

en désignant par l, m, n les cosinus directeurs de la normale et par $\frac{d\psi}{dn}$ la dérivée prise selon la normale. Quant à la composante normale du champ extérieur, elle doit être regardée comme connue, et nous la désignerons par N , de sorte que notre équation s'écrit :

$$l \frac{dF}{dt} + m \frac{dG}{dt} + n \frac{dH}{dt} + \frac{d\psi}{dn} = N.$$

Or on a

$$\frac{dF}{dt} = i\omega F$$

et d'autre part F est un potentiel retardé de simple couche, de densité U , et que je puis désigner par $P(U)$ en employant la notation du § précédent. Notre équation devient donc :

$$(1) \quad i\omega[lP(U) + mP(V) + nP(W)] + \frac{d}{dn}P(\mu) = N,$$

où $P(U), P(V), P(W)$ sont des potentiels de simple couche qui sont représentés par des intégrales définies; un peu plus d'attention doit être prêtée au terme $\frac{d\psi}{dn}$; nous avons en effet

$$\psi = \int \mu' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma'.$$

On trouve d'ailleurs

$$(2) \quad \frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} = \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-i\omega r}}{r} \right) \cos \xi,$$

ξ étant l'angle du rayon vecteur r avec la normale au point attiré; mais en vertu des propriétés connues des potentiels de simple couche, nous n'avons pas le droit d'écrire simplement :

$$\frac{d\psi}{dn} = \int \mu' \frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma'.$$

Nous devons écrire, du côté interne,

$$\frac{d\psi}{dn} = \int \mu' \frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' - 2\pi\mu$$

et du côté externe

$$\frac{d\psi}{dn} = \int \mu' \frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + 2\pi\mu.$$

Notre équation devient donc

$$(3) \quad i\omega \sum lP(U) - 2\pi\mu + \int \mu' \frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' = N.$$

Sans la présence du 1^{er} terme, elle aurait immédiatement la forme d'une équation de

FREDHOLM; car N est une fonction donnée, μ est la fonction inconnue et l'expression $\frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r}$ est une fonction connue de x, y, z, x', y', z' qui jouerait le rôle de *noyau*.

Quant au terme $i\omega \sum lP(U)$, il se présente bien sous la forme d'une intégrale analogue à celles de FREDHOLM, mais où figurent, à la place de la fonction inconnue μ' , d'autres fonctions inconnues U', V', W' ; il s'agit de la transformer de façon à n'avoir plus d'autre fonction inconnue que μ' .

C'est ici qu'intervient la symétrie particulière du champ. Soit s l'arc de méridien compté depuis le pôle jusqu'au point x, y, z ; soit R le rayon du parallèle correspondant, et φ la longitude du point x, y, z ; soient s', R' et φ' les quantités correspondantes pour le point x', y', z' .

Soit

$$J^2 = U^2 + V^2 + W^2,$$

de telle sorte que

$$U = J \frac{dx}{ds}, \quad V = J \frac{dy}{ds}, \quad W = J \frac{dz}{ds}.$$

Le courant qui traversera le parallèle de rayon R sera alors $2\pi JR$; d'autre part, à cause de la symétrie du champ, J et μ ne dépendront que de s et pas de φ . L'équation de continuité nous donnera:

$$(4) \quad \frac{dJR}{ds} = R \frac{d\mu}{dt} = i\omega \mu R.$$

D'ailleurs il vient

$$\sum lF = \sum lP(U) = \int \sum lU' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' = \int J' \frac{e^{-i\omega r}}{r} \sum l \frac{dx'}{ds'} d\sigma'.$$

Posons

$$\sum l \frac{dx'}{ds'} = \cos \theta,$$

de telle sorte que θ soit l'angle de la normale au point attiré avec la tangente au méridien au point attirant, et remarquons que

$$d\sigma' = R' ds' d\varphi';$$

il viendra

$$\sum lF = \int J' R' \cos \theta \frac{e^{-i\omega r}}{r} ds' d\varphi'.$$

Introduisons une fonction L définie par l'équation

$$(5) \quad \frac{dL}{ds'} = \cos \theta \frac{e^{-i\omega r}}{r},$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\sum lF = \int J' R' \frac{dL}{ds'} ds' d\varphi' = [J' R' L] - \int L \frac{dJ' R'}{ds'} ds' d\varphi'.$$

La partie toute connue s'annule aux deux limites; et en effet les deux limites correspondent aux deux pôles où $R' = 0$; il reste donc, en tenant compte de l'équation (4),

$$(6) \quad \sum lF = -i\omega \int L \mu' R' ds' d\varphi' = -i\omega \int L \mu' d\sigma'.$$

L'équation (3) devient ainsi:

$$(7) \quad \int \mu' d\sigma' \left[\frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} + \omega^2 L \right] - 2\pi\mu = N$$

et elle a la forme d'une équation de FREDHOLM.

L'équation (5) ne définit L qu'à une fonction arbitraire près $f(s, \varphi, \varphi')$; si on change L en $L + f(s, \varphi, \varphi')$, le 1^{er} membre de (7) augmente de

$$(8) \quad \omega^2 \int \mu' f(s, \varphi, \varphi') d\sigma' = \omega^2 \int d\varphi' f(s, \varphi, \varphi') \left[\int R' \mu' ds' \right].$$

Mais la charge totale du conducteur est nulle, on a donc

$$\int \mu' d\sigma' = 0$$

et, comme μ' est indépendant de φ' ,

$$\int R' \mu' ds' = 0.$$

L'expression (8) est donc toujours nulle comme il convient.

Pour montrer que la méthode de FREDHOLM est applicable à l'équation (7), il suffit d'établir que le noyau

$$\frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} + \omega^2 L$$

ne peut devenir infini que pour $r=0$, et seulement du 1^{er} ordre. On a

$$\frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} = \cos \xi \frac{d}{dr} \frac{e^{-i\omega r}}{r} = \cos \xi \left[-i\omega - \frac{1}{r} \right] \frac{e^{-i\omega r}}{r}.$$

Cette expression ne peut devenir infinie que pour $r=0$; à la vérité $\frac{d}{dr} \frac{e^{-i\omega r}}{r}$ est infinie du 2^d ordre, mais alors $\cos \xi$ s'annule, de sorte que $\frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r}$ est infinie seulement du 1^{er} ordre.

Le second membre de l'équation (5)

$$\cos \theta \frac{e^{-i\omega r}}{r}$$

ne pourrait non plus devenir infini que pour $r=0$; mais si $r=0$, on a aussi $\cos \theta=0$, parce que la tangente au méridien est perpendiculaire à la normale, de sorte que le produit reste fini. Donc $\frac{dL}{ds'}$ et par conséquent L restent finis. Notre noyau remplit donc bien les conditions exigées.

Sous la forme (7) l'intégrale de FREDHOLM est une intégrale double; mais il est aisé de passer à une intégrale simple et écrire l'équation (7) sous la forme

$$(9) \quad \int \mu' k ds' - 2\pi\mu = N,$$

où le noyau k est défini par l'intégrale

$$k = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} + \omega^2 L \right) R' d\varphi'.$$

§ 4.

Le problème de Fredholm pour le cas général.

Les formules précédentes ne s'appliqueraient plus dans le cas général; si le champ n'est pas de révolution, le plus simple est de se servir des potentiels retardés qui expriment la force magnétique.

Je vais prendre comme inconnue le vecteur U, V, W ; cela ne fait en réalité que deux inconnues, puisque les trois composantes sont liées par la relation $\sum l U = 0$. J'obtiendrai deux équations en écrivant que, en un point infiniment voisin de la surface du conducteur et du côté interne, les deux composantes tangentielles de la force magnétique sont nulles.

Soit x, y, z le point attiré très voisin de la surface et du côté interne. Si l_1, m_1, n_1 , et l_2, m_2, n_2 sont en ce point les cosinus directeurs des deux tangentes aux lignes de courbure, on devra avoir :

$$\sum l_1 \alpha = 0, \quad \sum l_2 \alpha = 0.$$

Or nous avons vu que α, β, γ peuvent s'exprimer par des potentiels de double et de simple couche, et que l'on a par exemple :

$$\alpha = \int (n' V' - m' W') \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + \int (C_1 l'_1 \sum l'_2 U' - C_2 l'_2 \sum l'_1 U') \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + \int l' v' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma'.$$

Dans cette formule $l', m', n', l'_1, \dots, U', \dots$ représentent ce que deviennent $l, m, n, \dots$ au point attirant; de même pour C_1 et C_2 ; la dérivée

$$\frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r}$$

représente la dérivée estimée suivant la normale au point attirant.

Ceci permet d'écrire :

$$(I) \quad \sum l_1 \alpha = \int \sum k_i U' \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + \int \sum k'_i U' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + \int v' \cos \theta \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma',$$

où j'écris, par exemple,

$$\sum k_i U' = k_1 U' + k_2 V' + k_3 W', \quad \sum k'_i U' = k'_1 U' + k'_2 V' + k'_3 W'$$

avec

$$k_i = m' n_i - n' m_i, \quad k'_i = C_1 l'_2 \sum l'_1 l'_i - C_2 l'_1 \sum l'_i l'_2,$$

$k_2, k_3; k'_2, k'_3$ se déduisant de k_1 et de k'_1 en permutant circulairement $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l'_1, m'_1, n'_1; l'_2, m'_2, n'_2; l', m', n'$.

D'autre part

$$\cos \theta = \sum l_i l'_i,$$

de sorte que θ est l'angle de la normale au point attirant avec la tangente à la ligne de courbure au point attiré.

Quand le point x, y, z se rapproche indéfiniment de la surface, on sait, d'après les propriétés du potentiel de double couche, qu'on ne peut plus représenter simplement ce potentiel par l'intégrale

$$\int \delta' \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma',$$

où δ' est la densité de la double couche, mais qu'il faut écrire du côté externe:

$$\int \delta' \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + 2\pi\delta$$

et du côté interne:

$$\int \delta' \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' - 2\pi\delta.$$

Ici

$$\delta' = \sum k_i U'$$

et, comme au point attiré k_1, k_2, k_3 se réduisent à l_2, m_2, n_2 ,

$$\delta = \sum l_2 U.$$

Nous devons donc compléter le 1^{er} terme du 2^d membre de (1) en ajoutant le terme $-2\pi \sum l_2 U$ qui représente $-2\pi\delta$.

L'équation que nous voulons écrire est que, pour le champ total, la composante de notre force magnétique est nulle; ce qui donne

$$\sum l_i \alpha = - \sum l_i \alpha^*,$$

de sorte que nous trouvons:

$$(2) - \sum l_i \alpha^* = -2\pi \sum l_2 U + \int \sum k_i U' \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + \int \sum k'_i U' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + \int v' \cos \theta \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma'.$$

Sans le dernier terme, cette équation aurait immédiatement la forme d'une équation de FREDHOLM; car le champ extérieur étant donné, le premier membre $-\sum l_i \alpha^*$ est une fonction connue.

On obtiendra une seconde équation (2^{bis}) en changeant $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2$ en $l_2, m_2, n_2; -l_1, -m_1, -n_1$.

Il nous reste donc à transformer le dernier terme de (2). Pour nous rendre compte de la façon de faire cette transformation, considérons d'abord une portion de surface plane; on a alors

$$v' = \frac{dV'}{dy'} - \frac{dU'}{dx'}$$

et si je pose

$$\Phi = \cos \theta \frac{e^{-i\omega r}}{r}$$

l'intégrale à envisager est

$$\int \left(\frac{dV'}{dy'} - \frac{dU'}{dx'} \right) \Phi dx' dy'.$$

En intégrant par parties, je trouve que cette intégrale est égale à

$$\int \Phi (U' dx' + V' dy') - \int \left(U' \frac{d\Phi}{dx'} + V' \frac{d\Phi}{dy'} \right) dx' dy'.$$

La première intégrale est une intégrale de ligne étendue au contour qui enveloppe l'aire considérée; la seconde est une intégrale de surface. Cette formule se généralise pour une portion de surface courbe quelconque et l'on trouve:

$$(3) \quad \int \Phi v' d\sigma' = \int \Phi (U' dx' + V' dy' + W' dz') - \int \left(U' \frac{d\Phi}{dx'} + V' \frac{d\Phi}{dy'} + W' \frac{d\Phi}{dz'} \right) d\sigma'.$$

Cette formule demande quelques explications; la fonction Φ n'est définie que sur la surface du conducteur, de sorte que les trois dérivées partielles de Φ n'auraient aucun sens sans une convention spéciale. Je supposerai donc que la fonction Φ conserve la même valeur tout le long d'une normale à la surface du conducteur, ce qui achève de définir Φ dans tout l'espace. Dans ces conditions le vecteur $\frac{d\Phi}{dx'}, \frac{d\Phi}{dy'}, \frac{d\Phi}{dz'}$ est tangent à la surface du conducteur; il est normal aux courbes $\Phi = \text{const.}$ (en regardant x', y', z' comme les variables); en grandeur il est égal à $\frac{d\Phi}{d\rho}$, $d\rho$ étant une longueur très petite prise sur le vecteur lui-même.

Si nous appliquons l'équation (3) à une surface fermée, l'intégrale de ligne est nulle, et le 2^d membre se réduit à son 2^d terme. L'équation (2) prend alors la forme:

$$(4) \quad \begin{cases} -\sum l_1 \alpha^* = -2\pi \sum l_2 U + \int \sum k_1 U' \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' \\ \quad + \int \sum k'_1 U' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' - \int \sum \frac{d\Phi}{dx'} U' d\sigma' \end{cases}$$

et il faut y adjoindre une autre équation (4^{bis}) qui se déduirait de la même façon de (2^{bis}).

Ces équations ont immédiatement la forme de FREDHOLM. On peut: ou bien exprimer U, V, W , et de même U', V', W' , à l'aide de deux quantités seulement en se servant de l'équation $\sum lU = \sum l'U' = 0$; ou bien conserver trois inconnues et adjoindre à (4) et (4^{bis}) l'équation

$$(5) \quad \sum lU = 0.$$

Il me reste à faire voir que les noyaux satisfont bien aux conditions de FREDHOLM. D'abord ils ne peuvent devenir infinis que pour $r = 0$ et, pour savoir de quel ordre, nous devons distinguer les trois derniers termes de l'équation (4). Dans le second terme nous avons en facteur

$$\frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} = \cos \xi' \frac{d}{dr} \frac{e^{-i\omega r}}{r},$$

où ξ' est l'angle du rayon vecteur avec la normale au point attirant. Pour $r = 0$ $\frac{d}{dr} \frac{e^{-i\omega r}}{r}$ devient infini du 2^d ordre, mais $\cos \xi'$ s'annule, de sorte que notre noyau n'est infini que du 1^{er} ordre.

Dans le 3^e terme nous avons en facteur $\frac{e^{-i\omega r}}{r}$ qui est infini du 1^{er} ordre seulement. Dans le 4^e terme, nous avons les dérivées de Φ qu'il nous reste à examiner; on trouve

$$\frac{d\Phi}{dx'} = \frac{e^{-i\omega r}}{r} \frac{d \cos \theta}{dx'} + \cos \theta \frac{d}{dx'} \frac{e^{-i\omega r}}{r}.$$

Le premier terme est infini du 1^{er} ordre, dans le second le facteur

$$\frac{d}{dx'} \frac{e^{-i\omega r}}{r}$$

est infini du 2^d ordre, mais $\cos \theta$ s'annule quand le point attiré et le point attirant se confondent, de sorte que le produit n'est que du 1^{er} ordre.

Tous nos noyaux sont donc du 1^{er} ordre, de sorte que les conditions exigées sont bien remplies.

On pourrait transformer les équations de façon à prendre pour inconnues μ et ν , et non plus U , V , W ; on se rapprocherait ainsi de la forme de solution qui convient au cas des corps de révolution.

§ 5.

Étude d'une solution particulière.

Reprenons les équations (1^{bis}) etc. du § 1 et supposons que les coordonnées choisies soient les coordonnées polaires, de telle façon que l'on ait:

$$a = 1, \quad b = x', \quad c = x' \sin y'.$$

Nous pourrions alors (à la condition de ne pas nous astreindre à prendre pour potentiel vecteur le potentiel de LORENTZ) satisfaire aux équations en faisant

$$G' = H' = 0, \quad \alpha' = \beta' = 0, \quad h' = 0, \quad \frac{d}{dz'} = 0.$$

Les équations, en dehors des conducteurs, se réduiront alors à

$$(1) \quad \gamma' = -\frac{c}{ab} \frac{dF'}{dy'} = -\sin y' \frac{dF'}{dy'},$$

$$(2) \quad 4\pi f' = -\frac{dF'}{dt} - \frac{d\psi'}{dx'},$$

$$(2^{\text{bis}}) \quad 4\pi g' = -\frac{d\psi'}{dy'},$$

$$(3) \quad 4\pi \frac{df'}{dt} = \frac{a}{bc} \frac{d\gamma'}{dy'} = \frac{1}{x'^2 \sin y'} \frac{d\gamma'}{dy'},$$

$$(3^{\text{bis}}) \quad 4\pi \frac{dg'}{dt} = -\frac{b}{ac} \frac{d\gamma'}{dx'} = -\frac{1}{\sin y'} \frac{d\gamma'}{dx'},$$

$$(4) \quad \frac{d}{dx'}(f' x'^2 \sin y') + \frac{d}{dy'}(g' \sin y') = 0.$$

De (2^{bis}) , (3^{bis}) et (1) nous tirons:

$$4\pi \frac{dg'}{dt} = -\frac{d^2\psi'}{dy' dt} = -\frac{1}{\sin y'} \frac{d\gamma'}{dx'} = \frac{1}{\sin y'} \frac{d}{dx'} \left(\sin y' \frac{dF'}{dy'} \right) = \frac{d^2 F'}{dx' dy'}.$$

L'égalité

$$(5) \quad -\frac{d^2\psi'}{dy' dt} = \frac{d^2 F'}{dx' dy'}$$

nous conduit à admettre la suivante:

$$(6) \quad \frac{dF'}{dx'} + \frac{d\psi'}{dt} = 0,$$

ce qui montre que l'équation (6^{bis}) du § 1 reste vraie, *en dehors des conducteurs*, comme pour le potentiel de LORENTZ, bien que notre potentiel vecteur ne soit pas en général celui de LORENTZ, parce que l'équation cesse d'être vraie sur les conducteurs. Quoi qu'il en soit (2) et (3) nous donnent respectivement, en tenant compte de (6) et de (1),

$$4\pi \frac{df'}{dt} = -\frac{d^2 F'}{dt^2} - \frac{d^2\psi'}{dx dt} = -\frac{d^2 F'}{dt^2} + \frac{d^2 F'}{dx'^2},$$

$$4\pi \frac{df'}{dt} = \frac{1}{x'^2 \sin y'} \frac{d\gamma'}{dy'} = -\frac{1}{x'^2 \sin y'} \frac{d}{dy'} \left(\sin y' \frac{dF'}{dy'} \right);$$

d'où

$$(7) \quad \frac{d^2 F'}{dx'^2} - \frac{d^2 F'}{dt^2} = -\frac{\cotg y'}{x'^2} \frac{dF'}{dy'} - \frac{1}{x'^2} \frac{d^2 F'}{dy'^2}.$$

Je veux satisfaire à cette équation en prenant pour F' le produit d'une fonction de x' par une fonction de y' , et pour cela il faut égaler les deux membres de (7) à $\frac{KF'}{x'^2}$, K étant une constante. On trouve ainsi les deux équations:

$$(8) \quad \omega^2 F' + \frac{d^2 F'}{dx'^2} = \frac{KF'}{x'^2},$$

$$(9) \quad \cotg y' \frac{dF'}{dy'} - \frac{d^2 F'}{dy'^2} = KF',$$

en nous rappelant que $\frac{d^2 F'}{dt^2} = -\omega^2 F'$. Considérons d'abord l'équation (9), qui nous montre comment F' varie en fonction de l'angle y' . Si nous posons

$$\cos y' = \mu,$$

l'équation devient:

$$(9^{\text{bis}}) \quad (1 - \mu^2) \frac{d^2 F'}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dF'}{d\mu} + KF' = 0.$$

On voit que cette équation se réduit à celle qui définit le polynôme de LEGENDRE $P_n(\mu) = P_n(\cos y')$, si l'on a soin de prendre

$$K = n(n+1).$$

Il convient d'ailleurs d'attribuer à K cette valeur, si l'on veut que F' reste régulier pour toutes les valeurs de l'angle y' . Nous pouvons alors nous reporter à l'équation (8) pour voir comment se comporte F' en fonction du rayon vecteur x' . Posons

$$\omega x' = \xi,$$

notre équation devient

$$(10) \quad \frac{d^2 F'}{d\xi^2} + F' \left[1 - \frac{n(n+1)}{\xi^2} \right] = 0.$$

Cette équation linéaire admet deux intégrales remarquables que je désignerai par $J_n(\xi)$ et $I_n(\xi)$ à cause de leur analogie avec les fonctions de BESSEL; dans tout ce qui va suivre, ces notations désigneront, sauf avis contraire, *non pas les fonctions de BESSEL ordinaires*, mais les intégrales de l'équation (10).

L'intégrale I_n est celle qui, pour ξ très grand, est sensiblement égale à $e^{-i\xi}$; il n'est pas difficile de voir que cette intégrale est égale à $e^{-i\xi}$ multipliée par un polynôme entier en $\frac{1}{\xi}$.

L'intégrale J_n est celle qui, pour $\xi = 0$, reste holomorphe; elle est égale à la partie réelle de hI_n , h étant un facteur constant. La fonction J_n n'est pas ainsi entièrement définie, elle ne l'est qu'à un facteur constant près, et pour déterminer ce coefficient nous ferons la convention suivante.

Soient I'_n et J'_n les dérivées de I_n et J_n ; on aura la relation:

$$I'_n J_n - J'_n I_n = \text{const.}$$

Il est aisé de voir que cette relation a lieu entre deux intégrales quelconques de (10). Nous choisirons notre facteur constant, de telle sorte que cette constante soit égale à 1; de sorte qu'on aura

$$(11) \quad I'_n J_n - J'_n I_n = 1.$$

Il résulte de là que F' sera d'une des formes suivantes:

$$F' = e^{i\omega t} P_n(\cos y') J_n(\omega x'),$$

$$F' = e^{i\omega t} P_n(\cos y') I_n(\omega x').$$

Retenons seulement la 1^{re} forme; nous avons trouvé:

$$4\pi \frac{df'}{dt} = -\frac{d^2 F'}{dt^2} + \frac{d^2 F'}{dx'^2},$$

d'où

$$4\pi i\omega f' = \omega^2 F' + \frac{d^2 F'}{dx'^2} = \frac{n(n+1)F'}{x'^2},$$

d'où enfin

$$(12) \quad f' = \frac{n(n+1)}{4\pi i\omega} P_n(\cos y') \frac{J_n(\omega x')}{x'^2} e^{i\omega t}.$$

Ceci nous montre comment varie la composante radiale f' de la force électrique en fonction du rayon vecteur x' ; elle varie proportionnellement à $\frac{J_n}{x'^2}$. Avec la 2^{de} forme, il suffirait de remplacer J_n par I_n .

Cela posé, considérons un champ électromagnétique quelconque et supposons :

1° Qu'à l'intérieur d'une sphère de rayon R , il n'y ait pas de conducteur.

2° Que le champ soit de révolution.

On voit que, dans les mêmes conditions que plus haut, on peut supposer :

$$G' = H' = 0, \text{ etc.}$$

De plus F' pourra être développé en une série de fonctions sphériques, et puisque le champ est de révolution en une série de polynômes de LEGENDRE. Nous aurons donc

$$F' = e^{i\omega t} \sum K_n P_n(\cos y'),$$

K_n étant une fonction de x' seulement. D'après ce qui précède, K_n devra satisfaire à l'équation (10), et d'autre part rester holomorphe pour $x' = 0$, puisqu'il n'y a pas de conducteur à l'intérieur de la sphère de rayon R . Nous aurons donc

$$F' = e^{i\omega t} \sum A_n J_n(\omega x') P_n(\cos y')$$

et

$$(13) \quad f' = e^{i\omega t} \sum B_n \frac{J_n(\omega x')}{x'^2} P_n(\cos y'),$$

les A_n et les B_n étant des coefficients numériques.

Supposons maintenant :

1° Qu'à l'extérieur d'une sphère de rayon R , il n'y ait pas de conducteur.

2° Que le champ soit de révolution.

3° Que l'état actuel ait été atteint en partant du repos, de telle sorte que toutes nos quantités soient susceptibles d'être représentées par des potentiels retardés.

Dans ces conditions, F' sera, pour x' très grand, sensiblement proportionnel à $e^{-i\omega x'}$, ce qui nous permet d'écrire :

$$F' = e^{i\omega t} \sum A_n I_n(\omega x') P_n(\cos y')$$

et

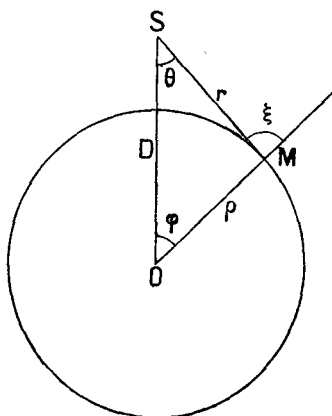
$$(13^{\text{bis}}) \quad f' = e^{i\omega t} \sum B_n \frac{I_n(\omega x')}{x'^2} P_n(\cos y').$$

§ 6.

Diffraction par une sphère.

Nous allons maintenant commencer l'étude des effets de diffraction produits par la sphère terrestre sur les ondes émanées d'un excitateur. Le *champ extérieur* sera produit par un excitateur rectiligne qui, prolongé, irait passer par le centre de la Terre, de telle façon que les champs soient de révolution. Cet excitateur pourra se considérer comme réduit à un point, que j'appellerai S . Soit O le centre de la Terre, et M le point x, y, z : Je désignerai par r la distance SM , par D la distance SO , par ρ la distance OM ,

par φ l'angle SOM , par $\pi - \xi$ l'angle OMS , par θ l'angle OSM . Il en résulte que ρ et φ représentent ce qui, dans le § précédent, était appelé x' et y' .



(Fig. 1).

Nous avons besoin de la composante radiale du déplacement électrique, c'est-à-dire de ce que, dans le § précédent, nous appelions f' . Pour le champ extérieur nous pouvons prendre un potentiel vecteur, dirigé suivant SM et égal en grandeur à

$$e^{i\omega(t-r)} \left(\frac{1}{r} + i\omega \right) \cos \theta;$$

on en tire:

$$(1) \quad 4\pi f'^* = e^{i\omega(t-r)} \left[\frac{i\omega}{r} \sin \theta \sin \xi + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{i\omega r^3} \right) (\sin \theta \sin \xi - 2 \cos \theta \cos \xi) \right].$$

A l'intérieur de la sphère de rayon D , f'^* peut être développé par la formule (13) du § précédent, ce qui me permet d'écrire:

$$(2) \quad f'^* = e^{i\omega t} \sum A_n J_n(\omega \rho) \frac{1}{\rho^2} P_n(\cos \varphi).$$

Le coefficient A_n ne dépend que de n et de D ; on peut le calculer par la méthode de LAPLACE et c'est ce que nous ferons plus loin au § 13.

Passons au champ intérieur. A l'extérieur de la sphère terrestre, c'est-à-dire pour $\rho < \rho_0$, si ρ_0 représente le rayon de la Terre, nous pourrions appliquer la formule (13^{bis}) du § précédent et nous aurons:

$$(3) \quad f' = e^{i\omega t} \sum B_n I_n(\omega \rho) \frac{1}{\rho^2} P_n(\cos \varphi).$$

A l'intérieur de la Terre, c'est-à-dire pour $\rho < \rho_0$, la formule (13) nous donnera:

$$(4) \quad f' = e^{i\omega t} \sum C_n J_n(\omega \rho) \frac{1}{\rho^2} P_n(\cos \varphi).$$

Enfin sur la surface nous aurons, pour la densité μ de l'électricité,

$$(5) \quad \mu = e^{i\omega t} \sum D_n \frac{1}{\rho_0^2} P_n(\cos \varphi).$$

Il reste à calculer les coefficients B_n , C_n et D_n .

Écrivons les valeurs de F' pour $\rho > \rho_0$, et $\rho < \rho_0$; nous trouverons, en nous reportant à la formule 12 du § 5,

$$F' = e^{i\omega t} \sum \frac{4\pi i \omega}{n(n+1)} B_n I_n(\omega \rho) P_n(\cos \varphi)$$

et

$$F' = e^{i\omega t} \sum \frac{4\pi i \omega}{n(n+1)} C_n J_n(\omega \rho) P_n(\cos \varphi).$$

Rappelons que F' n'est pas ici le potentiel de LORENTZ, de sorte que ce n'est pas un potentiel de simple couche. Les équations (2^{bis}), (3^{bis}) et (1) du § 5 nous ont donné :

$$4\pi \frac{dg'}{dt} = \frac{d^2 F'}{dx' dy'},$$

ou, avec nos notations actuelles,

$$4\pi \frac{dg'}{dt} = 4\pi i \omega g' = \frac{d^2 F'}{d\rho d\varphi},$$

ce qui nous donne, pour $\rho > \rho_0$:

$$g' = \omega e^{i\omega t} \sum \frac{B_n}{n(n+1)} I'_n(\omega \rho) \frac{dP_n}{d\varphi}$$

et pour $\rho < \rho_0$:

$$g' = \omega e^{i\omega t} \sum \frac{C_n}{n(n+1)} J'_n(\omega \rho) \frac{dP_n}{d\varphi}.$$

Mais la composante tangentielle g' doit rester continue pour $\rho = \rho_0$, ce qui donne :

$$(6) \quad B_n I'_n(\omega \rho_0) = C_n J'_n(\omega \rho_0).$$

D'autre part, la composante normale f' doit être discontinue et son saut brusque doit être égal à μ , ce qui donne :

$$(7) \quad B_n I_n(\omega \rho_0) = C_n J_n(\omega \rho_0) + D_n.$$

Enfin, le champ *total*

$$f'^* + f'$$

doit être nul à l'intérieur de la Terre, ce qui donne :

$$(8) \quad A_n + C_n = 0.$$

Des équations (6), (7) et (8) on peut, en se rappelant que

$$I'_n J_n - J'_n I_n = 1,$$

déduire

$$I'_n(\omega \rho_0) D_n = A_n,$$

d'où

$$(9) \quad \mu = e^{i\omega t} \sum \frac{A_n}{\rho_0^2 I'_n(\omega \rho_0)} P_n(\cos \varphi),$$

que j'écrirai quelquefois :

$$(9^{\text{bis}}) \quad \mu = e^{i\omega t} \sum \frac{A_n J_n}{\rho_0^2 I'_n J_n} P_n.$$

On voit par là comment on peut déterminer les périodes propres des ondes émises par un excitateur sphérique. Ces périodes sont données par les équations

$$I'_n(\omega \rho_0) = 0$$

et c'est ce que l'on pourrait voir également en écrivant que dans ces ondes propres on a, à l'extérieur,

$$g' = 0.$$

Nous trouverons plus loin au § 6 une expression simple de A_n .

§ 7.

Remarques sur la longueur d'onde.

Les formules précédentes contiennent la solution théorique du problème de la diffraction, et cependant la véritable question n'est pas abordée, puisque le caractère essentiel du phénomène de la diffraction n'est pas mis en évidence. Ce caractère tient à ce que la longueur d'onde est très petite par rapport aux dimensions de la Terre et à ce que, par conséquent, le nombre ω est très grand. Nous sommes ainsi conduits à développer nos inconnues suivant les puissances de $\frac{1}{\omega}$. A la vérité, les développements ainsi obtenus ne sont pas convergents en général; en s'arrêtant aux premiers termes, ils ne nous en fournissent pas moins des expressions asymptotiques de nos inconnues qui sont suffisantes pour notre objet.

En se plaçant à ce point de vue, la 1^{ère} approximation nous donnera la propagation rectiligne, et c'est à la 2^e approximation qu'il convient de nous arrêter. Nous sommes ainsi conduits à rechercher des expressions asymptotiques de nos intégrales, et cela va être l'objet des §§ suivants.

Mais nous avons encore une autre remarque à faire. Nous supposons, dans ce qui va suivre, que ω est réel. Cela paraîtra au premier abord peu justifiable, puisque l'onde émise par l'excitateur est amortie. Mais en réalité nous n'aurions pas le droit de représenter l'onde amortie par une formule

$$e^{i\omega t},$$

ω étant imaginaire; et en effet, cette onde amortie a un commencement; de sorte qu'il conviendrait d'égaliser l'onde à une fonction discontinue $F(t)$, égale à 0 pour $t < 0$ par exemple, et à $e^{i\omega t}$ pour $t > 0$. Cette fonction discontinue peut être développée en série de FOURIER:

$$(1) \quad F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} \varphi(\alpha) d\alpha,$$

où α est réel. Le coefficient $\varphi(\alpha)$ est donné par la formule:

$$2\pi\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} F(t) dt = \int_0^{\infty} e^{i(\omega-\alpha)t} dt = \frac{1}{i(\omega-\alpha)},$$

parce que pour $t = \infty$ l'expression $e^{i(\omega-\alpha)t}$ s'annule, parce que la partie imaginaire de ω est positive.

Par la formule (1), l'onde incidente $F(t)$ est décomposée en une infinité de composantes isochrones $e^{i\alpha t} \varphi(\alpha) d\alpha$, formant un spectre continu.

Nous devons examiner séparément chacune de ces composantes, et pour chacune d'elles l'exposant $i\alpha t$ est purement imaginaire. C'est ce qui justifie notre hypothèse où nous traitons ω comme réel.

On remarquera que pour $\alpha = 0$, $\varphi(\alpha)$ ne s'annule pas, mais se réduit à $\frac{1}{i\omega}$. Et cela a une grande importance. On explique en effet d'ordinaire la diffraction des ondes hertziennes en disant que la longueur d'onde est très grande, et on entend d'ordinaire par là la longueur d'onde calculée à l'aide de la partie réelle de ω et que nous appellerons λ . Mais, ainsi que nous venons de le voir, nous n'avons pas en réalité une longueur d'onde unique, mais un spectre continu, et dans ce spectre il y a des parties qui correspondent à des longueurs d'onde *beaucoup plus grandes* que λ . Ces parties ne sont pas d'une intensité négligeable, puisque

$$\varphi(0) = \frac{1}{i\omega},$$

tandis qu'en posant $\omega = \omega_0 + i\omega_1$, et en prenant $\alpha = \omega_0$, on avait

$$\varphi(\omega_0) = \frac{1}{i\omega_1},$$

de telle sorte que

$$|\varphi(\omega_0)| \text{ et } \varphi(0)$$

sont sensiblement du même ordre de grandeur.

Parmi les composantes de notre spectre, il y en a donc qui sont susceptibles de produire des effets de diffraction beaucoup plus grands que ceux qui correspondraient à la longueur λ . Et c'est déjà une première explication de la grandeur des effets constatés.

§ 8.

Valeur asymptotique de certaines intégrales.

Considérons l'intégrale :

$$(I) \quad \int \eta e^{i\omega\theta} dx,$$

où η et θ sont des fonctions de x , et ω un très grand nombre. Je suppose d'abord que l'intégrale soit prise entre des limites réelles le long d'une droite et que sur cette droite θ soit réel. On peut déformer le contour d'intégration en s'astreignant à cette condition, que tout le long du nouveau contour la partie imaginaire de θ soit positive ou nulle. En un point où cette partie imaginaire est positive l'élément correspondant de l'intégrale contient en facteur

$$e^{-\omega\theta_1},$$

où θ_1 est la partie imaginaire, et comme ω est très grand, cet élément est négligeable; il est très petit d'ordre infini, si ω est très grand du 1^{er} ordre. Les seuls éléments sensibles sont donc ceux qui sont voisins des points où θ est réel. Mais dans cette déformation

de notre contour, il y a certains points, situés sur l'axe réel, et par lesquels nous devons toujours faire passer le contour. Ce sont :

1° Les deux limites d'intégration.

2° Les points singuliers de η et de θ ; parce que dans une déformation continue, un contour variable n'a pas le droit de franchir un point singulier.

3° Les maxima et les minima de θ , parce qu'un contour ne pourrait passer dans le voisinage de l'un de ces maxima, tout entier au dessus ou tout entier au dessous, sans rencontrer à la fois des points où $\theta_1 > 0$ et des points où $\theta_1 < 0$.

Tous les autres points peuvent être évités et il en résulte que les seuls éléments dont nous ayons à tenir compte sont ceux qui sont voisins de l'un de ces points. Soit α l'un de ces points, θ_0 la valeur correspondante de θ ; nous aurons

$$\theta - \theta_0 = A(x - \alpha)^m + \dots, \quad \eta = B(x - \alpha)^p + \dots;$$

nous poserons $\theta = \theta_0 + Ay^m$, d'où

$$\eta \frac{dx}{dy} = By^p + B_1 y^{p+1} + \dots$$

et pour notre intégrale:

$$e^{i\omega\theta_0} \int (By^p + B_1 y^{p+1} + \dots) e^{i\omega Ay^m} dy.$$

Nous sommes donc ainsi conduits à examiner l'intégrale

$$\int y^p e^{i\omega Ay^m} dy.$$

La limite inférieure d'intégration peut être prise égale à 0, à la condition de considérer séparément les éléments voisins de α vers la droite, et les éléments voisins de α vers la gauche. Quant à la limite supérieure, nous pouvons la prendre arbitrairement, puisque les éléments voisins de la limite inférieure interviennent seuls. Nous la prendrons par exemple infinie, un peu en dehors de l'axe réel pour que $\theta_1 > 0$. Nous avons donc à envisager l'intégrale

$$\int_0^\infty y^p e^{i\omega Ay^m} dy.$$

Elle se calcule aisément par le moyen des fonctions eulériennes. Il est aisé de voir qu'elle est de l'ordre de

$$\omega^{-\frac{p+1}{m}}$$

Le nombre p peut être fractionnaire et même négatif, mais ne peut être < -1 . Si nous appliquons ce principe aux différents points, nous trouvons:

1° Que pour les maxima et minima de θ , on a en général

$$p = 0, \quad m = 2,$$

d'où ordre $-\frac{1}{2}$.

2° Que si l'on a $\theta' = \theta'' = 0$, on a $p = 0$, $m = 3$, d'où ordre $-\frac{1}{3}$.

3° Qu'aux extrémités, on a en général $p = 0$, $m = 1$, d'où ordre -1 .

4° Qu'en un point singulier, de η , on a en général $m = 1$, d'où ordre $-(p+1)$.

5° Que si en un point la fonction η est continue ainsi que ses dérivées des q premiers ordres, mais que la $(q+1)^e$ dérivée soit discontinue, on trouve l'ordre $-(q+2)$.

Étudions d'une façon particulière le cas des maxima et des minima qui donnent l'ordre $-\frac{1}{2}$, c'est-à-dire celui de $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$. Nous avons la formule connue :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

d'où l'on peut déduire, comme on sait,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

En appliquant donc les principes précédents à notre intégrale, et en particulier aux éléments de cette intégrale voisins d'un minimum ou d'un maximum de θ , nous trouvons :

$$(2) \quad \int \eta e^{i\omega\theta} dx = \eta e^{i\omega\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega\theta'}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

pour un minimum et

$$(2^{bis}) \quad \int \eta e^{i\omega\theta} dx = \eta e^{i\omega\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega|\theta''|}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

pour un maximum. Les valeurs de η , θ , θ'' sont celles qui correspondent au minimum ou au maximum, et θ'' est la dérivée seconde de θ ; la valeur du radical à diviser est la valeur positive.

Les formules précédentes restent vraies pour des valeurs imaginaires de ω , pourvu que la partie imaginaire de ω soit positive, mais en attribuant à $\sqrt{\omega}$ un argument compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Plus généralement encore on peut appliquer la formule (2), même si ω et θ ne sont pas réels et si le chemin d'intégration est quelconque, mais il faut que l'argument de $\omega\theta'' dx^2$ soit compris entre 0 et π et il faut attribuer à $\sqrt{\omega\theta''} dx$ un argument compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

L'erreur commise est de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$; car le terme suivant du développement correspond à

$$p = 1, \quad m = 2$$

et est par conséquent d'ordre $-\frac{p+1}{m} = -1$.

Il n'est peut-être pas sans intérêt d'appliquer le résultat précédent à l'intégrale de FOURIER, afin d'en mieux faire comprendre le sens. Partons des deux formules conjuguées :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \psi(y) dy, \quad 2\pi\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(x) dx$$

et soit $\psi(y) = e^{i\omega\theta} \eta$, où θ et η sont fonctions de y . Pour avoir une valeur approchée de $\varphi(x)$, appliquons la règle précédente; la quantité sous le signe $\int$ est

$$e^{i(xy+\omega\theta)} \eta.$$

Nous poserons $x = z\omega$; il faut considérer le minimum de l'exposant, c'est-à-dire de

$$zy + \theta(y).$$

Ce minimum sera atteint pour une valeur de y que j'appellerai y_0 et qui sera donné par

$$(3) \quad z + \theta'(y_0) = 0.$$

La valeur correspondante approchée de l'intégrale sera

$$\phi(x) = \sqrt{2\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\omega(z y_0 + \theta)} \frac{\eta(y_0)}{\sqrt{\omega \theta''(y_0)}}.$$

Calculons de même $\psi(t)$; on trouve, en remplaçant ϕ par sa valeur approchée,

$$2\pi\psi(t) = \int \sqrt{2\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\eta(y_0)}{\sqrt{\omega \theta''(y_0)}} e^{i\omega[z y_0 + \theta(y_0) - t z]} \frac{dx}{dz} dz.$$

Cherchons le maximum de l'exposant:

$$(4) \quad Q = z y_0 + \theta(y_0) - t z,$$

t étant donné et y_0 lié à z par la relation (3); il viendra

$$y_0 + \frac{dy_0}{dz} [z + \theta'(y_0)] - t = 0$$

ou, en vertu de (3),

$$y_0 = t.$$

Notre valeur approchée est donc, d'après les mêmes règles,

$$\sqrt{2\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[\sqrt{2\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\eta(t)}{\sqrt{\omega \theta''(t)}} \right] e^{i\omega\Theta(t)} \frac{1}{\sqrt{\omega \Theta}} \frac{dx}{dz}.$$

Θ est la valeur absolue de la dérivée seconde de l'exposant, c'est-à-dire de l'expression

(4); $\frac{dx}{dz}$ n'est autre que ω ; on trouve:

$$\Theta = \left| \frac{d^2 Q}{dz^2} \right|, \quad \frac{d^2 Q}{dz^2} = 2 \frac{dy_0}{dz} + \theta'' \left(\frac{dy_0}{dz} \right)^2 + (z + \theta') \frac{d^2 y_0}{dz^2};$$

or, en vertu de (3),

$$z + \theta' = 1 + \theta'' \frac{dy_0}{dz} = 0,$$

d'où

$$\frac{d^2 Q}{dz^2} = -\frac{1}{\theta''}, \quad \Theta = \frac{1}{\theta''}$$

et finalement:

$$2\pi\psi(t) = 2\pi\eta e^{i\omega\Theta}.$$

C. Q. F. D.

Je me contenterai de cet aperçu et n'examinerai pas des cas plus compliqués comme ceux où il y a plusieurs maxima.

Appliquons maintenant les mêmes principes à l'intégrale double

$$(5) \quad \int \eta e^{i\omega\theta} dx dy.$$

Si on intègre d'abord par rapport à x , on voit que seuls doivent être retenues : les valeurs de x pour lesquelles (y étant pour un instant regardé comme une constante) θ est maximum; les points singuliers; les limites. On renouvelle le raisonnement en intégrant par rapport à y et on voit que les seuls éléments de l'intégrale dont il y ait lieu de tenir compte sont ceux qui sont voisins :

1° Des maxima ou minima de θ , à l'intérieur de l'aire d'intégration.

2° Des points singuliers de η et de θ .

3° Des maxima ou minima de θ sur le contour de l'aire d'intégration.

Occupons-nous d'abord de la 1^{ère} sorte d'éléments. Soit θ_0 le maximum considéré, et supposons qu'on ait choisi l'origine de façon qu'en ce point $x = y = 0$. Soit dans le voisinage :

$$\eta = \eta_0, \quad \theta = \theta_0 + \frac{\alpha x^2 + \beta y^2}{2}.$$

Nous sommes conduits à envisager l'intégrale :

$$\int \eta_0 e^{i\omega\theta_0} e^{\frac{i\omega}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2)} dx dy$$

étendue au plan entier, ce pour quoi on trouve immédiatement :

$$(6) \quad 2\pi \eta_0 e^{i\omega\theta_0} e^{+i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega\sqrt{\alpha\beta}}$$

avec une formule analogue pour un maximum. On remarquera que cette expression est de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$, tandis que l'erreur commise est de l'ordre de $\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}}$.

Laissons de côté les points singuliers et passons à la 3^e sorte de points. Nous pouvons dans le voisinage du contour prendre pour coordonnées n et s ; où n représente la distance au contour estimée suivant la normale, et s l'arc du contour compté depuis une origine quelconque jusqu'au pied de cette normale. Nous pouvons alors écrire notre intégrale :

$$\int \eta e^{i\omega\theta} dn ds.$$

En admettant que η et θ se comportent régulièrement dans le voisinage du bord et sans que $\frac{d\theta}{dn}$ s'annule, l'intégration par rapport à n nous donnera comme valeur approchée

$$\int \eta e^{i\omega\theta} dn = \frac{k}{\omega} \eta e^{i\omega\theta},$$

k étant un facteur numérique facile à calculer; la seconde intégration nous donne :

$$(6) \quad \frac{k}{\omega} \int \eta e^{i\omega\theta} ds,$$

intégrale simple qu'il faut évaluer par la formule (2) ou (2^{bis}) en observant que, d'après cette formule, l'intégrale est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$, en se bornant aux éléments voisins des

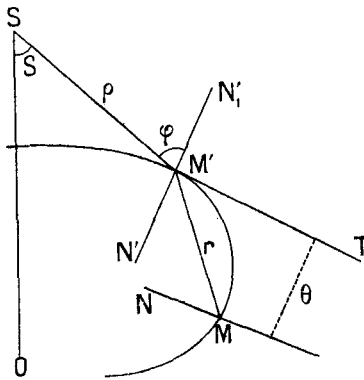
maxima ou minima de θ , éléments qui sont les plus importants. L'expression (6) est donc de l'ordre de

$$\frac{1}{\omega \sqrt{\omega}}.$$

§ 9.

Théorie de la propagation rectiligne.

Je crois utile, comme application des principes précédents, de traiter un cas assez général, mais en nous bornant à la 1^{ère} approximation, celle de la propagation rectiligne. Reprenons les hypothèses du § 3. Par conséquent, notre conducteur intérieur est un



(Fig. 2).

corps de révolution, et je supposerai de plus que c'est un corps convexe. Quant au conducteur extérieur, je supposerai, comme au § 6, que c'est un exciteur rectiligne, dirigé suivant l'axe de révolution et assez court pour pouvoir être assimilé à un point que j'appelle S. Reprenons l'équation (7) du § 3 (équation de FREDHOLM):

$$\int \mu' d\sigma' \left[\frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} + \omega^2 L \right] - 2\pi\mu = N.$$

La première chose à faire est de rechercher des expressions asymptotiques du noyau et de N . En ce qui concerne N , nous pouvons nous servir de l'équation (1) du § 6.

Nous remarquerons que dans le 2^d membre de cette équation, les crochets contiennent trois termes, le premier de l'ordre de ω , le second de l'ordre de 1, et le 3^e de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$; le premier seul doit être retenu. De plus, les notations doivent être modifiées, car avec les notations du § 3 que nous adoptons, r désigne la distance MM' et θ représente l'angle de la tangente méridienne en M' avec la normale en M . Au lieu d'écrire

$$N = e^{i\omega(t-r)} \frac{i\omega}{r} \sin \theta \sin \xi,$$

nous écrivons, en représentant par N' la valeur de N au point M' ,

$$(1) \quad N' = e^{i\omega(t-\rho)} \frac{i\omega}{\rho} \sin S \sin \varphi,$$

où ρ désigne la distance SM' , S l'angle de SM' avec l'axe de révolution, et φ le supplément de l'angle de SM' avec la normale au conducteur en M' . La présence du facteur $\sin \varphi$ s'explique aisément, car à une certaine distance de la source, la force électrique est normale au rayon vecteur qui va à cette source.

Nous avons trouvée d'autre part, au § 3,

$$\frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} = \cos \xi \left[-i\omega - \frac{1}{r} \right] \frac{e^{-i\omega r}}{r},$$

ξ étant l'angle de MM' avec la normale en M ; on peut se borner au terme qui contient ω en facteur, et écrire

$$(2) \quad \frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} = -i\omega \cos \xi \frac{e^{-i\omega r}}{r}.$$

Le calcul de L exige un peu plus d'attention. Soit

$$L = e^{-i\omega r} Y.$$

Il viendra

$$(3) \quad \frac{dL}{ds'} = -i\omega e^{-i\omega r} \frac{dr}{ds'} Y + e^{-i\omega r} \frac{dY}{ds'}.$$

Le second terme peut être négligé et on peut écrire, en tenant compte de (5) du § 3,

$$L = e^{-i\omega r} Y = -\frac{1}{i\omega} \frac{ds'}{dr} \frac{dL}{ds'} = -\frac{1}{i\omega} \frac{ds'}{dr} \cos \theta \frac{e^{-i\omega r}}{r}.$$

Mais $\frac{ds'}{dr}$ est égal à $\frac{1}{\cos \psi}$, ψ étant l'angle de MM' avec la tangente méridienne en M' .

Il reste donc:

$$(4) \quad L = -\frac{1}{i\omega} \frac{\cos \theta}{\cos \psi} \frac{e^{-i\omega r}}{r}$$

et pour le noyau total:

$$(5) \quad K = \frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} + \omega^2 L = i\omega \frac{e^{-i\omega r}}{r} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \psi} - \cos \xi \right).$$

Considérons une droite issue du point S , elle coupera la surface du conducteur en deux points M_1 et M_2 ; le premier plus rapproché de S (côté éclairé) et le second plus éloigné (côté de l'ombre). Nous allons supposer que la densité μ est égale à zéro du côté de l'ombre, et qu'elle est égale du côté éclairé à la composante N au facteur près $-\frac{1}{2\pi}$. Nous vérifierons ensuite qu'en première approximation nous satisfaisons ainsi à l'équation de FREDHOLM.

Nous avons donc à évaluer l'intégrale

$$J = \int N' K d\sigma'$$

étendue au côté éclairé; K est le noyau, et N' la valeur de N au point M' . Si nous remplaçons K et N' par leurs valeurs (5) et (1), la quantité sous le signe $\int$ sera de la forme

$$e^{i\omega t} \eta e^{i\omega \zeta},$$

en prenant

$$(6) \quad \zeta = -\rho - r, \quad \eta = \frac{-\omega^2}{\rho r} \sin S \sin \varphi \left(\frac{\cos \theta}{\cos \psi} - \cos \xi \right).$$

C'est la forme étudiée au § précédent, mais j'écris ζ au lieu de θ , la lettre θ étant déjà employée. Les seuls éléments de l'intégrale à conserver sont donc ceux qui correspondent aux maxima et aux minima de ζ , ou de

$$SM' + M'M.$$

Or cette expression ne peut atteindre un maximum ou un minimum que dans deux cas :

1° Si les points S , M' et M sont en ligne droite.

2° Si l'angle des deux vecteurs SM' et $M'M$ a pour bissectrice la normale en M' .

Le 1^{er} cas est seul à retenir, le 2^d ne pouvant se présenter si M' est du côté éclairé.

Si M est du côté éclairé, le 1^{er} cas ne peut se produire non plus, de sorte que l'intégrale est nulle. Nous n'avons donc à envisager que le cas où M est du côté de l'ombre et sur le prolongement de SM' ; la formule à appliquer est la formule (6) du § 8.

Interprétons les divers facteurs de cette formule; le facteur exponentiel $e^{i\omega \theta_0}$ est ici

$$(7) \quad e^{-i\omega(r+\rho)} = e^{-i\omega SM},$$

car si S , M' , M sont en ligne droite, $r + \rho = SM$. Le facteur η_0 est donné par la seconde formule (6); mais nous observerons que nos angles φ , θ , ψ , ξ , qui représentent en général ceux de SM' avec $M'N'$, prolongement de la normale en M' , de $M'T$, tangente méridienne en M' avec MN normale en M , de MM' avec $M'T$, et enfin de MM' avec MN , se trouvent liés par des relations simples lorsque SMM' sont en ligne droite et que, par conséquent, toutes ces droites sont dans un même plan. On a, en effet,

$$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \xi = \psi + \theta,$$

d'où

$$\sin \varphi \left(\frac{\cos \theta}{\cos \psi} - \cos \xi \right) = \sin \psi \sin \xi$$

et

$$(8) \quad \eta_0 = \frac{-\omega^2}{\rho r} \sin S \sin \psi \sin \xi.$$

Reste à évaluer le facteur $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$ de la formule (6) du § 8. Ce facteur est proportionnel à l'aire de la petite ellipse

$$(9) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 = \varepsilon^2.$$

Or considérons l'ellipsoïde

$$(10) \quad r + \rho = SM' + M'M = \text{const.}$$

(les points S et M étant regardés comme fixes, et M' comme variable) et l'intersection de cet ellipsoïde avec la surface du conducteur. Si nous donnons à la constante du dernier membre de (10) une valeur peu différente de SM , cette intersection se réduira à une courbe très petite, assimilable précisément à l'ellipse (9) et c'est l'aire de cette très petite courbe qu'il s'agit d'évaluer.

Dans ce cas, l'ellipsoïde (10) est très allongé, et assimilable à un cylindre; la surface du conducteur, dont une portion infiniment petite intervient seule, peut de son côté être assimilée à un plan, et l'aire de l'ellipse d'intersection est inversement proportionnelle au sinus de l'angle que fait ce plan avec les génératrices du cylindre, c'est-à-dire à $\cos \varphi$ ou à $\sin \psi$.

Il nous suffira donc de faire le calcul dans le cas où $\sin \psi = 1$. Il vient alors :

$$-(r + \rho) = -SM + \frac{\alpha x'^2 + \beta y'^2}{2},$$

$-(r + \rho)$ correspond au θ du § 8, $-SM$ est le maximum de ce θ que nous appelions θ_0 au § 8; enfin x' et y' sont les coordonnées du point M' calculées en prenant pour un instant pour origine le point M'_0 , position du point M' qui correspond à ce maximum, pour plan des xy le plan tangent en ce point à la surface du conducteur et enfin pour axe des z la droite SM'_0M qui est normale à ce plan tangent puisque nous supposons $\sin \psi = 1$. On trouve alors :

$$r = MM'_0 + \frac{x'^2 + y'^2}{2} \frac{1}{MM'_0}, \quad \rho = SM'_0 + \frac{x'^2 + y'^2}{2} \frac{1}{SM'_0},$$

d'où

$$\alpha = \beta = \frac{1}{MM'_0} + \frac{1}{SM'_0} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho},$$

d'où

$$\sqrt{\alpha\beta} = \frac{r + \rho}{r\rho}$$

et dans le cas général :

$$(11) \quad \sqrt{\alpha\beta} = \frac{r + \rho}{r\rho} \sin \psi = \frac{SM}{r\rho} \sin \psi.$$

Nous pouvons donc appliquer la formule (6) du § 8 dont les divers facteurs nous sont donnés par les formules (7), (8) et (11); nous trouvons ainsi :

$$\frac{2i\pi}{\omega} e^{-i\omega SM} \left[\frac{-\omega^2}{\rho r} \sin S \sin \psi \sin \xi \right] \left[\frac{r\rho}{SM \sin \psi} \right],$$

ou enfin

$$(12) \quad J = -2\pi i \omega e^{-i\omega SM} \frac{\sin S \sin \xi}{SM} e^{i\omega t}$$

Revenons à la formule (1) qui nous donnait N' , pour en déduire la valeur de N ; il suffit d'y changer $\rho = SM'$ en SM , et φ angle de SM' avec la normale en M' , en

ξ angle de SM identique à MM' avec la normale en M ; on trouve ainsi:

$$N = e^{i\omega(t-SM)} \frac{i\omega}{SM} \sin S \sin \xi,$$

d'où

$$(13) \quad J = -2\pi N.$$

Notre équation de FREDHOLM

$$-\frac{1}{2\pi} J - 2\pi\mu = N$$

est toujours satisfaite. En effet, du côté éclairé on a

$$J = 0, \quad \mu = -\frac{N}{2\pi}$$

et du côté de l'ombre

$$\mu = 0, \quad J = -2\pi N.$$

Nous voyons qu'avec l'approximation adoptée, nous justifions les règles de l'optique géométrique.

§ 10.

Valeur approchée de P_n .

Nous allons appliquer d'abord les principes du § 8 à la recherche d'une expression approchée du polynôme de LEGENDRE P_n quand n est très grand. Nous partirons de la formule

$$(1) \quad 2\pi P_n(\cos\varphi) = \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + i \sin\varphi \cos\omega)^n d\omega.$$

(Voir par exemple TISSERAND, *Mécanique Céleste*, tome II, page 260).

Pour n très grand, nous pouvons poser la quantité sous le signe $\int$ égale à $e^{in\theta}$, en posant

$$e^{i\theta} = \cos\varphi + i \sin\varphi \cos\omega.$$

La fonction sous le signe $\int$ ne change pas quand on change ω en $-\omega$, et elle se change en son imaginaire conjuguée quand on change ω en $\pi - \omega$, je puis donc transformer la formule (1) et l'écrire:

$$(2) \quad \frac{\pi}{2} P_n = \text{partie réelle} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + i \sin\varphi \cos\omega)^n d\omega.$$

Quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $e^{i\theta}$ varie de $\cos\varphi + i \sin\varphi$ à $\cos\varphi$; et si, comme nous le supposons, φ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, le module de $e^{i\theta}$ reste plus petit que 1, et la partie imaginaire de θ positive. La seule partie de l'intégrale à conserver est donc

celle qui correspond à ω voisin de zéro. Mais si ω est petit, on peut écrire :

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} - \frac{i \sin \varphi}{2} \omega^2 = e^{i\varphi} \left(1 - \frac{i \sin \varphi e^{-i\varphi}}{2} \omega^2 \right),$$

d'où, en négligeant toujours ω^4 ,

$$\theta = \varphi - \frac{\sin \varphi e^{-i\varphi}}{2} \omega^2.$$

Nous avons donc à calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{in\theta} d\omega$$

ou, en appliquant la formule (2^{bis}) du § 8,

$$\frac{1}{2} e^{ni\varphi} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{n \sin \varphi e^{-i\varphi}}}.$$

n joue le rôle de ω , $\sin \varphi e^{-i\varphi}$ celui de $|\theta''|$; le facteur $\frac{1}{2}$ vient de ce que l'intégrale ne s'étend pas de $-\infty$ à $+\infty$, mais de 0 à $+\infty$. La formule est applicable bien que $\sin \varphi e^{-i\varphi}$ ne soit pas réel. Mais il faut pour cela attribuer à l'expression imaginaire $\sqrt{n \sin \varphi e^{-i\varphi}}$, qui joue le rôle de $\sqrt{\omega |\theta''|}$, un argument compris entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$,

c'est-à-dire l'argument $-\frac{\varphi}{2}$; notre expression doit donc s'écrire :

$$\frac{1}{2} e^{i\left(n\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{2\pi}{n \sin \varphi}},$$

de sorte que l'équation (2) nous donne :

$$(3) \quad P_n = \cos \left(n\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \varphi}}.$$

Il est aisé de voir que si l'on change φ en $\pi - \varphi$, cette expression ne change pas si n est pair et change de signe si n est impair; elle convient donc pour toutes les valeurs de φ comprises entre 0 et π .

Elle devient toutefois illusoire pour les petites valeurs de φ . Si n et $\frac{1}{\varphi}$ sont du même ordre et que $n\varphi = \alpha$ soit fini, on aura sensiblement

$$e^{ni\theta} = \left(1 + \frac{i\alpha \cos \omega}{n} \right)^n = e^{i\alpha \cos \omega},$$

d'où

$$2\pi P_n = \int_0^{2\pi} e^{i\alpha \cos \omega} d\omega,$$

ou enfin

$$(4) \quad P_n = J_0(\alpha) = J_0(n\varphi),$$

en désignant par J_0 la fonction de BESSEL ordinaire.

On voit que pour $\varphi = 0$, on trouve comme il convient $P_n = 1$; mais il convient de raccorder les deux formules (3) et (4). Quand φ est petit et que $n\varphi = \alpha$ est grand,

la première donne sensiblement

$$P_n = \cos \left(n\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi n \varphi}}$$

et la seconde, par la formule approchée des fonctions de BESSEL,

$$P_n = \frac{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\sqrt{2\pi\alpha}} = \cos \left(n\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi n \varphi}}.$$

Le raccordement se fait donc sans difficulté.

§ 11.

Calcul de I_n et de J_n .

Reprenons l'équation (10) du § 5, que j'écrirai :

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{d\xi^2} + y \left[1 - \frac{n(n+1)}{\xi^2} \right] = 0,$$

et cherchons la valeur approchée des deux intégrales I_n et J_n quand n et ξ sont tous deux très grands. Il est aisé de voir qu'on peut satisfaire à cette équation en faisant

$$(2) \quad y = \int e^{i\xi x} (x^2 - 1)^n \xi^{n+1} dx,$$

l'intégration étant prise entre des limites convenables; les limites sont les points singuliers -1 et $+1$, et le point ∞ avec cette condition que x devienne infini avec un argument tel que $e^{i\xi x}$ s'annule.

On obtiendra l'intégrale J_n , à un facteur constant près, en intégrant de -1 à $+1$; car dans ces conditions l'expression (2) est une fonction holomorphe de ξ ; on obtiendra l'intégrale I_n , à un facteur constant près, en intégrant de -1 à l' ∞ . Car pour x très grand, les seuls éléments sensibles sont ceux où x est voisin de -1 ; ce qui donne un terme sensiblement proportionnel à $e^{-i\xi}$.

Nous allons maintenant supposer n et ξ très grands et poser

$$n = \chi \xi,$$

χ étant fini; d'où

$$y = \xi^{n+1} \int e^{i\xi \theta} d\theta$$

avec

$$\theta = x - i\chi \log(x^2 - 1).$$

Nous allons appliquer la formule (2) du § 8, ξ jouant le rôle de ω . Il nous faut donc chercher les maxima et minima de θ ; ils sont donnés par

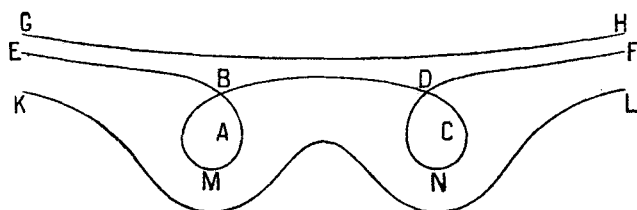
$$(3) \quad x = i\chi \pm \sqrt{1 - \chi^2}.$$

Nous devons distinguer divers cas; soit d'abord $0 < \chi < 1$; nous pourrions poser

$z = \sin \eta$, d'où, η étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$,

$$x = e^{i\eta}, \quad x = -e^{-i\eta}.$$

Nous devons alors nous rendre compte des variations de la partie imaginaire de θ , elles sont représentées par la figure suivante.



(Fig. 3).

Les courbes tracées ont pour équations:

$$\text{partie imag. } \theta = \text{const.}$$

Les points A et C sont les points -1 et $+1$ où cette partie imaginaire est égale à $+\infty$; les points doubles B et D sont les points $x = e^{i\eta}$, $x = -e^{-i\eta}$; et la valeur correspondante de la partie imaginaire peut s'appeler θ_1 . Alors le long de la courbe GH , par exemple, et dans les boucles, cette partie imaginaire est $< \theta_1$, et le long de KL elle est plus grande. Nous devons déformer notre chemin d'intégration de façon que cette partie imaginaire ne descende jamais au dessous de θ_1 ; nous pouvons donc rester soit à l'intérieur des boucles, soit au dessus du trait $EBDF$.

Dans le calcul de J , nous devons aller de A en C , et nous ne pourrions le faire qu'en passant en B et en D ; dans le calcul de I , nous devons aller de A à l'infini, et nous ne pouvons le faire qu'en passant en B et non en D .

Pour l'application de la formule du § 8, il nous faut calculer θ'' ; nous trouvons:

$$(4) \begin{cases} \theta'' = \frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{2i\zeta(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = -ie^{-i\eta} \cotg \eta & \text{pour } x = e^{i\eta} \quad (\text{point } D); \\ \theta'' = -ie^{i\eta} \cotg \eta & \text{pour } x = -e^{-i\eta} \quad (\text{point } B). \end{cases}$$

D'autre part il convient, pour appliquer la formule (2) du § 8, d'attribuer à $\sqrt{\omega \theta''} dx$, ici à $\sqrt{\xi \theta''} dx$, un argument compris entre 0 et $+\frac{\pi}{2}$. Or ξ est réel et positif, et l'argument de θ'' dans les deux formules (4) est égal à

$$\mp \eta - \frac{\pi}{2} \quad (\text{signe } - \text{ pour le point } D, \text{ signe } + \text{ pour le point } B).$$

Soit alors λ l'argument de dx , on aura:

$$\arg \xi \theta'' dx^2 = 2\lambda + \eta - \frac{\pi}{2} + 2\epsilon\pi \quad (\text{en } B),$$

$$\arg \xi \theta'' dx^2 = 2\lambda - \eta - \frac{\pi}{2} + 2\epsilon\pi \quad (\text{en } D),$$

ϵ étant un entier.

Cet argument doit être compris entre 0 et π , ce qui donne :

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\eta}{2} - \varepsilon\pi < \lambda < \frac{3\pi}{4} - \frac{\eta}{2} - \varepsilon\pi \quad (\text{en } B),$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2} - \varepsilon\pi < \lambda < \frac{3\pi}{4} + \frac{\eta}{2} - \varepsilon\pi \quad (\text{en } D).$$

Il s'agit de déterminer ε ; pour cela remarquons que si nous intégrons, soit en allant de A à l' ∞ pour I_n , soit en allant de A à C pour J_n , nous devons passer en B en sortant de la boucle, et en D en rentrant dans la boucle. Cela montre que nous pouvons prendre

$$\lambda = \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon = 0 \quad (\text{en } B),$$

$$\lambda = -\frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon = 1 \quad (\text{en } D),$$

d'où

$$\sqrt{\xi \theta''} = \sqrt{\xi \cotg \eta} e^{i(\frac{\eta}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (\text{en } B),$$

$$\sqrt{\xi \theta''} = \sqrt{\xi \cotg \eta} e^{i(-\frac{\eta}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi)} \quad (\text{en } D),$$

ou, à un facteur constant près $\sqrt{2\pi}$,

$$(5) \quad y = \xi^{n+1} e^{i\xi x} (x^2 - 1)^n \frac{ie^{-\frac{i\eta}{2}}}{\sqrt{\xi \cotg \eta}} \quad (\text{en } B),$$

$$(5^{\text{bis}}) \quad y = -\xi^{n+1} e^{i\xi x} (x^2 - 1)^n \frac{ie^{+\frac{i\eta}{2}}}{\sqrt{\xi \cotg \eta}} \quad (\text{en } D).$$

On remarquera que ces deux expressions sont imaginaires conjuguées, car ξ et η sont réels; ix prend en B et en D deux valeurs $-ie^{-i\eta}$, $ie^{i\eta}$ qui sont imaginaires conjuguées. Nous pourrions donc poser

$$y = Me^{i\alpha} \quad (\text{en } B), \quad y = Me^{-i\alpha} \quad (\text{en } D)$$

avec

$$M = 2^n \xi^{n+1} e^{-\xi \sin \eta} \sin^n \eta \frac{1}{\sqrt{\xi \cotg \eta}}, \quad \text{etc.}$$

ou, en tenant compte de $n = \xi \sin \eta$,

$$M = 2^n n^n e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi n}{\cos \eta}},$$

de sorte que M est égal à $\frac{1}{\sqrt{\cos \eta}}$, à un facteur constant près, et

$$(6) \quad \alpha = -\xi \cos \eta - n\eta - \frac{\eta}{2} - (n-1)\frac{\pi}{2}.$$

On aura alors pour I_n , à un facteur constant près :

$$Me^{i\alpha}$$

et pour J_n , à un autre facteur constant près :

$$M e^{i\alpha} + M e^{-i\alpha} = 2 M \cos \alpha.$$

Nous voulons déterminer ces facteurs constants, ou plutôt encore calculer

$$I'_n J_n = \frac{I''_n J_n}{I'_n J_n - J'_n I_n}.$$

Pour cela, je poserai

$$I_n = C M e^{i\alpha}, \quad K_n = C M e^{-i\alpha}, \quad J_n = 2 C' M \cos \alpha,$$

C et C' étant des coefficients constants. Nous avons :

$$I_n = C'' \int e^{i\xi x} (x^2 - 1)^n \xi^{n+1} dx$$

(C'' facteur constant) et

$$I'_n = C'' \int e^{i\xi x} (x^2 - 1)^n \xi^{n+1} \left[ix + \frac{n+1}{\xi} \right] dx.$$

Le rapport $\frac{I'_n}{I_n}$ est donc égal à la valeur de

$$ix + \frac{n+1}{\xi}$$

au point B , puisque les seuls éléments sensibles sont ceux voisins du point B ; et comme ξ est très grand et $n = \chi \xi = \xi \sin \eta$, on peut écrire :

$$\frac{I'_n}{I_n} = -i e^{-i\eta} + \sin \eta = -i \cos \eta,$$

d'où

$$I'_n = -i \cos \eta C M e^{i\alpha}, \quad K'_n = i \cos \eta C M e^{-i\alpha},$$

$$J'_n = C' M (-i \cos \eta e^{i\alpha} + i \cos \eta e^{-i\alpha}) = 2 \cos \eta C' M \sin \alpha,$$

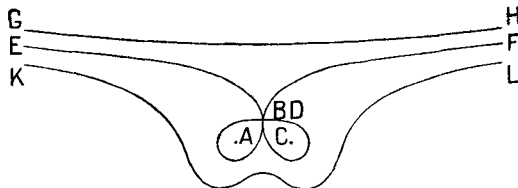
$$I'_n J_n = -2 i \cos \eta C C' M^2 e^{i\alpha} \cos \alpha, \quad I_n J'_n = 2 \cos \eta C C' M^2 e^{i\alpha} \sin \alpha,$$

$$1 = I'_n J_n - I_n J'_n = -2 i \cos \eta C C' M^2$$

et enfin

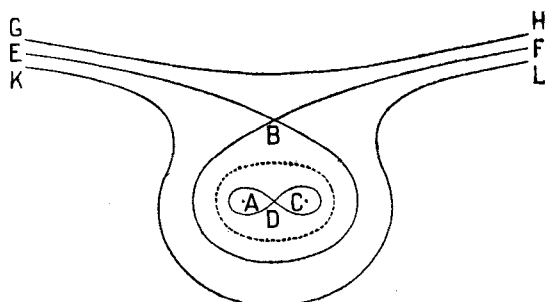
$$(7) \quad I'_n J_n = \frac{I''_n J_n}{I'_n J_n - I_n J'_n} = e^{i\alpha} \cos \alpha.$$

Le cas suivant est celui où $\chi = 1$. Dans ce cas les points B et D se confondent, et les courbes de la Fig. 3 doivent être modifiées comme l'indique la Figure 4



(Fig. 4).

Nous reviendrons sur ce cas. Vient ensuite le cas où $\chi > 1$; dans ce cas les deux valeurs singulières de x qui correspondent aux points B et D sont l'une et l'autre purement imaginaires. Les courbes se comportent comme sur la Figure 5 :



(Fig. 5).

Quand on intégrera depuis A jusqu'à l' ∞ pour obtenir I_n , le chemin d'intégration devra passer par le point B , sous peine de franchir des régions où la partie imaginaire de θ est plus petite qu'en B ; de même, quand on intégrera de A en C pour obtenir J_n le chemin d'intégration devra passer par le point D , mais il ne sera pas nécessaire de le faire passer en B .

Pour le calcul des éléments de l'intégrale (2) voisins de B ou de D , nous pourrions toujours nous servir des mêmes formules et écrire

$$y = M e^{i\alpha} \quad (\text{en } B), \quad y = M e^{-i\alpha} \quad (\text{en } D),$$

M et α étant toujours définis de la même manière. Seulement il ne faut pas oublier que M et α ne sont plus réels; les deux quantités imaginaires $M e^{i\alpha}$ et $M e^{-i\alpha}$ ne sont plus conjuguées et n'ont plus même module; la seconde est beaucoup plus petite en valeur absolue que la première. Nous aurons encore:

$$I_n = C M e^{i\alpha},$$

mais la formule pour J_n sera modifiée puisque le chemin d'intégration ne passe plus en B et nous aurons:

$$J_n = C' M e^{-i\alpha}.$$

On tire de là, comme plus haut,

$$\frac{I'_n}{I_n} = -i \cos \eta, \quad \frac{J'_n}{J_n} = i \cos \eta,$$

$$I'_n J_n = \frac{I'_n J_n}{I'_n J_n - J'_n I_n} = \frac{\frac{I'_n}{I_n}}{\frac{I'_n}{I_n} - \frac{J'_n}{J_n}} = \frac{-i \cos \eta}{-i \cos \eta - (i \cos \eta)},$$

ou enfin

$$(8) \quad I'_n J_n = \frac{1}{2}.$$

§ 12.

Étude des cas limites.

Nous devons revenir sur le cas de $\chi = 1$ ou voisin de 1. Si l'on appliquait l'une des formules (5) ou (5^{bis}) du § précédent, on trouverait que pour $\chi = 1$, on a $\eta = 0$, de sorte que les seconds membres de (5) ou (5^{bis}) deviennent infinis. On devrait donc conclure que quand χ tend vers 1, J_n et I_n tendent vers l'infini. Il est clair qu'il n'en est rien, et d'ailleurs si on se reporte à la figure, on voit que pour $\chi = 1$ les points B et D se confondent; l'intégrale (2) prend alors la forme:

$$\int \eta e^{i\omega\theta} dx,$$

où θ' et θ'' s'annulent à la fois. On peut, dans le voisinage du point singulier, où nous supposons qu'on ait transporté l'origine par un changement simple de variable, prendre $\eta = \text{const.}$:

$$\theta = \alpha + \beta x^3.$$

On a alors l'intégrale

$$\eta e^{i\omega\alpha} \int e^{i\omega\beta x^3} dx,$$

qui est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt[3]{\omega}}$, au lieu d'être de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$. Ce qui arrive donc ce n'est

pas que J_n devienne infini pour $\chi = 1$, mais que le rapport de la valeur de J_n pour $\chi = 1$, à sa valeur pour $\chi < 1$, est *très grand*, et, pour préciser, très grand de l'ordre de $\omega^{\frac{1}{6}}$.

En effet, les raisonnements par lesquels nous avons établi nos formules approchées ne sont plus valables si deux points singuliers, par exemple deux maxima ou minima de θ , sont très rapprochés l'un de l'autre. Il importe de voir comment se fait le raccordement des diverses formules approchées.

A cet effet, envisageons l'intégrale

$$(1) \quad y = \int e^{i\omega\theta} dx,$$

où

$$\theta = x\alpha^2 - \frac{x^3}{3}.$$

La dérivée de θ s'annule pour $x = \pm \alpha$; qu'arrive-t-il si α est très petit en même temps que ω très grand? Les seuls éléments sensibles de l'intégrale sont ceux qui sont voisins de $\pm \alpha$, et par conséquent de zéro. Nous pouvons donc choisir les limites arbitrairement; nous les prendrons à l'infini avec des arguments différents de 120° et choisis de telle sorte que

$$e^{-i\omega \frac{x^3}{3}} = 0.$$

Pour transformer l'intégrale (1), posons

$$x = \xi \omega^{-\frac{1}{3}};$$

il viendra

$$y = \omega^{-\frac{1}{3}} \int e^{i\left(t\xi - \frac{\xi^3}{3}\right)} d\xi$$

avec

$$t = \alpha^2 \omega^{\frac{2}{3}}.$$

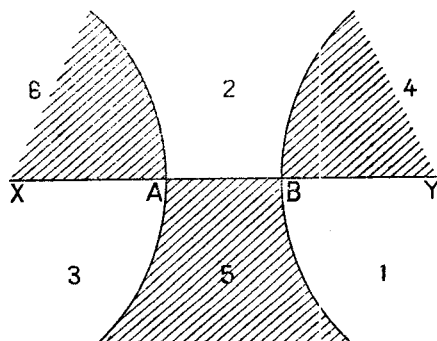
Il est aisé de vérifier que y satisfait à l'équation

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + ty = 0;$$

on voit tout de suite que y est une *fonction entière de t* , développable suivant les puissances croissantes de t et que la loi des coefficients successifs de ce développement est très simple. Mais il importe de préciser davantage; pour cela, je suppose t réel positif et je construis les courbes d'égale partie imaginaire de l'expression

$$t\xi - \frac{\xi^3}{3}.$$

J'obtiens ainsi la figure suivante:



(Fig. 6).

Nous supposons $\omega > 0$, et nous faisons la figure dans le plan des x .

Les courbes tracées sont celles pour lesquelles la partie imaginaire est nulle; les points A et B sont les points singuliers

$$\xi = \pm \sqrt[3]{t} \quad \text{ou} \quad x = \pm \omega^{-\frac{1}{3}} \sqrt[3]{t};$$

les régions couvertes de hachures sont celles où la partie imaginaire est négative; ce sont celles où le contour d'intégration, sous sa forme définitive, ne doit pas *pénétrer*. Nous distinguerons trois déterminations remarquables de notre intégrale que j'appellerai

$$\int_3^1, \quad \int_1^2, \quad \int_2^3,$$

parce que la première, par exemple, est prise depuis $\xi = \infty$ dans la région 3 jusqu'à $\xi = \infty$ dans la région 1. Ces trois déterminations ne sont pas indépendantes et leur

somme est évidemment nulle, puisque les trois contours d'intégration réunis équivalent à un contour fermé. Si la 1^{ère} est représentée par $F(t)$, les deux autres le seront par

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} F(te^{\frac{2i\pi}{3}}), \quad e^{\frac{4i\pi}{3}} F(te^{\frac{4i\pi}{3}}).$$

Celle qui nous convient, c'est celle qui équivaut à l'intégrale prise le long de l'axe réel; c'est donc $\int_3^{\infty} = F(t)$. Les deux premiers coefficients du développement de F , suivant les puissances de t ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\xi^3}{3}} d\xi, \quad i \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-i\frac{\xi^3}{3}} d\xi,$$

intégrales prises le long de l'axe réel, se calculent aisément par les fonctions eulériennes, et il est encore plus aisé d'en déduire les coefficients suivants par l'équation (2). Les termes en $t^2, t^5, t^8, \dots$ manquent. Soit donc

$$(3) \quad F(t) = A_0 + A_1 t + \dots$$

avec

$$A_0 = 3^{-\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \quad A_1 = 3^{\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

On aura: pour $t = 0$, $y = A_0 \omega^{-\frac{1}{3}}$; pour t très petit,

$$y = A_0 \omega^{-\frac{1}{3}} + A_1 t \omega^{-\frac{1}{3}} = A_0 \omega^{-\frac{1}{3}} + A_1 \alpha^2 \omega^{\frac{1}{3}}.$$

Qu'arrive-t-il pour t très grand? On doit remplacer l'intégrale $F(t)$ par sa valeur asymptotique; celle-ci pourrait se calculer directement, mais il est plus simple d'appliquer les formules (2) et (2^{bis}) du § 8. On trouve:

$$x = -\alpha \quad \text{min.}; \quad \theta = -\frac{2\alpha^3}{3}; \quad \theta'' = 2\alpha$$

$$x = \alpha \quad \text{max.}; \quad \theta = +\frac{2\alpha^3}{3}; \quad \theta'' = -2\alpha,$$

d'où, par application des formules du § 8,

$$y = \sqrt{\frac{\pi}{\omega \alpha}} \left[e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{2\alpha^3 \omega}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{2\alpha^3 \omega}{3}} \right]$$

ou

$$y = 2 \sqrt{\frac{\pi}{\omega \alpha}} \cos\left(\frac{2\alpha^3 \omega}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

ou enfin:

$$y = 2 \sqrt{\pi} \omega^{-\frac{1}{3}} t^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

ou

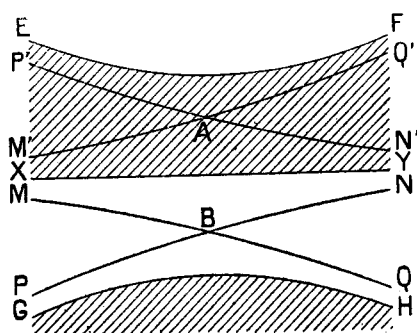
$$(4) \quad F(t) = 2 \sqrt{\pi} t^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Lorsque t est très grand, mais négatif, cette formule doit être modifiée. Les deux points

singuliers deviennent imaginaires

$$\xi = \pm i\sqrt{|\eta|}.$$

Les courbes de la Figure 6 se déforment et prennent la disposition de la Figure 7 :



(Fig. 7).

Les courbes en trait plein EF , XY et GH sont les courbes de partie imaginaire nulle; les régions hachées sont celles où cette partie imaginaire est négative.

J'ai tracé en outre les deux courbes $MNPQ$ et $M'N'P'Q'$ qui ont les points singuliers A et B pour points doubles. Sur la 1^{ère} la partie imaginaire est constante et positive; sur la 2^{de} constante et négative.

Nous pouvons alors tracer notre chemin d'intégration par le point B , d'abord entre les deux branches MB et PB , puis entre les deux branches BN et BQ . Les seuls éléments sensibles sont voisins de B et il nous reste

$$F_1(t) = \sqrt{\pi} t^{-\frac{1}{4}} e^{-i(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4})},$$

en attribuant à t l'argument qui convient pour le point B , c'est-à-dire pour

$$\xi = -i\sqrt{|\eta|},$$

c'est-à-dire l'argument π , et par conséquent à $t^{-\frac{1}{4}}$, $t^{\frac{3}{2}}$ les arguments $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$.

Appliquons ces principes au calcul approché de J_n et reprenons les notations du § précédent. Nous avons trouvé pour χ notablement plus petit que 1 :

$$J_n = 2 C' M \cos \alpha$$

et pour χ notablement plus grand que 1 :

$$J_n = C' M e^{-i\alpha}.$$

Ces deux expressions proportionnelles à $\omega^{-\frac{1}{2}}$, deviendraient infinies pour $\chi=1$; pour $\chi=1$, le calcul direct nous donnerait une troisième expression contenant en facteur $\omega^{-\frac{1}{3}}$, et il s'agit d'opérer le raccordement de ces trois expressions.

Reprenons la formule (6) du § précédent qui donne α , et faisons-y

$$\eta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad n = \chi \xi = \xi \sin \eta = \xi \cos \varepsilon;$$

il viendra (inutile d'ajouter que ξ n'a plus la même signification que dans le début du présent § mais bien celle qu'il avait dans le § précédent):

$$\alpha = -\xi \sin \varepsilon + \xi \varepsilon \cos \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4} - n\pi,$$

ou, si ε est très petit et $\xi \varepsilon^3$ fini ou très grand,

$$\alpha = -\frac{\xi \varepsilon^3}{3} + \frac{\pi}{4} - n\pi.$$

L'analogie avec l'analyse qui précède et l'étude de l'intégrale (1) est évidente. Il suffit pour passer d'un cas à l'autre de faire jouer à ε le rôle de α , et à ξ celui de 2ω . Soit donc

$$(-1)^n C' M = \sqrt{\frac{2\pi}{\xi \varepsilon}} M_1, \quad t = \varepsilon^2 \left(\frac{\xi}{2} \right)^{\frac{2}{3}},$$

et comme M est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{\cos \eta}} = \frac{1}{\sqrt{\sin \varepsilon}}$, on aura $M_1 = K \sqrt{\frac{\xi \varepsilon}{\sin \varepsilon}}$, K étant un coefficient constant. Nous aurons:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{pour } \chi \text{ notablement } < 1: & J_n = 2 \sqrt{\frac{2\pi}{\xi \varepsilon}} M_1 \cos \left(\frac{2}{\varepsilon} t^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right); \\ \text{pour } \chi \text{ voisin de } 1: & J_n = M_1 \left(\frac{\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} F(t); \\ \text{pour } \chi = 1: & J_n = M_1 \left(\frac{\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} A_0; \\ \text{pour } \chi \text{ notablement } > 1: & J_n = \sqrt{\frac{2\pi}{\xi \varepsilon}} M_1 e^{-i \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right)} \end{array} \right.$$

Le raccordement est effectué, et on voit que $\frac{J_n}{M_1}$ est dans les deux cas extrêmes de l'ordre de $\xi^{-\frac{1}{2}}$ et dans les deux cas moyens de l'ordre de $\xi^{-\frac{1}{3}}$.

Il faut maintenant examiner ce qui se passe pour I_n .

L'intégrale qui correspond à I_n , est celle qui est prise le long d'un chemin passant par le point A , soit sur la figure 6, soit sur la figure 7, et allant de la région 3 à la région 2; c'est donc l'intégrale

$$\int_3^2 = -e^{\frac{4i\pi}{3}} F(te^{\frac{4i\pi}{3}}),$$

de sorte que nous aurons

$$(6) \quad I_n = C M_1 \left(\frac{\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} F(te^{\frac{4i\pi}{3}}) (-e^{\frac{4i\pi}{3}}),$$

t ayant le même sens que dans les formules (5).

Étudions maintenant les dérivées telles que I'_n et J'_n . Nous avons trouvé, en nous

rappelant la valeur de M_1 ,

$$J_n = K \sqrt{\frac{\xi \varepsilon}{\sin \varepsilon}} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} F(t),$$

K étant un coefficient constant; ε étant très petit, nous pouvons, en confondant l'arc avec le sinus et en incorporant $2^{\frac{1}{3}}$ au coefficient K , écrire:

$$(7) \quad J_n = K_1 \xi^{\frac{1}{6}} F(t)$$

et de même:

$$(8) \quad I_n = K'_1 \xi^{\frac{1}{6}} F(te^{\frac{4i\pi}{3}}),$$

K_1 et K'_1 étant constants. Les dérivées J'_n et I'_n doivent être prises par rapport à ξ ; mais t , ξ et ε sont liés par les relations:

$$t = \varepsilon^2 \left(\frac{\xi}{2} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad n = \xi \cos \varepsilon;$$

on tire de là:

$$\frac{dt}{t} = \frac{2d\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{2}{3} \frac{d\xi}{\xi}, \quad d\xi = \xi \operatorname{tg} \varepsilon d\varepsilon$$

ou sensiblement:

$$\frac{dt}{t} = \frac{2d\varepsilon}{\varepsilon}, \quad d\xi = \xi \varepsilon d\varepsilon, \quad \frac{dt}{d\xi} = \frac{2t}{\xi \varepsilon^2} = \left(\frac{2}{\xi} \right)^{\frac{1}{3}},$$

d'où:

$$J'_n = K_1 \sqrt[3]{2} \xi^{-\frac{1}{6}} F'(t) + \frac{K_1}{6} \xi^{-\frac{5}{6}} F(t),$$

$$I'_n = K'_1 \sqrt[3]{2} e^{\frac{4i\pi}{3}} \xi^{-\frac{1}{6}} F'(te^{\frac{4i\pi}{3}}) + \frac{K'_1}{6} \xi^{-\frac{5}{6}} F(te^{\frac{4i\pi}{3}}).$$

On vérifie que

$$I'_n J_n - J'_n I_n = K_1 K'_1 \sqrt[3]{2} [e^{\frac{4i\pi}{3}} F'(te^{\frac{4i\pi}{3}}) F(t) - F'(t) F(te^{\frac{4i\pi}{3}})]$$

se réduit bien à une constante; de sorte qu'il est possible de disposer des coefficients K_1 et K'_1 de telle façon que cette expression se réduise à 1. On trouve d'ailleurs:

$$(9) \quad I'_n J_n = K_1 K'_1 [\sqrt[3]{2} e^{\frac{4i\pi}{3}} F'(te^{\frac{4i\pi}{3}}) F(t) + \frac{1}{6} \xi^{-\frac{2}{3}} F(t) F(te^{\frac{4i\pi}{3}})].$$

On voit que $I'_n J_n$ se décompose en deux termes; le premier est une fonction entière de t , le second, négligeable par rapport au premier, est une fonction entière de t , multipliée par $\xi^{-\frac{2}{3}}$.

Revenons à la Figure 6. Nos trois intégrales fondamentales sont, comme on l'a vu,

$$\int_3^1 = F(t), \quad \int_1^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} F(te^{\frac{2i\pi}{3}}), \quad \int_2^3 = e^{\frac{4i\pi}{3}} F(te^{\frac{4i\pi}{3}}).$$

La 1^{ère} est réelle, les deux autres sont imaginaires conjuguées. Tout cela suppose que ω est positif. Supposons maintenant $\omega < 0$ et reprenons la Figure 6. Les régions

où la quantité sous le signe $\int$ sera très petite, ne seront plus celles qui ne sont pas couvertes de hachures, mais au contraire les régions 4, 5 et 6 qui sont couvertes de hachures, puisque l'exposant $-i\omega \frac{x^3}{3}$ a changé de signe. Les intégrales que nous avons à envisager sont donc les suivantes :

$$\int_6^4, \quad \int_4^5, \quad \int_5^6.$$

La 1^{ère} est égale à $F(t)$; en effet l'intégrale peut être considérée comme prise le long de l'axe réel: les deux intégrales

$$\int_3^1 e^{i\omega\theta} dx, \quad \int_6^4 e^{-i\omega\theta} dx$$

seront donc imaginaires conjuguées; la 1^{ère} est réelle et égale à $F(t)$; il en sera donc de même de la seconde. De même

$$\int_1^2 e^{i\omega\theta} dx, \quad \int_4^5 e^{-i\omega\theta} dx$$

seront imaginaires conjugués, puisque les deux chemins 1.2 et 4.5 sont imaginaires conjugués; nous aurons donc :

$$\int_4^5 = \int_2^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}} F(te^{\frac{2i\pi}{3}}).$$

§ 13.

Calcul de A_n .

Reportons-nous aux formules (2) et (9) du § 6, paragraphe dont nous reprenons les notations.

Dans ces formules figure un coefficient A_n dont il convient de calculer la valeur approchée. Nous trouverons plus loin, au § 16, une expression simple et rigoureuse pour ce coefficient A_n . Nous allons néanmoins indiquer deux méthodes différentes pour le calcul approché de ce coefficient.

A cet effet je me servirai de la formule suivante. Soit F une fonction quelconque de l'angle φ , elle pourra être développée en série de polynômes de LEGENDRE sous la forme :

$$F(\varphi) = \sum K_n P_n(\cos \varphi)$$

et on aura :

$$(1) \quad \frac{2K_n}{2n+1} = \int_{-1}^{+1} F(\varphi) P_n(\cos \varphi) d(\cos \varphi) = \int_0^\pi F(\varphi) P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = \int P_n F \frac{d\sigma}{2\pi},$$

$d\sigma$ représentant l'élément de surface de la sphère.

Si nous appliquons cette règle à la formule (2) du § 6, que j'écris :

$$(2) \quad f'^* = e^{i\omega t} \sum A_n J_n(\omega \rho) \frac{1}{\rho^2} P_n(\cos \varphi),$$

nous trouverons :

$$(3) \quad \frac{2e^{i\omega t}}{2n+1} A_n J_n(\omega \rho) \frac{1}{\rho^2} = \int_0^\pi f'^* P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Quant à f'^* , c'est une fonction de φ , définie par la formule (1) du § 6; rappelons d'ailleurs que l'on a, dans le triangle SOM dont les côtés sont r , D et ρ , et les angles φ , θ et $\pi - \xi$:

$$\frac{\sin \xi}{D} = \frac{\sin \varphi}{r} = \frac{\sin \theta}{\rho}.$$

Nous devons considérer ρ et D comme donnés, de sorte que r sera donné en fonction de φ par

$$r^2 = \rho^2 + D^2 - 2D\rho \cos \varphi.$$

Supposons d'abord ρ sensiblement plus petit que D , de telle façon que r ne puisse devenir très petit; nous pourrions alors profiter de la grandeur de ω pour appliquer nos formules approchées. D'abord nous pouvons réduire la formule (1) du § 6 à son premier terme et écrire :

$$(4) \quad 4\pi f'^* = e^{i\omega(t-r)} \frac{i\omega}{r} \sin \theta \sin \xi.$$

D'autre part, nous pouvons remplacer P_n par sa valeur approchée du § 10 et écrire :

$$P_n = \cos \left(n\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \varphi}}.$$

Nous avons donc à envisager l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \int_0^\pi e^{-i\omega r} \cos \left(n\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\sin \varphi} d\varphi,$$

en supprimant dans les deux membres de (3) le facteur $e^{i\omega t}$.

Cette intégrale se décompose en deux que j'écris, en omettant le facteur $\frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$:

$$(5) \quad \int e^{i(n\varphi - \omega r)} e^{i\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\sin \varphi} d\varphi$$

et

$$(5^{bis}) \quad \int e^{-i(n\varphi + \omega r)} e^{-i\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\sin \varphi} d\varphi.$$

Comme n est un très grand nombre et que l'on peut poser

$$n = \chi \omega \rho = \omega \rho \sin \eta,$$

on voit que ces deux intégrales sont de la forme $\int e^{i\omega \theta} \eta d\varphi$, considérée au § 8, mais où la fonction qui joue le rôle de θ est de la forme :

$$(6) \quad \begin{array}{ll} (\chi \varphi \rho - r) & \text{pour l'intégrale (5);} \\ (6^{bis}) & -(\chi \varphi \rho + r) \quad \text{pour l'intégrale (5}^{bis}). \end{array}$$

Nous sommes donc conduits à rechercher les maxima et les minima des expressions (6) et (6^{bis}); la dérivée de (6) est

$$\zeta \rho - \frac{dr}{d\varphi} = \zeta \rho - \frac{D \rho \sin \varphi}{r}.$$

En l'égalant à zéro, nous trouvons

$$\zeta r = D \sin \varphi = r \sin \xi$$

ou

$$\sin \xi = \zeta = \sin \eta.$$

Cela comporte deux solutions:

$$\xi = \eta, \quad \xi = \pi - \eta.$$

Il est aisé de construire les deux triangles SOM correspondants. La valeur l'angle θ sera la même pour ces deux triangles; je l'appelle θ_0 et elle est donnée par

$$\sin \theta_0 = \frac{n}{\omega D}.$$

Cet angle est réel si $n < \omega D$, ce que nous supposons d'abord. Cela posé, les points S et O sont fixes, nous construirons la droite SM qui fait cet angle θ_0 avec SO ; nous la coupons par la circonférence de centre O et de rayon ρ ; les deux points d'intersection nous donneront les deux positions possibles du point M , que j'appellerai M_0 et M_1 ; j'appellerai φ_0 et φ_1 , r_0 et r_1 les valeurs correspondantes de φ et de r . J'aurai:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \eta - \theta_0, \quad \varphi_1 = \pi - \eta - \theta_0, \quad \varphi_1 - \varphi_0 = \pi - 2\eta, \quad \varphi_1 + \varphi_0 = \pi - 2\theta_0, \\ r_0 + r_1 &= 2D \cos \theta_0, \quad r_1 - r_0 = 2\rho \cos \eta. \end{aligned}$$

Il faut pour que ces points soient réels que ρ soit plus grand que $\frac{n}{\omega}$.

Pour la formule (6^{bis}) on trouverait de même:

$$\zeta r = -D \sin \varphi = -r \sin \xi, \quad \sin \xi = -\sin \eta,$$

ce qui est impossible car les angles ξ et η sont par hypothèse compris tous deux entre 0 et π . La formule (6^{bis}) ne présente donc pas de maximum et de minimum, de sorte que nous n'avons pas à nous inquiéter de l'intégrale (5^{bis}); au contraire, nous devons appliquer à l'intégrale (5) les formules (2) et (2^{bis}) du § 8. Nous observerons que $\varphi = \varphi_0$ correspond à un maximum et $\varphi = \varphi_1$ à un minimum; et il nous faut pour appliquer les formules du § 8 rechercher les valeurs des quantités qui correspondent aux angles θ_0 et θ'' de ce paragraphe.

En ce qui concerne le θ du § 8, nous trouvons:

$$\begin{aligned} \rho \varphi_0 \sin \eta - r_0 & \quad (\text{pour } \varphi_0); \\ \rho \varphi_1 \sin \eta - r_1 & \quad (\text{pour } \varphi_1). \end{aligned}$$

En ce qui concerne le η du § 8 nous trouvons:

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{r_0} \sin \theta_0 \sin \eta e^{i\left(\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\sin \varphi_0} & \quad (\text{pour } \varphi_0); \\ \frac{i\omega}{r_1} \sin \theta_0 \sin \eta e^{i\left(\frac{\varphi_1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\sin \varphi_1} & \quad (\text{pour } \varphi_1). \end{aligned}$$

Reste la dérivée seconde θ'' du § 8; elle est égale à $-\frac{d^2 r}{d\varphi^2}$ et on trouve, par un calcul simple, en partant des relations trigonométriques et les différentiant,

$$\begin{aligned} r \frac{dr}{d\varphi} &= D\rho \sin \varphi = Dr \sin \theta, \\ \frac{dr}{d\varphi} &= D \sin \theta, \quad \frac{d^2 r}{d\varphi^2} = D \cos \theta \frac{d\theta}{d\varphi}, \\ D \cos \theta d\varphi &= \rho \cos \xi d\xi = \rho \cos \xi (d\theta + d\varphi), \\ \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{\rho \cos \xi}{D \cos \theta - \rho \cos \xi} = \frac{\rho \cos \xi}{r}, \quad \frac{d^2 r}{d\varphi^2} = \frac{D\rho}{r} \cos \xi \cos \theta. \end{aligned}$$

La dérivée seconde cherchée est donc :

$$\begin{aligned} & -\frac{D\rho}{r_0} \cos \eta \cos \theta_0 \quad (\text{pour } \varphi_0); \\ & +\frac{D\rho}{r_1} \cos \eta \cos \theta_0 \quad (\text{pour } \varphi_1). \end{aligned}$$

Les formules (2) et (2^{bis}) du § 8 nous donnent alors pour l'intégrale (5):

$$(7) \left[\frac{i\omega}{r_0} \sqrt{\sin \varphi_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \cos \eta \cos \theta_0} \frac{D\rho}{r_0}} e^{i\beta_0} + \frac{i\omega}{r_1} \sqrt{\sin \varphi_1} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \cos \eta \cos \theta_0} \frac{D\rho}{r_1}} e^{i\beta_1} \right] \sin \theta_0 \sin \eta$$

avec

$$(8) \begin{cases} \beta_0 = \omega(\rho \varphi_0 \sin \eta - r_0) + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{2}, \\ \beta_1 = \omega(\rho \varphi_1 \sin \eta - r_1) + \frac{\varphi_1}{2}. \end{cases}$$

Si l'on se rappelle que

$$\frac{r_0}{\sin \varphi_0} = \frac{r_1}{\sin \varphi_1} = \frac{\rho}{\sin \theta_0},$$

on voit que l'expression (7) prend immédiatement la forme :

$$(7^{\text{bis}}) \frac{i\sqrt{2\pi\omega \sin \theta_0 \sin \eta}}{\sqrt{D\rho \cos \theta_0 \cos \eta}} \sqrt{\frac{\sin \theta_0}{\rho}} (e^{i\beta_0} + e^{i\beta_1})$$

et alors notre équation (3) s'écrit :

$$(3^{\text{bis}}) \frac{2A_n}{2n+1} J_n(\omega\rho) \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{i\sqrt{2\pi\omega \sin \theta_0 \sin \eta}}{\sqrt{D\rho \cos \theta_0 \cos \eta}} \sqrt{\frac{\sin \theta_0}{\rho}} (e^{i\beta_0} + e^{i\beta_1}).$$

Nous allons dans le 1^{er} membre remplacer J_n par sa valeur approchée. Nous avons vu au § 11 que J_n est égal, à un facteur constant près, à

$$\frac{1}{\sqrt{\cos \eta}} \cos \alpha,$$

où

$$\alpha = -\xi \cos \eta - n\eta - \frac{\eta}{2} - (n-1)\frac{\pi}{2}$$

Dans cette formule η et n ont la même signification que dans le présent §, mais ξ représente l'argument de J_n et doit être remplacé par $\omega\rho$. On a donc :

$$(9) \quad \alpha = -\omega\rho \cos \eta - \omega\rho \eta \sin \eta - \frac{\eta}{2} - (n-1)\frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, les formules (8), et celles qui nous donnent les sommes et les différences $\varphi_i \pm \varphi_o$, $r_i \pm r_o$, nous donnent :

$$\beta_i + \beta_o = \omega\rho \sin \eta (\pi - 2\theta_o) - 2\omega D \cos \theta_o - \theta_o,$$

$$\beta_i - \beta_o = \omega\rho \sin \eta (\pi - 2\eta) - 2\omega\rho \cos \eta - \eta + \pi$$

ou

$$\beta_i - \beta_o = -2\omega\rho \cos \eta - 2\omega\rho \eta \sin \eta - \eta + (n+1)\pi$$

ou

$$\beta_i - \beta_o = 2\alpha + 2n\pi.$$

D'autre part, nous poserons $\beta_i + \beta_o = 2\gamma$ et nous aurons :

$$(10) \quad \gamma = \frac{n\pi}{2} - n\theta_o - \omega D \cos \theta_o - \frac{\theta_o}{2},$$

d'où

$$e^{i\beta_o} + e^{i\beta_i} = 2(-1)^n \cos \alpha e^{i\gamma}.$$

Nous remarquerons en outre que $\sin \eta = \frac{n}{\omega\rho}$ et que

$$J_n = 2K \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos \eta}},$$

K étant un coefficient constant; notre formule (3^{bis}) deviendra :

$$\frac{4A_n}{2n+1} K \frac{\cos \alpha}{\rho^2 \sqrt{\cos \eta}} = \frac{i}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{n \sin \theta_o}{\rho^2 \sqrt{\cos \eta}} \sqrt{\frac{\sin \theta_o}{D \cos \theta_o}} 2(-1)^n \cos \alpha e^{i\gamma}$$

ou enfin

$$(11) \quad A_n K = i(-1)^n e^{i\gamma} \frac{2n+1}{8\pi} \frac{n}{\sqrt{n\omega}} \frac{\sin \theta_o}{\sqrt{D \cotg \theta_o}}.$$

Comme θ_o et, par conséquent, γ ne dépendent que de D , ω et n et sont indépendants de ρ , on voit que, *comme il convient*, $A_n K$ ne dépend pas de ρ .

Au sujet de l'ordre de grandeur de $A_n K$, nous voyons que n et ω étant très grandes du 1^{er} ordre, $A_n K$ sera également très grand du 1^{er} ordre.

Le coefficient K n'est pas entièrement déterminé, puisque la fonction J_n n'est définie qu'à un facteur constant près, mais si on convient de définir cette fonction par l'intégrale (1) du § 11, *sans facteur constant*, les formules (5) et (5^{bis}) du § 11 nous montrent que l'on a :

$$K = 2^n n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

ou, avec la même approximation,

$$K = 2^n n!$$

La formule (11) nous donnera donc :

$$(12) \quad A_n = i(-1)^n 2^{-n} n^{-n} e^n e^{i\gamma} \frac{n}{4\pi \sqrt{\omega}} \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{D \cotg \theta_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Nous avons ici quelques remarques à faire :

1° Pour obtenir la formule (12), nous avons pris pour point de départ l'intégrale (3), nous en avons cherchée une expression approchée, qui est l'expression (3^{bis}); remarquons que cette expression (3^{bis}) est de degré zéro, si on considère n et ω comme très grands de degré 1.

Pour obtenir cette expression approchée, nous nous sommes servis des principes du § 8, c'est-à-dire que nous avons déformé le chemin d'intégration [en ce qui concerne l'intégrale (5)], de façon que tout le long de ce chemin la fonction sous le signe $\int$ ait son module très petit, sauf en certains points qui correspondent aux maxima ou minima de Θ , et aux extrémités de ce chemin. Il suffit alors d'envisager les éléments voisins de ces points.

Nous avons envisagé seulement les éléments voisins des maxima ou minima de Θ et c'est ce qui nous a donné l'équation (3^{bis}), mais nous avons laissé de côté les éléments voisins des extrémités du chemin d'intégration, c'est-à-dire des points $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. En général, les principes du § 8 permettent de démontrer que cette partie de l'intégrale est beaucoup plus petite que la partie qui provient des éléments voisins d'un maximum ou d'un minimum de Θ . Seulement ici, nous ne pouvons plus appliquer sans explication les principes en question; parce que la valeur approchée de P_n , dont nous nous sommes servis, n'est plus valable pour φ voisin de 0 ou de π . Cherchons donc à nous rendre compte de l'ordre de grandeur de l'intégrale

$$(13) \quad \int_0^\varepsilon f'^* P_n \sin \varphi d\varphi,$$

ε étant une valeur telle que depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \varepsilon$ la valeur approchée de P_n ne soit plus valable, c'est-à-dire une valeur de l'ordre de $\frac{1}{n}$. Alors P_n sera plus petit que 1; f'^* sera de l'ordre de ω , à cause de la présence du facteur $i\omega$; $\sin \varphi$ sera de l'ordre de ε , et l'intégrale de l'ordre de $\omega \varepsilon^2$, ou de $\frac{\omega}{n^2}$, ou de $\frac{1}{n}$; elle sera donc négligeable vis-à-vis de l'expression (3^{bis}); on pourrait même montrer qu'elle est d'un ordre de petitesse beaucoup plus élevé encore; et beaucoup plus élevé que celui auquel conduirait l'application des principes du § 8, si la formule approchée qui donne P_n restait applicable pour les petites valeurs de φ .

2° Pour établir la formule (12), nous avons supposé $\rho < D$, $n < \omega \rho$; nous pouvons choisir ρ de façon à satisfaire à ces deux conditions, pourvu que $n < \omega D$. Si cette dernière condition est remplie, nous pourrions répéter le calcul en supposant $\rho > D$, $n > \omega \rho$; la formule (12) restera vraie, puisqu'elle est indépendante de ρ . Dans ce cas, la formule

$$J_n = 2K \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos \eta}} = \frac{K}{\sqrt{\cos \eta}} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$$

doit être remplacée par la suivante (d'après les formules de la fin du § 11):

$$J_n = \frac{K}{\sqrt{\cos \eta}} (e^{-i\alpha}).$$

Si nous remplaçons J_n par cette valeur, et A_n par l'expression (12) dans l'expression de

$$\frac{2 A_n J_n}{2n+1} \frac{1}{\rho^2},$$

nous retrouverons une expression analogue à (3^{bis}) , mais où dans le dernier facteur, au lieu de deux termes $(e^{i\beta_0} + e^{i\beta_1})$ on n'en aura plus qu'un, $e^{i\beta_0}$; c'est également le résultat auquel on serait arrivé en appliquant les formules du § 8 aux intégrales (5) et (5^{bis}) , mais en tenant compte seulement des éléments voisins des maxima et minima de Θ , en négligeant les éléments voisins des extrémités, en négligeant, par conséquent, l'intégrale (13). Seulement ici l'expression (3^{bis}) ainsi modifiée n'est plus de l'ordre de 1, comme dans le cas précédent; comme la partie imaginaire de β_0 est très grande, elle est de l'ordre de $e^{-\lambda\omega}$, λ étant un nombre positif; elle est donc beaucoup plus petite que les quantités de l'ordre de $\frac{1}{n}$ ou de $\frac{1}{\omega}$.

Nous avons montré plus haut que l'intégrale (13) est de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$, ou qu'elle est plus petite encore. Si elle était précisément de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$, nous n'aurions pas le droit de la négliger.

Mais comme nous savons que notre formule (12) reste vraie dans tous les cas, puisqu'elle est indépendante de ρ , nous savons aussi que notre formule (3^{bis}) modifiée est vraie.

Nous en concluons que l'intégrale (13) doit être négligée, même devant $e^{-\lambda\omega}$, et par conséquent qu'elle est beaucoup plus petite que $\frac{1}{\omega}$.

3° Supposons maintenant $n > \omega D$, nous ne pourrions plus raisonner comme nous venons de le faire; les formules (3^{bis}) modifiée et (12) sont encore vraies, mais nous n'avons plus le moyen de les démontrer. Pour cela il faudrait pouvoir établir directement que l'intégrale (13) est négligeable, même devant $e^{-\lambda\omega}$; on y pourrait parvenir en transformant nos intégrales, et en particulier l'intégrale (13), par n intégrations successives par parties; de façon à introduire, au lieu de P_n , qui est proportionnel à la dérivée n^{e} de $(\cos^2 \varphi - 1)^n$ par rapport à $\cos \varphi$, à introduire dis-je la fonction $(\cos^2 \varphi - 1)^n$ elle-même. Mais la démonstration serait longue et compliquée, et je préfère employer une seconde méthode où toutes ces difficultés ne se présentent pas.

§ 14.

Deuxième méthode.

Reprenons la formule approchée qui donne f^* [formule (4) du § 13]:

$$(1) \quad 4\pi f^* = e^{i\omega(t-r)} \frac{i\omega}{r} \sin \theta \sin \xi$$

et la formule (2) du § 6, que j'écrirai :

$$(2) \quad f^* = e^{i\omega t} \sum A_n J_n(\omega \rho) \frac{1}{\rho^2} P_n(\cos \varphi).$$

Nous ferons d'ailleurs dans ces formules $t = 0$ pour nous débarrasser du facteur $e^{i\omega t}$ qui ne fait qu'allonger les écritures.

Comme on a

$$\frac{\sin \xi}{D} = \frac{\sin \varphi}{r} = \frac{\sin \theta}{\rho},$$

la première formule devient :

$$(3) \quad 4\pi f^* = e^{-i\omega r} \frac{i\omega}{r^3} D \rho \sin^2 \varphi$$

et l'équation (2) peut s'écrire :

$$(4) \quad \frac{i\omega D}{4\pi r^3} e^{-i\omega r} (\rho \sin \varphi)^2 = \sum A_n \frac{J_n(\omega \rho)}{\rho} P_n(\cos \varphi).$$

Les deux membres de cette égalité sont développables suivant les puissances croissantes de $\rho \cos \varphi$ et de $\rho \sin \varphi$; il en est évidemment ainsi de r et de $\rho \sin \varphi$, et par conséquent du 1^{er} membre. Dans le 2^d membre, le facteur $\frac{J_n}{\rho}$ procède suivant les puissances de ρ , le développement commençant par un terme en ρ^n et tous les exposants de ρ étant de même parité que n ; quant à P_n , c'est un polynôme de degré n en $\cos \varphi$, et les degrés de tous ses termes sont de même parité.

Ainsi nos deux membres sont développables suivant les puissances de

$$\rho e^{i\varphi} = \zeta, \quad \rho e^{-i\varphi} = \zeta'.$$

Nous sommes ainsi conduits à chercher ce que devient le second membre pour $\zeta' = 0$.

Nous considérerons $J_n(\omega \rho)$ comme défini par l'intégrale

$$J_n(\omega \rho) = \int_{-1}^{+1} e^{i\omega \rho x} (x^2 - 1)^n (\omega \rho)^{n+1} dx.$$

Le coefficient du 1^{er} terme, c'est-à-dire du terme en $(\omega \rho)^{n+1}$, sera

$$\int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n \frac{2(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

D'autre part, dans le polynôme $P_n(\cos \varphi)$, le coefficient de $(\cos \varphi)^n$ sera

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!}.$$

Considérons maintenant l'expression :

$$\frac{1}{\omega \rho} J_n P_n$$

et écrivons :

$$\frac{1}{\omega \rho} J_n = \sum a_p (\omega \rho)^{n+2p}, \quad P_n = \sum b_q (\cos \varphi)^{n-2q},$$

d'où

$$\frac{1}{\omega \rho} J_n P_n = \sum a_p b_q (\omega \rho \cos \varphi)^{n-2q} (\omega \rho)^{2p+2q}$$

ou

$$\frac{1}{\omega \rho} J_n P_n = \sum a_p b_q \left[\frac{\omega}{2} (\zeta + \zeta') \right]^{n-2q} (\omega^2 \zeta \zeta')^{p+q}.$$

On voit que si l'on fait $\zeta' = 0$, tous les termes disparaîtront sauf celui où $p = q = 0$ et il restera :

$$\frac{1}{\omega \rho} J_n P_n = \frac{a_0 b_0}{2^n} \omega^n \zeta^n.$$

Mais nous venons de trouver :

$$a_0 = (-1)^n \frac{2(2^n n!)^2}{(2n+1)!}, \quad b_0 = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!},$$

il reste donc :

$$(5) \quad \frac{1}{\omega \rho} J_n P_n = (-1)^n \frac{2 \omega^n \zeta^n}{2n+1}.$$

On a, d'autre part,

$$r^2 = (D - \zeta)(D - \zeta'), \quad \rho^2 \sin^2 \varphi = \left(\frac{\zeta - \zeta'}{2i} \right)^2,$$

d'où, pour $\zeta' = 0$,

$$r^2 = D^2 - D\zeta, \quad \rho^2 \sin^2 \varphi = -\frac{\zeta^2}{4},$$

de sorte que la formule (4) devient :

$$(6) \quad \sum \frac{2 A_n (-1)^n}{2n+1} \omega^n \zeta^n = \frac{-i e^{-i\omega r}}{16 \pi r^3} D \zeta^2.$$

Il nous suffira d'identifier les deux développements, en calculant les coefficients A_n par la formule de CAUCHY; nous trouverons ainsi :

$$(7) \quad (-1)^n \omega^n A_n = \frac{1}{2i\pi} \frac{(2n+1)}{2} \frac{(-iD)}{16\pi} \int \frac{e^{-i\omega r}}{r^3} \zeta^{1-n} d\zeta,$$

l'intégrale étant prise le long d'un petit contour fermé entourant le point $\zeta = 0$.

Mais il conviendra de changer de variable en prenant r au lieu de ζ comme variable indépendante. Nous avons trouvé

$$r^2 = D^2 - D\zeta,$$

d'où, si nous prenons D comme unité de longueur afin d'abrégier les écritures,

$$\zeta = 1 - r^2.$$

L'intégrale qui figure dans le 2^d membre de (7) peut alors s'écrire :

$$(8) \quad \int \frac{-2 e^{-i\omega r} dr}{r^2 (1 - r^2)^{n-1}}$$

et elle doit être prise le long d'un contour très petit entourant le point $r = 1$, c'est-à-dire $r = D$. Nous pouvons profiter de ce que les nombres ω et n sont très grands et chercher à construire les lignes d'égal module de la fonction

$$(9) \quad e^{-i\omega r} (1 - r^2)^{-n} = e^{-i\omega r} \zeta^{-n}.$$

Pour cela nous pouvons nous servir des figures 3 et 5 du § 11, la forme des courbes étant grossièrement la même. Deux cas sont à distinguer :

Si $n < \omega$, il faudra prendre la Figure 3; les points A et C représentent respectivement les points $r = -1$, $r = +1$; où notre module est égal à l'infini; ce module est donc plus grand en A et en C , ou encore sur la courbe GH ; et au contraire plus petit sur la courbe KL , qu'il ne l'est sur la courbe $EBMDNF$ qui passe par les deux points doubles B et D .

Si au contraire $n > \omega$, il faudra prendre la Figure 5; le module sera infini en A et C , plus petit sur la courbe qui passe en D , plus petit encore sur la courbe qui passe en B .

Cela posé, nous pouvons dans l'un et l'autre cas déformer notre contour d'intégration, et le remplacer par un contour fermé passant par le point D , ne coupant en aucun autre point la courbe d'égal module qui a un point double en D , enveloppant complètement la boucle qui contient le point C , et laissant complètement en dehors la boucle qui contient le point A . On voit que le module de la fonction sous le signe $\int$ sera beaucoup plus grand dans le voisinage du point D qu'il ne l'est sur tout le reste du contour. Nous pouvons donc, pour calculer l'intégrale, nous contenter d'envisager les éléments très voisins du point D et pour calculer ces éléments nous n'avons qu'à appliquer les principes du § 8.

Notre intégrale peut, comme au § 8, se mettre sous la forme:

$$\int e^{i\omega\Theta} H d\zeta$$

et l'on a

$$\Theta = -r + i\zeta \log \zeta,$$

en posant $n = \zeta\omega$. Le maximum de Θ correspondant au point D sera donné par

$$(10) \quad \frac{d\Theta}{d\zeta} = -\frac{dr}{d\zeta} + \frac{i\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2r} + \frac{i\zeta}{\zeta} = 0$$

ou

$$\zeta = -2ir\zeta, \quad r^2 - 2ir\zeta - 1 = 0.$$

Nous avons une équation du 2^d degré en r ; dans le cas où $n < \omega$, nous pouvons poser

$$\zeta = \sin \theta_0.$$

L'angle θ_0 a alors la même signification que dans le § 13, où nous avons posé

$$\frac{\sin \xi}{D} = \frac{\sin \theta_0}{\rho}, \quad \sin \xi = \frac{n}{\omega \rho},$$

d'où

$$n = \omega D \sin \theta_0$$

ou, en faisant $D = 1$, $\zeta = n\omega$,

$$\zeta = \sin \theta_0.$$

L'équation (10) nous donne alors:

$$\zeta = i \sin \theta_0 \pm \cos \theta_0;$$

et la solution qui nous convient est celle qui se réduit à 1 pour $\theta_0 = 0$, c'est-à-dire:

$$(11) \quad r = e^{i\theta_0}, \quad \zeta = -2i \sin \theta_0 e^{i\theta_0}.$$

Dans le cas où $n > \omega$, on trouve

$$(II^{bis}) \quad r = i[\chi \pm \sqrt{\chi^2 - 1}]$$

et c'est le signe — qui convient. On trouve ensuite :

$$H = \frac{\zeta}{r^3} = -2i \sin \theta_0 e^{-2i\theta_0}.$$

Nous avons besoin également de la dérivée 2^{de} Θ'' et nous trouvons :

$$\Theta'' = \frac{d^2 \Theta}{d\zeta^2} = \frac{1}{4r^3} - \frac{i\zeta}{\zeta^2} = \frac{ie^{-3i\theta_0}}{4 \operatorname{tg} \theta_0}.$$

Quant à Θ lui-même il s'écrit :

$$\Theta = -e^{i\theta_0} + i \sin \theta_0 \log (-2i \sin \theta_0 e^{i\theta_0}),$$

d'où

$$e^{i\omega\Theta} = e^{-i\omega \cos \theta_0 + \omega \sin \theta_0 \zeta^{-n}}$$

ou

$$e^{i\omega\Theta} = e^n \zeta^{-n} e^{-i\omega \cos \theta_0}.$$

Reprenons la formule (2) du § 8, qui s'écrit :

$$e^{\frac{i\pi}{4}} H e^{i\omega\Theta} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \Theta''}}.$$

Notre intégrale devient donc :

$$e^{\frac{i\pi}{4}} (-4i) \sin \theta_0 e^{-2i\theta_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \cotg \theta_0}} \sqrt{-i} e^{\frac{3}{2}i\theta_0} e^n \zeta^{-n} e^{-i\omega \cos \theta_0}.$$

Il convient de prendre $\sqrt{-i} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$; ce qui, en observant que

$$\zeta^{-n} = (-2i)^{-n} (\sin \theta_0)^{-n} e^{-ni\theta_0} = e^{\frac{ni\pi}{2}} 2^{-n} n^{-n} \omega^n e^{-ni\theta_0},$$

nous donne pour l'intégrale :

$$(-i) 4 \sin \theta_0 2^{-n} n^{-n} \omega^n e^n e^{\frac{ni\pi}{2}} e^{-ni\theta_0} e^{-\frac{i\theta_0}{2}} e^{-i\omega \cos \theta_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \cot \theta_0}}.$$

Si nous substituons cette valeur de l'intégrale dans l'équation (7), il vient, en se rappelant que $D = 1$,

$$(-1)^n A_n = (-i) \frac{1}{2i\pi} \frac{2n+1}{2} \frac{(-i)}{16\pi} \cdot 4 \sin \theta_0 2^{-n} n^{-n} e^n e^{\frac{ni\pi}{2}} e^{-ni\theta_0} e^{-\frac{i\theta_0}{2}} e^{-i\omega \cos \theta_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \cot \theta_0}}.$$

Posons

$$\gamma = n \frac{\pi}{2} - n \theta_0 - \omega \cos \theta_0 - \frac{\theta_0}{2};$$

la formule deviendra :

$$A_n = i \frac{n \sqrt{2\pi}}{8\pi^2} \sin \theta_0 2^{-n} n^{-n} e^n e^{i\gamma} \sqrt{\frac{1}{\omega \cot \theta_0}} (-1)^n.$$

J'ai remplacé $\frac{2n+1}{2}$ par n , ce qui est permis à l'ordre d'approximation adopté.

Si nous rétablissons l'homogénéité en ne prenant plus $D = 1$, il vient :

$$(12) \quad \begin{aligned} \gamma &= n \frac{\pi}{2} - n \theta_0 - \omega D \cos \theta_0 - \frac{\theta_0}{2}, \\ A_n &= i(-1)^n \frac{n \sqrt{2\pi}}{8\pi^2} 2^{-n} n^{-n} e^n e^{i\gamma} \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\omega D \cotg \theta_0}}, \end{aligned}$$

formule identique à la formule (12) du § 13. Si $n > \omega$ la même formule est encore applicable, mais il convient de prendre :

$$\sin \theta_0 = \chi, \quad r = e^{i\theta_0} = i(\chi - \sqrt{\chi^2 - 1}), \quad \cos \theta_0 = -i\sqrt{\chi^2 - 1}.$$

Il nous reste à examiner le cas limite, celui où n est voisin de ω et où il convient d'appliquer les principes du § 12. Dans ce cas, les points singuliers B et D de la Figure 3 deviennent très voisins l'un de l'autre; ils doivent être assimilés aux points A et B de la Figure 6, tandis que les parties de la Figure 3 voisines de ces points B et D , doivent être assimilées à la Figure 6 tout entière; mais la quantité qui correspond à l' ω du § 12 est négative; dans ces conditions on voit que notre contour d'intégration devra passer de la région 5 à la région 4 de cette figure.

L'intégrale que nous avons à envisager est donc l'intégrale $\int_5^4$ du § 12 qui est égale à $-e^{\frac{4i\pi}{3}} F(te^{\frac{4i\pi}{3}})$ et que je représenterai pour abrégé par $F_i(t)$.

Cela posé, nous n'avons plus qu'à raisonner comme au § 12, et nous trouverons pour la valeur de A_n :

$$(13) \quad A_n = \left(\frac{\omega D}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} i(-1)^n \frac{n}{8\pi^2} 2^{-n} n^{-n} e^n \sqrt{\sin^3 \theta_0} F_i \left[\cos^2 \theta_0 \left(\frac{\omega D}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \right]$$

Les mêmes principes et le rappel des équations (5) du § 12 nous donneraient pour J_n :

$$(14) \quad J_n(\omega \rho) = \left(\frac{\omega \rho}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} (-1)^n 2^n n^n e^{-n} \sqrt{n \omega \rho} F \left[\cos^2 \eta \left(\frac{\omega \rho}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \right],$$

au lieu de la valeur :

$$(15) \quad J_n(\omega \rho) = 2^n n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{\cos \eta}}$$

qui convient quand n est notablement plus petit que $\omega \rho$.

§ 15.

Calcul de μ .

Nous avons trouvé [formule (9) du § 6] :

$$(1) \quad \mu = e^{i\omega t} \sum \frac{A_n P_n}{\rho_0^2 I'_n} = e^{i\omega t} \sum \frac{A_n J_n P_n}{\rho_0^2 I'_n J_n}.$$

Dans ces expressions l'argument de P_n est $\cos \varphi$, celui de I'_n et de J_n est $\omega \rho_0$.

Nous allons dans cette formule remplacer A_n , I'_n , J_n et P_n par leurs valeurs approchées.

Nous envisagerons successivement les cas suivants :

1° n est notablement plus petit que $\omega \rho$ (je puis sans inconvénient écrire ρ au lieu de ρ_0) et, par conséquent, que ωD . Dans ce cas, nous avons trouvé :

$$A_n = i(-1)^n \frac{n \sqrt{2\pi}}{8\pi^2} 2^{-n} n^{-n} e^n e^{i\gamma} \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\omega D \cotg \theta_0}},$$

$$J_n = 2^n n^n e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi n}{\cos \eta}} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}),$$

$$I'_n J_n = e^{i\alpha} \cos \alpha,$$

$$\frac{A_n J_n}{\rho^2} = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{i \sqrt{2\pi \omega} \sin \theta_0 \sin \eta}{\sqrt{D \rho} \cos \theta_0 \cos \eta} \sqrt{\frac{\sin \theta_0}{\rho}} (e^{i\beta_0} + e^{i\beta_1})^{\frac{2n+1}{2}},$$

$$\beta_1 = \alpha + \gamma + n\pi, \quad \beta_0 = \gamma - \alpha - n\pi:$$

formules 5, 6, 7 du § 11, 3^{bis} et 13 du § 13, 12 des §§ 13 et 14.

Si j'écris pour abrégé

$$\frac{A_n J_n}{\rho^2} = H_n (e^{i\beta_0} + e^{i\beta_1}),$$

il restera, pour le coefficient de notre formule (1),

$$\frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = H_n \frac{e^{i\beta_0} + e^{i\beta_1}}{e^{i\alpha} \cos \alpha} = 2 H_n \frac{e^{i(\alpha+\gamma)} + e^{i(\gamma-\alpha)}}{1 + e^{2i\alpha}} (-1)^n,$$

ou encore :

$$\frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = 2 H_n \frac{e^{i\beta_0} + e^{i(\beta_0+2\alpha)}}{1 + e^{2i\alpha}} = 2 H_n e^{i\beta_0}.$$

Ainsi le rapport du coefficient de P_n dans le développement de μ , c'est-à-dire de la composante normale du champ total au coefficient de ce même polynôme de LEGENDRE dans le développement de la composante normale du champ extérieur, est égal à

$$\frac{2 e^{i\beta_0}}{e^{i\beta_1} + e^{i\beta_0}}.$$

Il est aisé d'interpréter ce résultat. Comment avons-nous en effet obtenu au § 13 la formule qui donne A_n ? C'est en calculant l'intégrale

$$(2) \quad \int_0^\pi f^* P_n \sin \varphi d\varphi,$$

ce qui nous permettait de calculer le coefficient de P_n dans le développement de f^* en polynômes de LEGENDRE.

Supposons maintenant que nous voulions développer de même en polynômes de LEGENDRE une fonction F qui soit égale à f^* sur la partie éclairée de la sphère, et à

zéro sur la partie dans l'ombre. Nous aurions à calculer l'intégrale

$$(3) \quad \int_0^\pi F P_n \sin \varphi d\varphi = \int_0^h f^* P_n \sin \varphi d\varphi,$$

h étant la valeur de φ qui correspond à la limite de l'ombre géométrique.

Pour le calcul de notre intégrale nous avons, au § 13, appliqué la méthode du § 8, c'est-à-dire que nous avons considéré seulement les éléments de l'intégrale voisins des maxima et minima de Θ ; ces maxima et minima étaient au nombre de 2 et correspondaient à $\varphi = \varphi_0$ et à $\varphi = \varphi_1$; le premier nous avait donné le terme en $e^{i\beta_0}$, le second le terme en $e^{i\beta_1}$. Mais de ces deux maxima, un seul, $\varphi = \varphi_0$, est compris dans la zone éclairée. Donc l'intégrale (3) se calculera comme l'intégrale (2); seulement, au lieu du facteur $e^{i\beta_0} + e^{i\beta_1}$ nous aurons le facteur $e^{i\beta_0}$. Si nous rapprochons ce résultat de celui que nous venons d'obtenir, nous voyons que le coefficient du développement de μ est le double du coefficient correspondant du développement de F , c'est-à-dire que

$$\mu = 2F.$$

Or dans la région de l'ombre F est nul, il en est donc de même de μ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perturbation dans l'ombre géométrique.

Ce résultat, bien entendu, n'est qu'approché et dû, en particulier, à ce que nous avons négligé dans l'intégrale les éléments voisins de la limite supérieure $\varphi = h$ et qui sont les plus importants après ceux dont nous avons tenu compte.

2° Supposons maintenant n notablement plus grand que ωD et par conséquent que $\omega \rho$. Dans ce cas nous avons trouvé:

$$A_n = i(-1)^n \frac{n\sqrt{2\pi}}{8\pi^2} 2^{-n} n^{-n} e^n e^{i\gamma} \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\omega D \cotg \theta_0}},$$

$$\gamma = n \frac{\pi}{2} - n \theta_0 - \omega D \cos \theta_0 - \frac{\theta_0}{2},$$

$$\sin \theta_0 = \chi = \frac{n}{\omega D}, \quad r = e^{i\theta_0} = i(\chi - \sqrt{\chi^2 - 1}), \quad \cos \theta_0 = -i\sqrt{\chi^2 - 1},$$

$$J_n = 2^n n^n e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi n}{\cos \eta}} e^{-i\alpha}$$

ou, en donnant à H_n le même sens que plus haut:

$$\frac{A_n J_n}{\rho^2} = H_n e^{i\beta_0}.$$

D'autre part,

$$I'_n J_n = \frac{1}{2},$$

d'où

$$(4) \quad \frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = 2 H_n e^{i\beta_0}.$$

C'est la même formule que plus haut, mais il faut distinguer quelle est la valeur qu'il faut adopter pour β_0 . Nous observerons que nous avons:

$$|e^{i\gamma}| = |e^{-in\theta_0} e^{-\frac{i\theta_0}{2}} e^{-i\omega D \cos \theta_0}|$$

ou

$$|e^{i\gamma}| = (\chi - \sqrt{\chi^2 - 1})^{n + \frac{1}{2}} e^{-\omega D \sqrt{\chi^2 - 1}} < 1.$$

D'autre part $e^{-i\alpha}$, qui correspond aux éléments de l'intégrale J_n voisins du point D dans la figure du § 11, est également plus petit que 1; j'ajouterai même que $e^{i\gamma}$ et $e^{-i\alpha}$ sont très petits à cause de la grandeur des exposants n et ωD . Donc $e^{i\beta_0}$ est très petit, d'autant plus que n est plus grand, de sorte que pour $n > \omega D$ les coefficients de notre développement décroissent très rapidement.

3° Supposons ensuite que n soit compris entre ωD et $\omega \rho$ et diffère notablement de l'un et de l'autre. C'est ce qui pourra arriver si D n'est pas très voisin de ρ .

Les formules précédentes sont encore applicables, et l'on trouve encore

$$\frac{A_n J_n}{\rho^2 I_n J_n} = {}_2H_n e^{i\beta_0} = {}_2H_n e^{i\gamma} e^{-i\alpha} (-1)^n.$$

Mais ici γ est réel, de sorte que $|e^{i\gamma}| = 1$, tandis que $|e^{-i\alpha}|$ tend rapidement vers zéro. Donc ici encore le terme du développement tend rapidement vers zéro.

4° Supposons que n soit très voisin de ωD et notablement plus grand que $\omega \rho$.

Il faudra dans le calcul de A_n appliquer les principes du § 12, tandis que pour I_n on pourra continuer à se servir de la formule approchée. On trouve ainsi:

$$(5) \quad \frac{A_n J_n}{\rho^2 I_n J_n} = \left(\frac{\omega D}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} (2\pi\omega D \cos \theta_0)^{+\frac{1}{2}} {}_2H_n e^{-i\alpha} F_1 \left[\cos^2 \theta_0 \left(\frac{\omega D}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \right] (-1)^n$$

avec

$$(6) \quad H_n = \frac{1}{4\pi\rho} \sqrt{\omega n} \frac{\sin \theta_0 \sin \eta}{\sqrt{D \cotg \theta_0 \cos \eta}}$$

(dans le calcul de H_n j'ai remplacé $\frac{2n+1}{2}$ par n ce qui correspond au degré d'approximation adopté) et

$$(7) \quad \begin{cases} F_1(t) = -e^{\frac{2i\pi}{3}} A_0 \left(1 - \frac{t^3}{2.3} + \frac{t^6}{2.3.5.6} - \frac{t^9}{2.3.5.6.8.9} + \dots \right) \\ \quad - e^{\frac{4i\pi}{3}} A_1 \left(t - \frac{t^4}{3.4} + \frac{t^7}{3.4.6.7} - \dots \right), \end{cases}$$

A_0 et A_1 étant définis au § 12.

On peut ajouter que, dans l'argument de F_1 , $\cos^2 \theta_0 = 1 - \frac{n^2}{\omega^2 D^2}$ peut avec la même approximation être remplacé par $2 \left(1 - \frac{n}{\omega D} \right)$.

5° Supposons maintenant que n soit très voisin de $\omega \rho$ et notablement plus petit que ωD .

Ici c'est au contraire A_n que l'on doit calculer par la formule approchée et I_n par les formules du § 12.

Nous trouvons que le rapport de la valeur de I'_n à sa valeur approchée est

$$-ie^{\frac{2i\pi}{3}} 2^{\frac{2}{3}} (\omega\rho)^{-\frac{1}{6}} (2\pi \cos \eta)^{-\frac{1}{2}} F'(te^{\frac{4i\pi}{3}}) e^{-i\alpha},$$

ce qui nous donne:

$$(8) \quad \frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = ie^{-\frac{2i\pi}{3}} 2^{\frac{1}{3}} (\omega\rho)^{\frac{1}{6}} \sqrt{2\pi \cos \eta} \frac{H_n}{F' \left[\cos^2 \eta \left(\frac{\omega\rho}{2} \right)^{\frac{2}{3}} e^{\frac{4i\pi}{3}} \right]} e^{i\gamma} (-1)^n$$

avec

$$F(t) = A_0 \left(1 - \frac{t^3}{2.3} + \dots \right) + A_1 \left(t - \frac{t^4}{3.4} + \dots \right).$$

6° Les trois derniers cas ne peuvent se présenter que si D diffère notablement de ρ ; si D est très voisin de ρ , n très voisin de ωD et de $\omega\rho$, il faudra appliquer les principes du § 12 à la fois au calcul de A_n et à celui de J_n et on trouvera :

$$(9) \quad \frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = ie^{-\frac{2i\pi}{3}} 2^{\frac{2}{3}} (\omega\rho)^{\frac{1}{6}} (\omega D)^{\frac{1}{6}} 2\pi \sqrt{\cos \eta \cos \theta_0} H_n \frac{F_1 \left[\cos^2 \theta_0 \left(\frac{\omega D}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right]}{F' \left[\cos^2 \eta \left(\frac{\omega\rho}{2} \right)^{\frac{2}{3}} e^{\frac{4i\pi}{3}} \right]} (-1)^n.$$

Il ne sera pas inutile de chercher à nous rendre compte des valeurs des exposants β_0 , α et γ . Nous avons trouvé :

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha = -\omega\rho \cos \eta - n\eta - \frac{\eta}{2} - (n-1)\frac{\pi}{2}, \\ \gamma = \frac{n\pi}{2} - n\theta_0 - \omega D \cos \theta_0 - \frac{\theta_0}{2}, \\ \beta_0 = \gamma - \alpha - n\pi. \end{cases}$$

Dans le cas où n est très voisin de $\omega\rho$, on a sensiblement $\eta = \frac{\pi}{2}$; d'où, ainsi que nous l'avons vu au § 12,

$$(11) \quad \alpha = -\frac{\omega\rho \cos^3 \eta}{3} + \frac{\pi}{4} - n\pi.$$

De même, dans le cas où n est très voisin de ωD on trouve :

$$(12) \quad \gamma = -\frac{\omega D \cos^3 \theta_0}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

Si nous supposons que $\omega\rho$ et ωD soient voisins l'un de l'autre, et que n soit notablement plus petit que l'un et que l'autre, on aura sensiblement :

$$\omega\rho = \omega D, \quad \theta_0 = \eta, \quad \gamma - \alpha - n\pi = \beta_0 = -\frac{\pi}{2}.$$

Ce résultat était à prévoir; nous voyons en effet que si D est très voisin de ρ , le point S est très près de la sphère et par conséquent du point M_0 de la figure;

donc $r_0 = \varphi_0 = 0$ et l'on a

$$\beta_0 = n\varphi_0 - \omega\rho r_0 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Si passant à la limite nous faisons $D = \varphi$, nous trouvons pour l'expression de H_n :

$$(13) \quad H_n = \frac{1}{4\pi\rho^2} \frac{n^3}{\omega\rho\sqrt{\omega^2\rho^2 - n^2}},$$

d'où:

$$(14) \quad \frac{A_n J_n}{\rho^2 I_n J_n} = \frac{-i}{2\pi\rho^2} \frac{n^3}{\omega\rho\sqrt{\omega^2\rho^2 - n^2}}$$

pour n notablement différent de $\omega\rho$, en dessus ou en dessous; et si n est très voisin de $\omega\rho$ et ωD :

$$(15) \quad \frac{A_n J_n}{\rho^2 I_n J_n} = (-1)^n \frac{ie^{-\frac{2i\pi}{3}}}{\rho^2 \sqrt{2}} (\omega\rho)^{-\frac{2}{3}} \frac{n^2}{\omega\rho} \frac{F_1(t)}{F(t)}$$

avec

$$t = \left(\frac{\omega\rho}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{n^2}{\omega^2\rho^2}\right).$$

Il ne sera sans doute pas inutile de donner une expression *exacte* de notre coefficient sous la forme du quotient de deux intégrales définies. Nous avons trouvé au § 14, en faisant $D = 1$,

$$A_n = \left(\frac{-1}{\omega}\right)^n \frac{(2n+1)}{32\pi^2} \int \frac{e^{-i\omega r} dr}{r^2(1-r^2)^{n-1}}.$$

Mais nous avons obtenu ce résultat en partant d'une valeur approchée de f^* :

$$4\pi f^* = e^{i\omega(t-r)} \frac{i\omega}{r} \sin\theta \sin\xi;$$

la valeur exacte était celle du § 6:

$$4\pi f^* = e^{i\omega(t-r)} \left[\frac{i\omega}{r} \sin\theta \sin\xi + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{i\omega r^3} \right) (\sin\theta \sin\xi - 2\cos\theta \cos\xi) \right].$$

Pour transformer l'expression approchée, nous avons observé que

$$\rho \sin\theta \sin\xi = \left(\frac{\rho \sin\varphi}{r} \right)^r = -\frac{\zeta^2}{4r^2}$$

en reprenant les notations du § 14 et supposant comme dans ce paragraphe $\zeta' = 0$; on trouverait de même:

$$\rho \cos\theta \cos\xi = \sqrt{1 - \frac{\rho^2 \sin^2\varphi}{r^2}} \sqrt{\rho^2 - \frac{\rho^2 \sin^2\varphi}{r^2}} = \sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{4r^2}} \sqrt{\zeta\zeta' + \frac{\zeta^2}{4r^2}} = \frac{\zeta}{2r} \sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{4r^2}}$$

ou, en se rappelant que $\zeta' = 0$, $\zeta = 1 - r^2$,

$$\rho \cos\theta \cos\xi = \frac{(1-r^2)(1+r^2)}{2r} = \frac{1-r^4}{4r^2},$$

d'où finalement

$$A_n = \left(\frac{-1}{\omega}\right)^n \frac{2n+1}{32\pi^2} \int \frac{e^{-i\omega r} \psi(r) dr}{(1-r^2)^{n-1}},$$

où

$$(16) \quad \psi(r) = \frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{i\omega r^3} - \frac{1}{\omega^2 r^4}\right) \left(1 - \frac{1-r^4}{2r^2}\right).$$

Passons au calcul de I'_n .

Nous avons trouvé au § 11 :

$$I_n(\xi) = C \int_{-1}^{\infty} e^{i\xi x} (x^2 - 1)^n \xi^{n+1} dx,$$

C étant un facteur constant; d'où

$$I'_n(\xi) = C \int_{-1}^{\infty} e^{i\xi x} (x^2 - 1)^n \xi^{n+1} \left(ix + \frac{n}{\xi}\right) dx$$

ou, en remplaçant ξ par $\omega\rho$,

$$I'_n(\omega\rho) = C \int_{-1}^{\infty} e^{i\omega\rho x} (x^2 - 1)^n (\omega\rho)^{n+1} \left(ix + \frac{n}{\omega\rho}\right) dx.$$

Il reste à déterminer le coefficient C ; ce coefficient doit être choisi de telle sorte que, si l'on pose

$$J_n(\xi) = \int_{-1}^{+1} e^{i\xi x} (x^2 - 1)^n \xi^{n+1} dx,$$

on ait

$$(17) \quad I'_n J_n - J'_n I_n = 1.$$

Considérons le développement de $I_n(\xi)$ et de $J_n(\xi)$ suivant les puissances croissantes de ξ et soient :

$$J_n(\xi) = A\xi^{n+1} + \dots, \quad I_n = B\xi^{-n} + \dots$$

les premiers termes de ces développements; la relation (17) nous donnera :

$$AB = -\frac{1}{2n+1}.$$

Or nous avons trouvé au § 14 :

$$A = \frac{(-1)^n 2(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Pour avoir B , il faut chercher une valeur approchée de l'intégrale pour ξ très petit; faisons alors

$$i\xi x = -X,$$

d'où

$$\int_{-1}^{\infty} e^{i\xi x} (x^2 - 1)^n \xi^{n+1} dx = i\xi^{-n} \int_{-\xi}^{\infty} e^{-X} (-X^2 - \xi^2)^n dX$$

et pour ξ très petit :

$$\xi^{-n} i(-1)^n \int_0^{\infty} e^{iX} X^{2n} dX = i(-1)^n 2n! \xi^{-n}.$$

Il reste donc

$$B = Ci(-1)^n 2n!$$

et

$$\frac{(-1)^{2n} 2 C i (2^n n!)^2}{2n + 1} = -\frac{1}{2n + 1}, \quad C = \frac{i(-1)^{-2n}}{2(2^n n!)^2}$$

ou, pour n entier,

$$C = \frac{i}{2(2^n n!)^2},$$

d'où enfin :

$$(18) \quad \frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = \frac{-i}{\rho^2} \left(\frac{-1}{\omega} \right)^n (4n + 2) \frac{(2^n n!)^2}{32 \pi^2} \frac{\int e^{-i\omega r} \psi(r) (1 - r^2)^{1-n} dr}{\int e^{i\omega \rho x} (x^2 - 1)^n (\omega \rho)^{n+1} \left(ix + \frac{n}{\omega \rho} \right) dx}$$

§ 16.

Introduction des valeurs non entières de n .

Il s'agit maintenant (en faisant $t = 0$ pour nous débarrasser du facteur $e^{i\omega t}$) de sommer la série

$$(1) \quad \mu \rho_o^2 = \sum \frac{A_n P_n}{I'_n}.$$

On a assez souvent une première approximation de la somme de la série

$$\sum F(n),$$

en la remplaçant par l'intégrale

$$\int F(n) dn;$$

il suffit pour cela que la formule sommatoire d'EULER soit suffisamment convergente.

Si nous cherchons à appliquer cette méthode au cas qui nous occupe, nous serons arrêtés par une première difficulté; en effet nos fonctions A_n , P_n et I'_n ne sont définies que quand n est entier positif; il faut d'abord les définir pour toutes les valeurs de n . Commençons par P_n . Nous avons trouvé au § 10 :

$$(2) \quad 2\pi P_n = \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos \varphi + i \sin \varphi \cos \omega)^n d\omega$$

et nous pouvons conserver la même formule dans le cas où n n'est pas entier positif; il pourrait y avoir une difficulté si

$$\cos \varphi + i \sin \varphi \cos \omega$$

s'annulait sur le chemin d'intégration; c'est ce qui peut arriver quand le chemin d'intégration est rectiligne, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et pour certaines valeurs imaginaires de φ ; mais si on attribue à φ l'une de ces valeurs, il suffira de modifier le chemin d'intégration. Nous observerons que la fonction P_n ainsi définie est une fonction entière de n ; ce n'est pas une fonction uniforme de φ , puisque pour certaines valeurs de φ , on est obligé de déformer le chemin d'intégration ainsi que nous venons de le dire; mais c'est une fonction uniforme de n et c'est ce qui nous importe.

La fonction P_n jouit d'une autre propriété importante. Posons

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = t;$$

notre relation devient :

$$\pi P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} t^2)^n dt}{(1 + t^2)^{n+1}}.$$

Changeons n en $-n-1$; il viendra :

$$\pi P_{-n-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + t^2)^n dt}{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} t^2)^{n+1}}$$

Posons

$$t = u e^{i\varphi};$$

il viendra :

$$\pi P_{-n-1} = \int \frac{(1 + u^2 e^{2i\varphi})^n e^{i\varphi} du}{e^{i(n+1)\varphi} (1 + u^2)^{n+1}} = \int \frac{(e^{-i\varphi} + u^2 e^{i\varphi})^n du}{(1 + u^2)^{n+1}}$$

ou

$$P_{-n-1}(\varphi) = P_n(-\varphi) = P_n(\varphi),$$

car il est aisé de voir que P_n ne change pas quand on change φ en $-\varphi$; il suffit pour cela de changer ω en $\omega + \pi$, dans la formule (2); les limites deviennent 0 et 2π , mais peuvent être ramenées à $-\pi$ et $+\pi$, puisque la fonction sous le signe $\int$ est périodique.

Ainsi la fonction P_n ne change pas quand on change n en $-n-1$.

Passons maintenant à I'_n et d'abord à I_n ; nous avons trouvé à la fin du § 15 :

$$(3) \quad \begin{cases} I_n = \frac{i}{2} [2^n \Gamma(n+1)]^{-2} (-1)^{-2n} \int_{-1}^{\infty} e^{i\omega\rho x} (x^2 - 1)^n (\omega\rho)^{n+1} dx, \\ I'_n = \frac{i}{2} [2^n \Gamma(n+1)]^{-2} (-1)^{-2n} \int_{-1}^{\infty} e^{i\omega\rho x} (x^2 - 1)^n (\omega\rho)^{n+1} \left(ix + \frac{n}{\omega\rho} \right) dx. \end{cases}$$

[Nous rétablissons ici le facteur $(-1)^{-2n}$ que nous avons supprimé à la fin du § 15 parce que ce facteur est égal à 1 quand n est entier]. Le plus simple semble être de généraliser ces formules pour n non entier; mais il peut y avoir une difficulté parce que $x^2 - 1$ s'annule à l'une des limites d'intégration. Si donc la partie réelle de n était plus petite que -1 , l'intégrale serait infinie.

En conséquence, au lieu d'un chemin d'intégration C allant de -1 à l'infini, de façon qu'à l'infini l'exponentielle $e^{i\omega\rho x}$ soit très petite, imaginons un autre chemin C_1 allant de l'infini à l'infini après avoir contourné le point -1 , et de façon qu'à l'infini $e^{i\omega\rho x}$ soit très petit. Quand on contourne le point -1 et que n n'est pas entier, l'expression $(x^2 - 1)^n$ se trouve multipliée par $e^{2i\pi n}$; il en résulte que nous avons :

$$\int_{C_1} = (e^{2i\pi n} - 1) \int_C$$

et que nous pouvons remplacer les équations (3) par les suivantes :

$$(3^{bis}) \quad I_n \text{ ou } I'_n = \frac{i}{2} [2^n \Gamma(n+1)]^{-2} (-1)^{-2n} (e^{2i\pi n} - 1)^{-1} \int_{C_1},$$

les expressions sous le signe $\int$ étant les mêmes que dans les formules (3). L'inconvénient signalé ne se reproduit pas. Nous observerons alors que $\int_{C_1}$ est une fonction entière de n ; il en est de même de $[2^n \Gamma(n+1)]^{-2}$, et par conséquent de

$$I_n(e^{2i\pi n} - 1), \quad I'_n(e^{2i\pi n} - 1).$$

I_n et I'_n sont des fonctions méromorphes de n et elles ne peuvent devenir infinies que pour n entier. Mais si n est entier positif ou nul, $\int_{C_1}$ s'annule également et, à cause de la formule

$$\int_C = (e^{2i\pi n} - 1)^{-1} \int_{C_1},$$

nous voyons que $(e^{i\pi n} - 1)^{-1} \int_{C_1}$ reste fini. Si au contraire n est entier négatif, $\Gamma(n+1)^{-1}$ s'annule et $\Gamma(n+1)^{-1}(e^{2i\pi n} - 1)^{-1}$ reste fini. Donc I_n et I'_n sont des fonctions entières de n .

Voyons maintenant ce que deviennent I_n et I'_n quand on change n en $-n-1$. Rappelons que I_n satisfait à l'équation différentielle:

$$(4) \quad I''_n + I_n \left[1 - \frac{n(n+1)}{\xi^2} \right] = 0,$$

où les dérivées sont prises par rapport à ξ et où l'on a posé $\xi = \omega \rho$ (cfr. § 5, équation 10, et § 11 in initio). La fonction I_n ne cessera pas de satisfaire à cette équation quand n ne sera plus entier. De plus, cette fonction I_n sera sensiblement proportionnelle à $e^{-i\xi}$ quand ξ sera très grand. Or cette condition suffit pour déterminer l'intégrale de (4) à un facteur constant près.

Mais quand on change n en $-n-1$, le produit $n(n+1)$ ne change pas. Donc l'équation (4) ne change pas, et celle de ses intégrales qui devient sensiblement proportionnelle à $e^{-i\xi}$ pour ξ très grand reste la même à un facteur constant près. Donc le rapport

$$\frac{I_{-n-1}}{I_n} = \frac{I'_{-n-1}}{I'_n},$$

est indépendant de ξ et ne dépend que de n ; il reste à déterminer ce facteur constant.

Indiquons brièvement deux modes de calcul pour cette détermination:

1° Soit d'abord ξ très grand. Dans ce cas les seuls éléments sensibles sont ceux qui sont voisins de -1 ; nous pouvons donc remplacer sous le signe $\int$, l'expression x^2-1 par $-2(x+1)$. Alors l'intégrale est facile à calculer par les fonctions eulériennes et on trouve:

$$I_n = i^{2-n} 2^{-n-1} \frac{e^{-i\xi}}{\Gamma(n+1)}.$$

En changeant n en $-n-1$, il vient :

$$I_{-n-1} = i^{3+n} 2^n \frac{e^{-i\xi}}{\Gamma(-n)},$$

d'où

$$(5) \quad \frac{I_{-n-1}}{I_n} = i^{2n+1} 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(-n)}.$$

2° Soit maintenant ξ très petit; deux cas sont à distinguer :

Si la partie réelle de n est positive, le terme le plus important sera le terme en ξ^{-n} ; on pourra le calculer comme nous avons fait à la fin du § 15. Nous avons ramené à l'intégrale

$$\int e^{-X} (-X^2 - \xi^2)^n dX$$

que nous avons prise de $-\xi$ à l'infini; ici il faut prendre le chemin correspondant à C_1 , c'est-à-dire que X doit aller de l'infini à l'infini en contournant le point $X = -\xi$; le chemin d'intégration pourra d'ailleurs contourner également le point $X = \xi$; car cela revient à ajouter J_n multiplié par un facteur constant; or J_n étant de l'ordre de ξ^{n+1} sera, pour ξ très petit, négligeable devant I_n . Dans ces conditions, notre chemin d'intégration peut être tracé de façon que l'on ait constamment $|X| > |\xi|$ et le calcul du § 15 demeurera applicable. On aura donc :

$$(6) \quad I_n = \xi^{-n} (-1)^{1-n} \frac{\Gamma(2n+1)}{2[2^n \Gamma(n+1)]^2}.$$

On remarquera que nous avons écrit ici $(-1)^{1-n}$ et non pas $(-1)^{1+n}$, c'est parce que nous avons rétabli le facteur $(-1)^{-2n}$, comme je l'ai expliqué plus haut.

Supposons maintenant que la partie réelle de n soit négative, de sorte que le terme principal soit en ξ^{n+1} . Nous n'avons plus ici le droit de tracer notre contour d'intégration de telle façon qu'il enveloppe les deux points $X = \pm \xi$ (qui correspondent aux deux points $x = \pm 1$), de sorte que l'analyse précédente est en défaut. Mais si ξ est très petit, nous pouvons remplacer $e^{i\xi x}$ par 1, et notre intégrale se réduit à

$$\xi^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 1)^n dx = i^{(2n+1)} \xi^{n+1} \frac{\Gamma \frac{1}{2} \Gamma(-n - \frac{1}{2})}{\Gamma(-n)},$$

d'où

$$(7) \quad I_n = \frac{i}{2} [2^n \Gamma(n+1)]^{-2} \frac{\Gamma \frac{1}{2} \Gamma(-n - \frac{1}{2})}{\Gamma(-n)} i^{(2n+1)} \xi^{n+1} (e^{2i\pi n} - 1)^{-1}$$

et

$$(7^{bis}) \quad I_{-n-1} = \frac{i}{2} [2^{-n-1} \Gamma(-n)]^{-2} \frac{\Gamma \frac{1}{2} \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} i^{-(2n+1)} \xi^{-n} (e^{-2i\pi(n+1)} - 1)^{-1}.$$

Nous remarquerons que

$$e^{-2i\pi(n+1)} - 1 = (-1)^{-(n+1)} 2i \sin n\pi,$$

d'où

$$I_{-n-1} = \frac{i}{2} [2^{-n-1} \Gamma(-n)]^{-2} \frac{\Gamma \frac{1}{2} \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} i^{-(2n+1)} \xi^{-n} (-1)^{1+n} \frac{1}{2i \sin n\pi}.$$

Nous calculerons donc I_n par la formule (6) et I_{-n-1} par la formule (7^{bis}), de sorte qu'il viendra :

$$\frac{I_{-n-1}}{I_n} = 2^{4n+1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2}) \Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1) \Gamma^2(-n)} i^{-(2n+1)} (-1)^{2n+1} \frac{1}{\sin n\pi}.$$

Mais

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1) = \Gamma \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n}},$$

d'où

$$\frac{I_{-n-1}}{I_n} = -2^{2n+1} \frac{\Gamma^2 \frac{1}{2}}{\Gamma^2(-n)} i^{2n+1} \frac{1}{\sin n\pi}.$$

Mais

$$\frac{\Gamma^2 \frac{1}{2}}{\sin n\pi} = \frac{\pi}{\sin n\pi} = -\Gamma(-n) \Gamma(n+1),$$

d'où, finalement,

$$\frac{I_{-n-1}}{I_n} = 2^{2n+1} i^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(-n)},$$

formule identique à la formule (5), et qui peut s'écrire :

$$\frac{I_{-n-1}}{\Gamma(n+1)} 2^{-n-1} i^{-n-1} = \frac{I_n}{\Gamma(-n)} 2^n i^n,$$

ce qui veut dire que

$$(8) \quad \frac{I_n}{\Gamma(-n)} 2^n i^n$$

est une fonction entière de n qui ne change pas quand on change n en $-n-1$.

Passons à A_n ; nous avons trouvé :

$$A_n = \left(\frac{-1}{\omega}\right)^n \frac{2n+1}{32\pi^2} \int \frac{e^{-i\omega r} \psi(r) dr}{(1-r^2)^{n-1}}$$

avec

$$\psi(r) = \frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{i\omega r^3} - \frac{1}{\omega^2 r^4}\right) \left(1 - \frac{1-r^4}{2r^2}\right)$$

ou, en rétablissant l'homogénéité :

$$(9) \quad A_n = \left(\frac{-1}{\omega D}\right)^n \frac{2n+1}{32\pi^2} \int \frac{e^{-i\omega r} \psi(r) dr D^{2n-1}}{(D^2-r^2)^{n-1}}$$

avec

$$(10) \quad \psi(r) = \frac{D^2}{r^2} + \left(\frac{D^2}{i\omega r^3} - \frac{D^2}{\omega^2 r^4}\right) \left(1 - \frac{D^4-r^4}{2r^2 D^2}\right).$$

La même définition peut être conservée pour n non entier, cependant il convient de faire l'observation suivante : L'intégration se fait le long d'un contour fermé entourant le point $r=D$; quand n est entier, il n'est pas nécessaire de préciser quel est le point initial et final de ce contour, il n'en est plus de même si n n'est pas entier; nous prendrons alors un chemin d'intégration qui partira de l'infini pour revenir à l'infini en enveloppant le point $r=D$ et de telle façon qu'à l'infini $e^{-i\omega r}$ soit nul. Dans ces conditions A_n sera entièrement défini et on voit aisément que c'est une fonction entière de n .

Pour aller plus loin, reprenons le triangle SOM du § 6 dont les côtés sont D , r et ρ , et les angles φ , θ et $\pi - \xi$, et la formule :

$$4\pi f^* = e^{i\omega(t-r)} \left[\frac{i\omega}{r} \sin\theta \sin\xi + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{i\omega r^3} \right) (\sin\theta \sin\xi - 2\cos\theta \cos\xi) \right].$$

Or remarquera que cette formule présente une symétrie particulière. Supposons que dans le triangle SOM , on permute les sommets S et M ; les longueurs D et ρ se permuteront, φ se changera en $-\varphi$; r ne changera pas, θ se changera en $\pi - \xi$, et ξ en $\pi - \theta$, de sorte que les produits $\sin\theta \sin\xi$ et $\cos\theta \cos\xi$ ne changeront pas. Il en résulte que f^* ne changera pas. Donc f^* est une fonction de D , ρ et φ qui ne change pas quand on change D , ρ et φ en ρ , D et $-\varphi$; et comme d'ailleurs elle ne change pas quand on change φ en $-\varphi$, ce sera une fonction symétrique de D et ρ ; mais les conditions de cette symétrie exigent quelque attention. Nous avons trouvé au § 6 :

$$f^* = e^{i\omega t} \sum A_n J_n(\omega\rho) \frac{1}{\rho^2} P_n(\cos\varphi),$$

A_n étant une fonction de D ; on serait tenté, à cause de la symétrie, d'écrire que A_n est égale, à un facteur constant près, à $J_n(\omega D) \frac{1}{D^2}$; mais la formule précédente n'est vraie que si $\rho < D$; si on avait $\rho > D$, il faudrait la modifier et y remplacer $J_n(\omega\rho)$ par $I_n(\omega\rho)$ (de même que si on veut développer $\frac{1}{r}$ suivant les polynômes P_n , le développement procède suivant les puissances positives de ρ si $\rho < D$, et suivant les puissances négatives si $\rho > D$). Or si l'on a $\rho < D$, on aura inversement $D > \rho$; il faudra donc conclure que A_n est proportionnel non pas à $J_n(\omega D) \frac{1}{D^2}$, mais à $I_n(\omega D) \frac{1}{D^2}$, et écrire :

$$f^* = e^{i\omega t} \sum K_n I_n(\omega D) J_n(\omega\rho) \frac{1}{\rho^2 D^2} P_n(\cos\varphi),$$

K_n étant un coefficient indépendant à la fois de D , de ρ et de φ . Pour déterminer ce coefficient, supposons que D et ρ soient très petits; alors I_n et J_n se réduiront sensiblement à leurs premiers termes; soient

$$I_n(\omega D) = b_n(\omega D)^{-n}, \quad J_n(\omega\rho) = c_n(\omega\rho)^{n+1}$$

ces premiers termes; il viendra, pour $t = 0$,

$$f^* = \sum K_n b_n c_n \frac{\omega}{\rho D^2} \left(\frac{\rho}{D} \right)^n P_n.$$

D'autre part, dans ces conditions r est très petit, de sorte qu'il reste :

$$4\pi f^* = \frac{1}{i\omega r^3} (\sin\theta \sin\xi - 2\cos\theta \cos\xi).$$

Nous savons que l'on a :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{D} \sum \left(\frac{\rho}{D} \right)^n P_n.$$

Si nous différencions cette égalité, d'abord par rapport à D , puis par rapport à ρ ,

en remarquant que si $d\rho = 0$ on a

$$dr = dD \cos \theta$$

et que si $dD = 0$ on a

$$dr = -d\rho \cos \xi, \quad r d\theta = d\rho \sin \xi,$$

nous trouverons :

$$-\frac{\cos \theta}{r^2} = -\frac{1}{D^2} \sum (n+1) \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n,$$

puis

$$\frac{2 \cos \theta \cos \xi}{r^3} - \frac{\sin \theta \sin \xi}{r^3} = \frac{1}{\rho D^2} \sum n(n+1) \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n$$

ou, en identifiant les deux valeurs de $4\pi f'^*$,

$$\frac{-1}{i\omega\rho D^2} \sum n(n+1) \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n = 4\pi \sum K_n b_n c_n \frac{\omega}{\rho D^2} \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n$$

ou enfin :

$$K_n = \frac{i}{4\pi\omega^2} \frac{n(n+1)}{b_n c_n}.$$

Or nous avons trouvé [§ 14 in initio et § 16 formule (6)] :

$$b_n = (-1)^{1-n} \frac{\Gamma(2n+1)}{2[2^n \Gamma(n+1)]^2}, \quad c_n = (-1)^n \frac{2 \cdot [2^n \Gamma(n+1)]^2}{\Gamma(2n+2)},$$

d'où

$$b_n c_n = -\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{-1}{2n+1}$$

et

$$K_n = \frac{-i}{4\pi\omega^2} n(n+1)(2n+1),$$

ce qui me permet d'écrire :

$$(11) \quad A_n = \frac{-i}{4\pi\omega^2} n(n+1)(2n+1) \frac{I_n(\omega D)}{D^2}$$

et

$$(12) \quad \mu = \frac{-i}{4\pi\omega^2} \frac{1}{\rho^2 D^2} \sum n(n+1)(2n+1) \frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega \rho)} P_n(\cos \varphi).$$

Il ne sera pas inutile de vérifier que la valeur approchée de A_n concorde bien avec la formule (12) des §§ 13 et 14. Nous avons trouvé :

$$I_n(\omega \rho) = M C e^{i\alpha}$$

avec

$$M = 2^n n^n e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi n}{\cos \eta}}, \quad C = \frac{i}{2(2^n n!)^2},$$

d'où

$$I_n(\omega \rho) = \frac{i}{2} e^{i\alpha} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\cos \eta}}$$

en tenant compte de

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Si nous changeons ρ en D , η se change en θ_0 , $e^{i\alpha}$ en $i(-1)^n e^{i\gamma}$, de sorte qu'on

trouvera :

$$I_n(\omega D) = \frac{(-1)^{n+1}}{2} e^{i\gamma} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\cos \theta_0}},$$

d'où, par la formule (11), en remplaçant $n(n+1)(2n+1)$ par $2n^3$,

$$A_n = \frac{i}{4\pi\omega^2} (-1)^n e^{i\gamma} \frac{n^3}{2^n n! \sqrt{\cos \theta_0}} \frac{1}{D^2}.$$

Or la formule (12), qui s'écrit :

$$A_n = i(-1)^n \frac{n\sqrt{2\pi}}{8\pi^2} 2^{-n} n^{-n} e^{i\gamma} \frac{\sin \theta_0 \sqrt{\sin \theta_0}}{\sqrt{\omega D \cos \theta_0}},$$

peut s'écrire également :

$$A_n = i(-1)^n \frac{n\sqrt{2\pi}}{8\pi^2} \frac{\sqrt{2\pi n}}{2^n n!} \frac{n}{\omega D} \sqrt{\frac{n}{\omega D}} e^{i\gamma}$$

qui se ramène facilement à la formule précédente.

L'expression (11) de A_n conserve un sens quand on suppose que n n'est pas entier, puisque I_n a été défini pour n quelconque. Je ne m'occuperai pas de démontrer que cette nouvelle définition de A_n pour n quelconque (*qui est celle que nous adopterons désormais*) concorde avec celle que nous avons donnée plus haut, bien que cela soit probable.

Le terme général de la série (12) est

$$13) \quad \frac{-i}{4\pi\omega^2 \rho^2 D^2} n(n+1)(2n+1) \frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega \rho)} P_n(\cos \varphi).$$

On voit d'abord que ce terme général est une *fonction méromorphe* de n : Si maintenant nous changeons n , en $-n-1$, je dis que cette fonction changera de signe, c'est-à-dire que ce sera une fonction *impaire* de $n + \frac{1}{2}$. En effet nous avons vu que P_n est une fonction paire, qu'il en est de même de

$$\frac{I_n(\omega D)}{\Gamma(-n)} 2^n i^n, \quad \frac{I'_n(\omega \rho)}{\Gamma(-n)} 2^n i^n$$

et par conséquent de $\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega \rho)}$. Il en est de même de $n(n+1)$; tandis que $2n+1$ est une fonction impaire. Donc l'expression (13) est une fonction impaire. C. Q. F. D.

§ 17.

Cas limite de $D = \rho$; emploi des séries divergentes.

Le cas le plus intéressant est celui où D est très voisin de ρ ; on pourrait d'abord songer à faire $D = \rho$ dans la série (12) du § précédent; mais cette série deviendrait

alors divergente. On peut néanmoins employer l'artifice suivant. Reprenons la série :

$$\mu = \sum \frac{-in(n+1)(2n+1) I_n(\omega D)}{4\pi\omega^2 D^2 \rho^2} \frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega \rho)} P_n,$$

que je puis écrire :

$$(1) \quad \mu = \sum \frac{-in(n+1)(2n+1) I_n(\omega D)}{4\pi\omega^2 D^2 \rho^2} \frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega D)} \frac{I'_n(\omega D)}{I'_n(\omega \rho)} P_n.$$

Tant que $\rho < D$, elle converge; si l'on fait $\rho = D$, le facteur $\frac{I'_n(\omega D)}{I'_n(\omega \rho)}$ devient égal à 1 et elle diverge. Ce facteur, pour n très grand est sensiblement égal à

$$\left(\frac{\rho}{D}\right)^{n+1},$$

de sorte que nous sommes amenés à comparer notre série à la suivante :

$$(2) \quad \mu = \sum \frac{-in(n+1)(2n+1) I_n(\omega D)}{4\pi\omega^2 D^2 \rho^2} \left(\frac{\rho}{D}\right)^{n+1} P_n.$$

Je me propose d'établir que, quand ρ tend vers D , les deux séries (1) et (2) tendent vers une même limite. La démonstration repose d'abord sur la possibilité d'écrire :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{I'_n(\omega D)}{I'_n(\omega \rho)} &= \left(\frac{\rho}{D}\right)^{n+1} \left[1 + \frac{A_1(\rho - D)}{n} + \frac{A_2(\rho - D)}{n^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{A_{p-1}(\rho - D)}{n^{p-1}} + \frac{B(\rho - D)}{n^p} \right], \end{aligned} \right.$$

où $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$ sont des fonctions de ρ et de D , indépendantes de n , tandis que B est une fonction de ρ , de D et de n qui reste limitée même pour n très grand. Pour le démontrer, il suffit d'établir que l'on a

$$I'_n(\xi) = N\xi^{-n-1} \left[1 + \frac{C_1}{n} + \frac{C_2}{n^2} + \dots + \frac{C_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{C_p}{n^p} \right],$$

où $C_1, C_2, \dots, C_{p-1}$ sont des fonctions de ξ , et C_p une fonction de ξ et de n qui reste limitée même pour n très grand.

Pour cela, rappelons que $I_n(\xi)$ est donné, à un coefficient constant près qui n'a pas à intervenir ici, par la formule

$$I_n = i\xi^{-n} \int_{-\xi}^{\infty} e^{-X} (-X^2 - \xi^2)^n dX.$$

On voit que c'est une fonction entière de ξ ; cette fonction est d'ailleurs la somme d'une fonction impaire et d'une fonction paire; car on a

$$I_n = i\xi^{-n} \left[\frac{1}{2} \left(\int_{-\xi}^{\infty} + \int_{\xi}^{\infty} \right) + \frac{1}{2} \int_{-\xi}^{\xi} \right].$$

On voit ainsi que le coefficient de ξ^{-n} est $i(-1)^n 2n!$ (cfr. § 15) et que celui de ξ^{n+1} est donné par la formule

$$\frac{1}{2} i\xi^{-n} \int_{-\xi}^{\xi} e^{-X} (-X^2 - \xi^2)^n dX = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{i\xi x} (x^2 - 1)^n \xi^{n+1} dx,$$

où l'on regarde ξ comme très petit, ce qui donne :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n dx = \frac{1}{2} (-1)^n 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(2n+2)}.$$

Les deux coefficients ont pour valeur approximative

$$i(-1)^n 2^{2n} n^{2n} \sqrt{4\pi n} e^{-2n} \quad \text{et} \quad (-1)^n 2^{2n} \frac{n^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi^2 n^2}}{(2n+1) 2^{2n} n^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}} = (-1)^2 \frac{\sqrt{\pi n}}{2n}.$$

Le second est donc beaucoup plus petit que le premier, de sorte que les termes qui ont même parité que ξ^{n+1} n'interviendront pas dans la discussion. Nous aurons :

$$I_n(\xi) = i(-1)^n 2n! \xi^{-n} \left[1 + \sum A_{2q} \left(\frac{\xi}{n} \right)^{2q} \right] \\ + \frac{1}{2} (-1)^n 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(2n+2)} \xi^{n+1} \left[1 + \sum B_{2q} \left(\frac{\xi}{n} \right)^{2q} \right],$$

où A_{2q} et B_{2q} sont des coefficients développables suivant les puissances négatives de n . Cela suffit pour établir aisément la formule que nous avons en vue.

La formule (3) étant ainsi démontrée, nous avons :

$$\sum \alpha_n \frac{I'_n(\omega D)}{I'_n(\omega \rho)} = \sum \alpha_n \left(\frac{\rho}{D} \right)^{n+1} + A_1(\rho - D) \sum \frac{\alpha_n}{n} \left(\frac{\rho}{D} \right)^{n+1} + \dots \\ \dots + A_{p-1}(\rho - D) \sum \frac{\alpha_n}{n^{p-1}} \left(\frac{\rho}{D} \right)^{n+1} + (\rho - D) \sum \frac{\alpha_n C}{n^p} \left(\frac{\rho}{D} \right)^{n+1}.$$

Si nous supposons que les séries $\sum \frac{\alpha_n}{n^q} \left(\frac{\rho}{D} \right)^{n+1}$ ($q = 1, 2, \dots, p-1$) tendent vers une limite finie pour $\rho = D$, et que la série $\sum \frac{\alpha_n}{n^p}$ et par conséquent aussi la série $\sum \frac{\alpha_n C}{n^p}$ soit absolument convergente, tous les termes du 2^d membre de la relation précédente tendent vers zéro pour $\rho = D$, sauf le premier, et il reste

$$\lim \sum \alpha_n \frac{I'_n(\omega D)}{I'_n(\omega \rho)} = \lim \sum \alpha_n \left(\frac{\rho}{D} \right)^{n+1}$$

Or il est aisé de constater que ces conditions sont remplies pour la série qui nous occupe; et en effet, en reprenant les formules asymptotiques des §§ précédents pour n très grand même par rapport à ω , et calculant au besoin des termes complémentaires par la méthode du § 8, on trouve que l'on peut écrire :

$$\alpha_n = P_n \left[\frac{A_0}{n^k} + \frac{A_1}{n^{k+1}} + \dots + \frac{A_p}{n^{k+p}} \right],$$

$A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ étant indépendants de n , A_p dépendant de n mais restant fini pour n infini; et voici une première conséquence.

Nous trouvons :

$$(4) \quad \frac{d \mu \cdot D^2}{dD} = \sum \frac{-in(n+1)(2n+1) I'_n(\omega D)}{4\pi\omega\rho^2 (I'_n\omega\rho)} P_n.$$

Les considérations précédentes étant applicables à cette nouvelle série, nous avons :

$$\lim \frac{d\mu D^2}{dD} \text{ (pour } \rho = D) = \lim \sum \frac{-in(n+1)(2n+1)}{4\pi\omega\rho^2} \left(\frac{\rho}{D}\right)^{n+1} P_n;$$

ce qui, au facteur $\frac{-i}{4\pi\omega D^2}$ près, peut s'écrire :

$$\sum n(n+1)(2n+1)P_n \left(\frac{\rho}{D}\right)^n.$$

Or,

$$\sum P_n \left(\frac{\rho}{D}\right)^n = \frac{1}{r} = (\rho^2 + D^2 - 2D\rho \cos \varphi)^{-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\sum n(n+1)(2n+1)P_n \left(\frac{\rho}{D}\right)^n = \frac{d^3 \frac{1}{r}}{dD^2 d\rho} - \frac{d^3 \frac{1}{r}}{dD d\rho^2}.$$

Or un calcul direct montre que le second membre de cette égalité s'annule pour $\rho = D$, donc : *quand D tend vers ρ , la dérivée de μD^2 par rapport à D tend vers zéro.*

Disons encore quelques mots d'une seconde question, tout à fait analogue à celle que nous venons de traiter et qui d'ailleurs nous sera utile dans la suite. *Dans quelles conditions peut-on affirmer que l'on a*

$$(5) \quad \lim (\rho = 1) \text{ de } \sum \alpha_n \rho^n = \lim (\varepsilon = 0) \text{ de } \sum \frac{\alpha_n}{1 + \varepsilon n^2}?$$

1° Il est clair d'abord que cela a lieu si $\sum \alpha_n$ est convergente, même si la convergence n'est pas absolue; et en effet la limite du 1^{er} membre est $\sum \alpha_n$, en vertu d'un théorème bien connu d'ABEL; et il en est de même de la limite du 2^d membre en vertu d'une démonstration toute pareille.

2° Si $\sum \frac{\alpha_n}{n^2}$ converge absolument, nous pourrions donc affirmer que

$$\lim \sum \frac{\alpha_n \rho^n}{n^2} = \lim \sum \frac{\alpha_n}{n^2(1 + \varepsilon n^2)}.$$

Je suppose de plus que

$$\sum \frac{\alpha_n \rho^n}{n^2} = F(\rho)$$

soit une fonction analytique autour de $\rho = 1$, de telle sorte que la série puisse être continuée analytiquement en dehors du cercle de convergence. Il en sera de même de

$$\Phi(\rho) = \sum \frac{\alpha_n \rho^n}{n^2(1 + \varepsilon n^2)}$$

et en effet $\Phi(\rho)$ est défini par l'équation différentielle :

$$\Phi(\rho) + \varepsilon(\rho^2 \Phi'' + \rho \Phi') = F$$

dont les intégrales sont analytiques.

Celle de ces intégrales qui nous convient est d'ailleurs :

$$\Phi = \frac{1}{2i\sqrt{\varepsilon}} \left[\rho^{-\frac{1}{i\sqrt{\varepsilon}}} \int_0^\rho \frac{F}{\rho} \rho^{\frac{1}{i\sqrt{\varepsilon}}} d\rho - \rho^{\frac{1}{i\sqrt{\varepsilon}}} \int_0^\rho \frac{F}{\rho} \rho^{-\frac{1}{i\sqrt{\varepsilon}}} d\rho \right].$$

Et on trouverait de même :

$$\Phi_1 = \frac{\alpha}{2} \left[\rho^{-\alpha} \int_0^\rho F_1 \rho^{\alpha-1} d\rho - \rho^\alpha \int_0^\rho F_1 \rho^{-\alpha-1} d\rho \right],$$

en posant, pour abréger,

$$\Phi_1(\rho) = \rho^2 \Phi''(\rho) + \rho \Phi'(\rho),$$

$$F_1(\rho) = \rho^2 F''(\rho) + \rho F'(\rho),$$

$$\alpha = \frac{1}{i\sqrt{\varepsilon}}.$$

On a, pour $\rho < 1$,

$$\sum \frac{\alpha_n}{1 + \varepsilon n^2} \rho^n = \Phi_1(\rho)$$

et, la série restant convergente pour $\rho = 1$, le théorème d'ABEL donne :

$$\sum \frac{\alpha_n}{1 + \varepsilon n^2} = \Phi_1(1) = \frac{\alpha}{2} \int_0^1 F_1(\rho^{\alpha-1} - \rho^{-\alpha-1}) d\rho.$$

L'application des principes du § 8 à cette intégrale montre que, quand ε tend vers 0 et par conséquent α vers l'infini, cette intégrale tend vers $F_1(1)$.

Or,

$$F_1(1) = \lim F_1(\rho) = \lim \sum \alpha_n \rho^n$$

pour $\rho = 1$; donc :

$$\lim \sum \alpha_n \rho^n \text{ (pour } \rho = 1) = \lim \sum \frac{\alpha_n}{1 + \varepsilon n^2} \text{ (pour } \varepsilon = 0).$$

§ 18.

Étude de la fonction méromorphe $\frac{I_n}{I'_n}$

Pour utiliser les résultats précédents, il importe de se rendre compte de la façon dont se comporte la série divergente

$$4i\pi\omega^2 D^2 \rho^2 \mu = \sum n(n+1)(2n+1) \frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega D)} P_n;$$

et pour cela il faut d'abord chercher comment se comporte le rapport $\frac{I_n}{I'_n}$ pour n très grand même par rapport à ωD .

Nous avons, il est vrai, trouvé déjà une expression approchée, mais il est nécessaire de pousser l'approximation plus loin. Envisageons le développement de $I_n(\xi)$ suivant les puissances de ξ , c'est-à-dire :

$$I_n = \xi^{-n} \left[1 + \frac{\xi^2}{4n-1.2} + \frac{\xi^4}{(4n-1.2)(8n-3.4)} + \frac{\xi^6}{(4n-1.2)(8n-3.4)(12n-5.6)} + \dots \right];$$

les premiers termes de ce développement nous donnent une valeur approchée de I_n pour

n très grand. On voit ainsi que $\xi^n I_n$ peut, au point de vue asymptotique, se développer suivant les puissances de $\frac{\xi^2}{n}$ et de $\frac{1}{n}$; si nous écrivons:

$$I_n \xi^n = 1 + \sum C_K \left(\frac{\xi^2}{n} \right)^K,$$

C_K étant développable suivant les puissances de $\frac{1}{n}$, il viendra:

$$\frac{I_n}{I'_n} = -\frac{\xi}{n} \left[\frac{1 + \sum C_K \left(\frac{\xi^2}{n} \right)^K}{1 + \sum C_K \left(\frac{\xi^2}{n} \right)^K - 2 \sum \frac{K}{n} C_K \left(\frac{\xi^2}{n} \right)^K} \right]$$

Si nous nous bornons aux premiers termes du développement, nous trouverons:

$$-\frac{I_n}{I'_n} \frac{n}{\xi} = 1 + 2C_1 \frac{\xi^2}{n^2} + 4C_2 \frac{\xi^4}{n^3} + 6C_3 \frac{\xi^6}{n^4} - 2C_1^2 \frac{\xi^4}{n^3} - 6C_1 C_2 \frac{\xi^6}{n^4} + 2C_1^3 \frac{\xi^6}{n^4} + 4C_1^2 \frac{\xi^4}{n^4}.$$

Or,

$$C_1 = \frac{1}{4 - \frac{2}{n}} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} \right), \quad C_1^2 = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{n} \right), \quad C_1^3 = \frac{1}{64},$$

$$C_2 = \frac{1}{\left(4 - \frac{2}{n} \right) \left(8 - \frac{12}{n} \right)} = \frac{1}{32} \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \left(1 + \frac{3}{2n} \right) = \frac{1}{32} \left(1 + \frac{2}{n} \right),$$

$$C_1 C_2 = \frac{1}{128}, \quad C_3 = \frac{1}{384};$$

d'où

$$-\frac{I_n}{I'_n} \frac{n}{\xi} = 1 + \xi^2 \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4n^3} + \frac{1}{8n^4} \right) + \xi^4 \left(\frac{3}{8n^4} \right) + \dots$$

Nous avons donc pour n très grand la formule approximative:

$$n(n+1)(2n+1) \frac{I_n}{I'_n} = -\xi(n+1)(2n+1) - \frac{\xi^3}{2}$$

à des termes près qui s'annulent avec $\frac{1}{n}$. Cette formule est applicable lorsque la partie réelle de n est positive et très grande, et lorsque par conséquent les termes en ξ^{-n} , ξ^{-n+1} , etc., sont pour les petites valeurs de ξ très grands par rapport aux termes en ξ^{n+1} , ξ^{n+2} , etc. Si au contraire la partie réelle de n est négative et très grande, c'est le contraire qui arrivera et ce seront les termes en ξ^{n+1} , etc. qui seront très grands par rapport aux termes en ξ^{-n} , etc.

Cette formule nous montre toutefois que:

$$\lim \frac{I_n}{I'_n} = 0 \quad \text{pour partie réelle de } n \text{ positive et très grande;}$$

et comme $\frac{I_n}{I'_n}$ ne change pas quand on change n en $-n-1$, on aura de même:

$$\lim \frac{I_n}{I'_n} = 0 \quad \text{pour partie réelle de } n \text{ négative et très grande.}$$

Je voudrais maintenant étudier de plus près l'expression

$$R(n) = n(n+1)(2n+1) \frac{I_n}{I'_n},$$

qui est une fonction méromorphe de n , et rechercher en particulier comment sont distribués les infinis de cette fonction méromorphe et surtout ceux pour lesquels n est très grand. Nous avons :

$$I_n = C \int \xi^{n+1} e^{i\xi x} (x^2 - 1)^n dx,$$

C étant un coefficient constant indépendant de ξ et de x , mais dépendant de n ; l'intégrale est prise le long d'un chemin allant de l'infini à l'infini, mais enveloppant le point singulier -1 . Nous devons surtout nous occuper des coefficients des termes en ξ^{-n} et ξ^{n+1} , que j'appellerai A_n et B_n ; on trouve :

$$A_n = e^{(2n+1)i\frac{\pi}{2}} (e^{4ni\pi} - 1) \Gamma(2n+1) C,$$

$$B_n = (e^{4ni\pi} - e^{2ni\pi}) e^{ni\pi} \frac{\Gamma(n+1) \sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} C.$$

Il est aisé de vérifier que, si l'on désigne par $\frac{A'_n}{B'_n}$ ce que devient le rapport $\frac{A_n}{B_n}$ quand on y change n en $-n-1$, on a comme il convient :

$$\frac{A_n}{B_n} \frac{A'_n}{B'_n} = 1.$$

Quoi qu'il en soit, nous pouvons écrire :

$$I_n = C(K_n + L_n),$$

où CK_n représente l'ensemble des termes du développement de I_n suivant les puissances de ξ qui sont de degré $-n$, $-n+1$, $-n+2$, etc., tandis que CL_n représente l'ensemble des autres termes, c'est-à-dire ceux qui sont de degré $n+1$, $n+2$, $n+3$, etc. Si n est très grand, K_n se réduit sensiblement à son premier terme $A_n \xi^{-n}$, et L_n à son premier terme $B_n \xi^{n+1}$; nous pourrions donc écrire :

$$I_n = C(A_n \xi^{-n} + B_n \xi^{n+1})$$

et

$$\frac{I_n}{I'_n} = \frac{A_n \xi^{-n} + B_n \xi^{n+1}}{-n A_n \xi^{-n-1} + (n+1) B_n \xi^n}.$$

Si la partie réelle de n est positive ou négative et très grande, l'un des termes du numérateur (comme du dénominateur) l'emportera de beaucoup sur l'autre. Si la partie imaginaire de n est très grande sans que sa partie réelle le soit, ces deux termes seront comparables et il pourra se faire que le dénominateur s'annule.

On obtiendra donc les racines du dénominateur en écrivant :

$$\xi^{2n+1} = \frac{A_n}{B_n} \frac{n}{n+1}$$

ou sensiblement

$$\xi^{2n+1} = \frac{A_n}{B_n} = \frac{2^{2n} i}{\pi e^{2i\pi n}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) (e^{2i\pi n} + 1)$$

ou, en remplaçant les fonctions eulériennes par leurs valeurs approchées,

$$\xi^{2n+1} = 4i\pi 2^{2n} e^{-2i\pi n} n^{2n} e^{-2n} 2\pi n$$

ou, en observant que l'argument de n doit être compris entre $-\pi$ et $+\pi$ (pour que les formules approchées des fonctions eulériennes soient applicables) et par conséquent

voisin de $\frac{\pi}{2}$,

$(2n+1)\log \xi = \log 8i\pi^2 + 2n(\log 2 - 1 - 2i\pi) + (2n+1)\log n - 2iK\pi$,
 K étant un entier. Cette formule pour n très grand équivaut sensiblement à

$$n \log n = iK\pi$$

ou encore, plus grossièrement, à

$$n = \frac{iK\pi}{\log K},$$

ce qui nous indique que les infinis de notre fonction méromorphe sont un peu moins « condensés » que les nombres entiers K , mais plus condensés que les puissances $K^{1+\varepsilon}$, quelque petit que soit ε .

Il y a intérêt à connaître le résidu correspondant. Posons

$$\Phi = \frac{B_n}{A_n} \xi^{2n+1}, \quad \Phi_1 = \frac{B_n}{A_n} \frac{n+1}{n} \xi^{2n+1},$$

d'où

$$\frac{I_n}{I'_n} = \frac{\Phi + 1}{\Phi_1 - 1} \frac{\xi}{n};$$

le résidu sera :

$$\frac{\xi}{n} \frac{1 + \Phi}{\Phi_1} \frac{1}{\text{dér} \log \Phi_1},$$

la dérivée logarithmique de Φ , étant prise par rapport à n . Mais pour une racine on doit avoir $\Phi_1 = 1$, et comme n est très grand, on a sensiblement $\Phi = \Phi_1$; il reste donc

$$\frac{2\xi}{n} \frac{1}{\text{dér} \log \Phi_1}.$$

Or on trouve sensiblement

$$\text{dér} \log \Phi_1 = -2 \log n,$$

d'où

$$\text{résidu de } \frac{I_n}{I'_n} = -\frac{\xi}{n \log n} = \frac{i\xi}{K\pi}.$$

Quant au résidu de $R(n)$ il est sensiblement $\frac{-2\xi n^2}{\log n}$.

Cela nous permet de tirer des conclusions au sujet du développement de la fonction $R(n)$; on voit que $\frac{I_n}{I'_n}$ s'annulant pour n très grand, il en est de même de $n^{-3} R(n)$, et la considération de la distribution des infinis et des résidus nous montre qu'on peut

construire dans le plan des n une série de cercles concentriques, de rayons indéfiniment croissants, tels que $n^{-3}R(n)$ tend uniformément vers zéro sur ces cercles, quand le rayon de ces cercles croît indéfiniment. L'application du théorème de CAUCHY suffit alors pour montrer que l'on a :

$$n^{-3}R(n) = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \sum \frac{B_K}{(n - \varepsilon_K)\varepsilon_K^3},$$

les α étant des constantes, les ε représentant les différents infinis de $n^{-3}R_n$ et les B_K étant les résidus correspondants de $R(n)$.

J'ai encore une remarque à faire au sujet de la distribution des infinis. Supposons que ξ soit très grand; si n est fini, $\frac{I_n}{I'_n}$ sera sensiblement égal à i et ne pourra pas devenir infini. Donc, tous les infinis auront un module très grand. Si maintenant n est très grand et réel positif, nous pourrons appliquer les formules du § 11; elles nous donnent :

$$\frac{I_n}{I'_n} = \frac{i}{\cos \eta} = \frac{i\xi}{\sqrt{n^2 - \xi^2}},$$

ce qui montre que nous ne pouvons avoir d'infini que pour $n = \xi$; mais pour n voisin de ξ , les formules du § 11 ne sont plus applicables et il faut recourir à celles du § 12. La conclusion subsiste quand, la partie réelle de n étant positive et très grande, la partie imaginaire est finie, ou simplement est très petite par rapport à ξ .

Si la partie réelle de n est négative et très grande, sa partie imaginaire étant finie ou petite par rapport à ξ , on peut ramener au cas précédent en changeant n en $-n - 1$, ce qui, comme on sait, ne change pas $\frac{I_n}{I'_n}$.

En résumé, si l'on fait abstraction des cas où il faut recourir aux procédés du § 12, tous les infinis ont leur partie imaginaire très grande de l'ordre de ξ .

Venons maintenant aux cas où il faut recourir à ces principes, c'est-à-dire où $\frac{n}{\xi}$ est voisin de ± 1 (mettons de $+1$); en reprenant les notations du § 12, les infinis cherchés seront donnés par la formule :

$$F'(te^{\frac{4i\pi}{3}}) = 0.$$

Si $t = t_0$ est la plus petite racine de cette équation, on posera comme au § 12 :

$$t = \varepsilon^2 \left(\frac{\xi}{2} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad n = \xi \cos \varepsilon = \xi - \xi \frac{\varepsilon^2}{2};$$

il viendra donc pour celui des infinis de $R(n)$ dont la partie imaginaire est la plus petite en valeur absolue :

$$n = \xi - t_0 \left(\frac{\xi}{2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui montre que la partie imaginaire de cet infini est très grande de l'ordre de $\xi^{\frac{1}{3}}$.

On pourrait pousser plus loin l'étude des infinis de $R(n)$. Supposons n très grand, mais d'argument quelconque; nous avons une valeur approchée de I'_n qui nous est fournie par les procédés du § 11. Soit

$$C^{-1} I'_n = \Phi(n)$$

cette valeur approchée. Cette valeur est applicable, non seulement pour n très grand réel positif, mais pour divers arguments de n . Pour tous les arguments qui diffèrent des premiers de π , on aura :

$$C^{-1} I'_n = \Phi(-n-1),$$

puisque $C^{-1} I'_n$ ne change pas quand on change n en $-n-1$. On verrait que l'on a dans tous les cas :

$$C^{-1} I'_n = \Phi(n) + \Phi(-n-1),$$

de sorte que les infinis seraient donnés par la formule

$$\Phi(n) + \Phi(-n-1) = 0.$$

Le coefficient C^{-1} devrait être choisi de telle sorte que $C^{-1} I'_n$ ne change pas quand on change n en $-n-1$, c'est-à-dire qu'on devrait, d'après le § 16, prendre

$$C^{-1} = (2i)^n \Gamma(n+1).$$

Mais il n'y a pas lieu d'insister sur tous ces points qui ne me sont pas utiles pour mon objet principal.

§ 19.

Sommation de séries diverses.

Nous allons envisager diverses séries de la forme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} R(n) P_n(\cos \varphi),$$

où $R(n)$ est une fonction rationnelle ou méromorphe de n . Parmi ces séries, il y en aura qui seront divergentes; par définition, et par application des principes du § 17, la somme de ces séries sera la limite vers laquelle tend la série

$$\sum R(n) \rho^n P_n$$

quand ρ , d'abord plus petit que 1, tend vers l'unité. Cette limite existera dans les cas que nous aurons à traiter.

Nous partirons de l'identité

$$(1) \quad \frac{-2i\pi}{e^{ix(\varphi-2\pi)} - e^{ix\varphi}} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n+x}.$$

On peut démontrer cette identité, soit en développant le 1^{er} membre par la formule de FOURIER, soit en considérant ce 1^{er} membre comme une fonction méromorphe de x , décomposable en éléments simples, soit encore par d'autres procédés.

Cette identité suppose toutefois que φ est compris entre 0 et 2π .

Soit maintenant

$$f(z) = \sum A_n z^n$$

une fonction de z holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1. On aura, par le théorème de CAUCHY,

$$(2) \quad 2i\pi A_n = \int f(z) z^{-n-1} dz, \quad 0 = \int f(z) z^n dz \quad (n \geq 0)$$

si l'intégrale est prise le long d'un cercle de rayon $1 - \varepsilon$.

Soit

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x - n - 1};$$

il viendra, d'après les formules (2),

$$(3) \quad 2i\pi U = \int f(z) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{n+x} dz.$$

Mais si nous faisons $z = e^{i\psi}$, il viendra, d'après l'identité (1),

$$(4) \quad \sum \frac{z^n}{n+x} = \frac{-2i\pi}{e^{ix(\psi-2\pi)} - e^{ix\psi}},$$

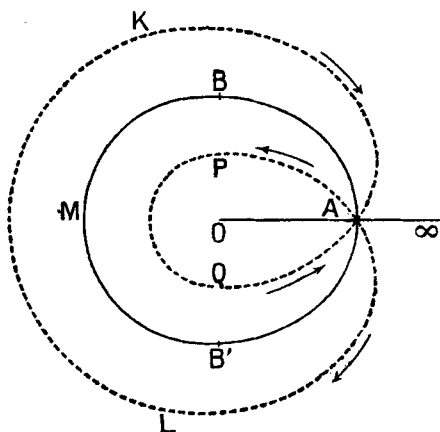
d'où

$$(5) \quad U = \lambda(x) \int f(z) z^{-x} dz$$

avec

$$(6) \quad \lambda(x) = \frac{e^{2ix\pi}}{e^{2ix\pi} - 1}.$$

Le chemin d'intégration est représenté sur la Figure 8 :



(Fig. 8).

O est l'origine dans le plan des z , A est le point 1; $ABMB'$ est le cercle de rayon 1; OA est une coupure rectiligne. Le chemin d'intégration doit différer peu du cercle ABB' , puisque nous avons fait dans nos formules $z = e^{i\psi}$; il doit être à l'intérieur de ce cercle, pour que la fonction $f(z)$ reste holomorphe; il doit partir du point A pour aboutir au point A , puisque ψ doit rester compris entre 0 et 2π pour que la

formule (1) reste applicable. La valeur de χ^{-x} au point A initial est 1, et au point A final elle sera $e^{-2i\pi x}$. Le chemin d'intégration sera donc le chemin $APQA$ parcouru dans le sens de la flèche.

Nous chercherons une valeur approchée de U quand x est très grand, et pour cela nous appliquerons les principes du § 8. Si la partie imaginaire de x est positive et très grande, $\lambda(x)$ est sensiblement égal à $-e^{2ix\pi}$; les seuls éléments sensibles de l'intégrale sont ceux qui sont voisins du point A final, de sorte que nous trouvons pour l'intégrale :

$$f(1) \frac{e^{2i\pi(1-x)}}{1-x} = \frac{f(1)e^{-2ix\pi}}{1-x}$$

et

$$U = -\frac{f(1)}{1-x}.$$

Si la partie imaginaire de x est négative et très grande, $\lambda(x)$ est sensiblement égal à 1; les seuls éléments sensibles de l'intégrale sont ceux qui sont voisins du point A initial, de sorte que nous trouvons pour l'intégrale

$$f(1) \frac{-1}{1-x}$$

et encore

$$U = -\frac{f(1)}{1-x}.$$

On peut prendre, par exemple,

$$f(z) = \sum z^n e^{i\varphi n} = \frac{1}{1 - ze^{i\varphi}},$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{x - n - 1} = \frac{1}{x-1} \frac{1}{1 - e^{i\varphi}};$$

mais ce n'est pas là l'application que nous avons en vue; nous prendrons

$$(7) \quad f(z) = \sum P_n z^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z \cos \varphi + z^2}}$$

et nous en tirerons

$$(8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{x - n - 1} = \frac{1}{2(x-1) \sin \frac{\varphi}{2}}$$

C'est là une première sommation d'une série de la forme $\sum R(n)P_n$; mais, ainsi que nous allons le voir, les résultats sont bien différents quand la fonction rationnelle $R(n)$ jouit de la propriété

$$R(n) = -R(-n-1).$$

Comme premier exemple, prenons

$$R(n) = \frac{1}{x - n - 1} + \frac{1}{-x - n}.$$

Nous avons trouvé d'abord :

$$(9) \quad \sum \frac{P_n}{x - n - 1} = \lambda(x) \int f(z) \chi^{-x} dz$$

$f(z)$ étant la fonction (7). En changeant dans cette formule x en $1 - x$, on trouve :

$$(10) \quad \sum \frac{P_n}{-x - n} = \lambda(1 - x) \int f(z) z^{x-1} dz.$$

Transformons cette intégrale en faisant $z = \frac{1}{u}$; il viendra :

$$- \int f\left(\frac{1}{u}\right) u^{1-x} \frac{du}{u^2}.$$

Quand z décrira le chemin $APQA$ dans le sens de la flèche, u décrira le chemin $ALK A$ dans le sens de la flèche ; la valeur initiale de u^{-x} sera 1 et la valeur finale sera $e^{2i\pi x}$. Mais

$$\lambda(1 - x) = -e^{-2i\pi x} \lambda(x);$$

nous pouvons donc transformer la formule (10) et écrire :

$$(11) \quad \sum \frac{P_n}{-x - n} = -\lambda(x) e^{-2i\pi x} \int f(z) z^{x-1} dz = \lambda(x) e^{-2i\pi x} \int f\left(\frac{1}{u}\right) u^{1-x} \frac{du}{u^2}.$$

Mais $e^{-2i\pi x} u^{-x}$ peut être regardé comme une autre détermination de u^{-x} , à savoir celle qui, au lieu d'avoir 1 pour valeur initiale et $e^{2i\pi x}$ pour valeur finale, a $e^{-2i\pi x}$ comme valeur initiale et 1 comme valeur finale. Nous pouvons donc écrire :

$$\sum \frac{P_n}{-x - n} = \lambda(x) \int f\left(\frac{1}{u}\right) u^{1-x} \frac{du}{u^2};$$

l'intégration est prise le long de $ALK A$ avec la valeur initiale $e^{-2i\pi x}$ pour u^{-x} . Mais $f\left(\frac{1}{u}\right) = u f(u)$, ce qui donne :

$$(12) \quad \sum \frac{P_n}{-x - n} = \lambda(x) \int f(u) u^{-x} du.$$

Si l'on observe que la valeur initiale de z^{-x} dans (9) est égale à la valeur finale de u^{-x} dans (12) et inversement, on voit qu'il est possible de raccorder les deux intégrales.

Pour calculer $\sum R(n) P_n$, nous n'aurons qu'à ajouter les deux formules (9) et (12), après avoir dans cette dernière remplacé u par z , ce qui est un simple changement de notation ; on trouve alors :

$$(13) \quad \sum R(n) P_n = \lambda(x) \int f(z) z^{-x} dz.$$

L'intégrale est prise le long du contour fermé $APQALK A$, la valeur initiale et finale de z^{-x} étant 1. On remarquera que, si l'on pratique les coupures $OA \infty$ et BMB' , cette dernière allant de $B = e^{i\varphi}$ à $B' = e^{i(2\pi - \varphi)}$, les deux fonctions $f(z)$ et z^{-x} deviennent uniformes ; et que notre contour ne coupe pas ces coupures. Nous pouvons en conséquence déformer notre contour d'intégration d'une manière continue, pourvu que ce contour reste fermé, enveloppe la coupure BMB' , en laissant en dehors la coupure $OA \infty$. Nous pouvons par exemple prendre un contour qui suit l'une des lèvres de la coupure $B'MB$ du côté interne en allant de B en B' et qui revient ensuite de B' en

B , en suivant l'autre lèvre de cette même coupure; ce que nous pouvons encore écrire:

$$(14) \quad \sum R(n) P_n = 2 \lambda(x) \int_B^{B'} f(z) z^{-x} dz$$

avec cette condition que l'intégrale doit être prise le long de la coupure sur la lèvre interne.

Nous allons chercher à évaluer approximativement l'intégrale (14), en appliquant les méthodes du § 8.

Deux cas sont à distinguer:

Si la partie imaginaire de x est positive et très grande, on aura sensiblement:

$$\lambda(x) = -e^{2ix\pi}$$

et les seuls éléments sensibles de l'intégrale seront ceux qui sont voisins du point B' ; on aura alors:

$$\sum R P_n = -2 e^{2ix\pi} \int_{2\pi-\varphi}^{2\pi} \frac{i e^{i(1-x)\psi} d\psi}{\sqrt{i(\varphi + \psi - 2\pi)} (e^{-2i\varphi} - 1)}.$$

Nous pouvons remplacer au numérateur l'exponentielle $e^{i(1-x)\psi}$ par

$$e^{i(2\pi-\varphi-x\psi)} = e^{-i\varphi} e^{-ix\psi}$$

et les formules du § 8 nous donnent, à un facteur numérique près,

$$\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{e^{-2i\varphi} - 1}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-ix(2\pi-\varphi)},$$

d'où

$$\sum R P_n = K \frac{e^{ix\varphi}}{\sqrt{(1 - e^{2i\varphi})x}} \quad (K \text{ étant un facteur numérique}).$$

On remarquera que la partie imaginaire de x étant positive, l'exponentielle $e^{ix\varphi}$ est très petite.

Supposons maintenant que la partie imaginaire de x soit négative et très grande; on aura sensiblement:

$$\lambda(x) = 1$$

et les seuls éléments sensibles de l'intégrale seront voisins du point B ; on aura donc:

$$\sum R P_n = 2 \int_{\varphi}^{\infty} \frac{i e^{i(1-x)\psi} d\psi}{\sqrt{i(\psi - \varphi)} (e^{2i\varphi} - 1)}.$$

On peut remplacer $e^{i(1-x)\psi}$ par $e^{i\varphi} e^{-ix\psi}$, ce qui donne, à un facteur numérique près,

$$\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{e^{2i\varphi} - 1}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-ix\varphi}$$

On a donc:

$$\sum R P_n = K' \frac{e^{-ix\varphi}}{\sqrt{(1 - e^{-2i\varphi})x}}.$$

Ici encore, la partie imaginaire de x étant négative, l'exponentielle $e^{-ix\varphi}$ est très petite.

On voit donc que les deux parties de la somme,

$$\sum \frac{P_n}{x - n - 1}, \quad \sum \frac{P_n}{-x - n},$$

se compensent presque exactement.

Supposons maintenant

$$R(n) = (2n + 1)^p.$$

Nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho D \cos \varphi + D^2}} = \sum \frac{\rho^n}{D^{n+1}} P_n = S,$$

formule valable pour $\rho < D$.

Introduisons le symbole d'opération:

$$\Delta S = \rho \frac{dS}{d\rho} - D \frac{dS}{dD};$$

nous trouverons successivement:

$$\Delta S = \sum (2n + 1) \frac{\rho^n}{D^{n+1}} P_n, \quad \Delta^2 S = \sum (2n + 1)^2 \frac{\rho^n}{D^{n+1}} P_n$$

et en général:

$$\Delta^p S = \sum (2n + 1)^p \frac{\rho^n}{D^{n+1}} P_n.$$

Quand on permute ρ et D , la fonction S ne change pas, le symbole Δ se change en $-\Delta$, et $\Delta^p S$ se change en

$$(-1)^p \Delta^p S.$$

Si donc p est impair et si on fait $D = \rho$, on aura:

$$\Delta^p S = 0.$$

Nous avons:

$$\Delta^p S = \sum (2n + 1)^p \frac{\rho^n}{D^{n+1}} P_n$$

en supposant $\rho < D$; faisons $D = 1$, faisons tendre ρ vers D , le premier membre tendra vers zéro, le second membre tendra vers une limite qui sera par définition la somme de la série divergente

$$\sum (2n + 1)^p P_n.$$

On aura donc, pour p impair,

$$\sum (2n + 1)^p P_n = 0.$$

On conclura de là que

$$\sum R(n) P_n = 0$$

quand $R(n)$ est un polynôme entier tel que

$$R(n) = -R(-n - 1).$$

§ 20.

Conclusion.

Appliquons ces principes à notre problème. Nous avons trouvé :

$$(1) \quad \mu = \frac{-i}{4\pi\omega^2 D^2 \rho^2} \sum n(n+1)(2n+1) \frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega \rho)} P_n.$$

Nous avons vu au § 17 que la limite de cette expression, pour $\rho = D$, est

$$(2) \quad \mu = \frac{-i}{4\pi\omega^2 D^4} \sum R(n) P_n,$$

où

$$R(n) = n(n+1)(2n+1) \frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega D)},$$

la somme de la série divergente (2) étant définie comme nous l'avons fait aux §§ 17 et 19.

Nous avons observé ensuite que $R(n)$ est une fonction méromorphe de n satisfaisant à la condition

$$R(n) = -R(-n-1).$$

Nous avons vu ensuite au § 18 que cette fonction méromorphe peut être décomposée en éléments simples. Soit ε_k l'un des infinis de $R(n)$, et B_k le résidu correspondant; la série

$$(3) \quad \sum \frac{B_k n^3}{\varepsilon_k^3 (n - \varepsilon_k)}$$

est convergente et sa somme ne diffère de $R(n)$ que par un polynôme du 2^d degré.

Distinguons parmi les infinis ε_k ceux dont la partie imaginaire est positive; nous aurons en outre les infinis $-1 - \varepsilon_k$ qui auront leur partie imaginaire négative, et le résidu correspondant sera $+B_k$; on peut donc diviser la série (3) en deux parties,

$$(4) \quad \sum \frac{B_k n^3}{\varepsilon_k^3 (n - \varepsilon_k)}, \quad \sum \frac{B_k n^3}{(1 + \varepsilon_k)^3 (n + 1 + \varepsilon_k)},$$

en ne donnant aux ε_k que les valeurs dont la partie réelle est positive.

Comparons la 2^{de} série (4) à la suivante :

$$- \sum \frac{B_k (n+1)^3}{\varepsilon_k^3 (n+1+\varepsilon_k)}.$$

Nous constaterons que ces deux séries convergent et que leur différence est un polynôme du 2^d degré en n . Cela nous permet d'écrire :

$$(5) \quad R(n) = \prod (n) + \sum Q_k(n)$$

avec

$$Q_k(n) = \frac{B_k n^3}{\varepsilon_k^3 (n - \varepsilon_k)} - \frac{B_k (n+1)^3}{\varepsilon_k^3 (n+1+\varepsilon_k)}.$$

On aura d'ailleurs :

$$(6) \quad \prod(n) = -\prod(-n-1),$$

$$(7) \quad Q_k(n) = -Q_k(-n-1).$$

Nous sommes ainsi conduits à envisager la double somme :

$$(8) \quad \sum_n \prod(n) P_n + \sum_n \sum_k Q_k(n) P_n.$$

Nous observerons que, d'après le § 19 et la relation (6), on aura :

$$\sum \prod(n) P_n = 0.$$

D'autre part,

$$Q_k(n) = \varpi_k(n) + B_k \left[\frac{1}{n - \varepsilon_k} + \frac{1}{n + 1 + \varepsilon_k} \right],$$

ϖ_k étant un polynôme du 2^d degré, tel que

$$\varpi_k(n) = -\varpi_k(-n-1),$$

ce qui entraîne :

$$\sum \varpi_k(n) P_n = 0,$$

$$\sum_n Q_k(n) P_n = B_k \sum \left[\frac{1}{n - \varepsilon_k} + \frac{1}{n + 1 + \varepsilon_k} \right] P_n.$$

Or la somme qui figure ici au 2^d membre est, aux notations près, celle que nous avons évaluée au § 19.

Comme $-\varepsilon_k$ a sa partie imaginaire négative, elle est égale à

$$K' \frac{e^{i\varepsilon_k \Phi}}{\sqrt{\varepsilon_k (1 - e^{-2i\Phi})}},$$

K' étant un facteur numérique. La somme (8) prend ainsi la forme :

$$(9) \quad K' \sum_k \frac{B_k e^{i\varepsilon_k \Phi}}{\sqrt{\varepsilon_k (1 - e^{-2i\Phi})}}.$$

Nous savons que la série $\sum \frac{B_k}{\varepsilon_k^{\frac{1}{3}}}$ converge absolument; mais les exponentielles $e^{i\varepsilon_k \Phi}$ décroissent beaucoup plus rapidement que les facteurs $\frac{1}{\varepsilon_k^{\frac{1}{3}}}$; nous sommes donc certains que la série (9) converge, et il est aisé de s'assurer que sa somme est bien la même que celle de la série (8). Les termes de la série (9) décroissent même si rapidement qu'on peut réduire la série à son 1^{er} terme et écrire :

$$(10) \quad \mu = \frac{K''}{\omega^2 D^4} \frac{B_1 e^{i\varepsilon_1 \Phi}}{\sqrt{\varepsilon_1 (1 - e^{-2i\Phi})}},$$

K'' étant un nouveau facteur numérique.

Qu'est ce maintenant que ε_1 ? La remarque finale du § 18 nous permet de nous en rendre compte; on a

$$\varepsilon_1 = \omega D - t_0 \left(\frac{\omega D}{2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

t_0 étant la plus petite racine de l'équation

$$F'(te^{\frac{4i\pi}{3}}) = 0.$$

Ainsi l'expression de μ contiendra un facteur $e^{ie_1\varphi}$, ce facteur décroîtra très rapidement quand φ augmentera, c'est-à-dire à mesure qu'on s'éloignera de la source; son module est, en effet, égal à

$$e^{-h\varphi},$$

h étant la partie imaginaire de ε_1 ; or cette partie imaginaire est de la forme :

$$m(\omega D)^{\frac{1}{3}},$$

m étant un facteur numérique, ou en prenant $D = 1$, de la forme :

$$m\omega^{\frac{1}{3}}$$

Quand φ augmente, c'est-à-dire quand on s'éloigne de la source, l'amplitude des oscillations varie sensiblement comme l'exponentielle

$$e^{-m\omega^{\frac{1}{3}}\varphi}$$

C'est là notre conclusion finale. Comme ω est très grand, $\omega^{\frac{1}{3}}$ est très grand aussi, de sorte que cette décroissance est très rapide, quoique moins rapide que si l'exposant était de la forme $-m\omega\varphi$.

Cette conclusion finale permet-elle d'expliquer les phénomènes observés? Pour s'en rendre compte, il convient d'abord de se reporter à la remarque du § 7, d'après laquelle les ondes hertziennes possèdent un spectre continu, où les composantes qui correspondent à des valeurs de ω qui ne sont pas très grandes ne sont pas négligeables. Cette explication est-elle suffisante? il est permis d'en douter. Des calculs numériques et des expériences précises permettront seuls de trancher la question.

Peut-être sera-t-on obligé d'en revenir à une autre hypothèse déjà souvent proposée, et d'après laquelle les couches supérieures de l'atmosphère, devenues conductrices par ionisation, réfléchiraient les ondes. Ce qui viendrait à l'appui de cette opinion, c'est la grande différence constatée entre les transmissions à grande distance de nuit et de jour. Il est possible, en effet, que les conditions de l'ionisation n'étant pas les mêmes de nuit et de jour, le passage des couches non-conductrices aux couches conductrices se fasse plus brusquement la nuit, de façon à rendre la réflexion possible.

Notre conclusion finale, est exactement conforme à celle que j'avais formulée dans les leçons que j'ai professées à l'École supérieure de Télégraphie et qui ont été reproduites dans la « Lumière électrique ». Elle est, en revanche, en contradiction avec une formule que j'ai donnée dans les « Comptes Rendus ».

Je dois au public l'explication de mes palinodies successives. A l'époque de mes leçons de l'École de Télégraphie, j'avais introduit par une voie indirecte l'équation différentielle du § 12, et je m'étais contenté, comme démonstration, d'un simple aperçu. Reprenant ensuite la question, je trouvais les formules approchées des §§ 11, 13 et 14; je voyais bien qu'elles cessaient d'être applicables quand n est très voisin de $\omega\rho$ ou de ωD , mais je croyais, par erreur, que les termes correspondants étaient trop peu nombreux pour avoir une influence et que je pouvais sans inconvénient appliquer les formules approchées sans restriction. C'est le contraire qui arrive; les termes auxquels ces formules ne sont pas applicables ont une somme sensible, et qui compense presque exactement celle des autres. C'est là l'origine de ma Note des « Comptes Rendus ».

Je ne m'étais pas encore aperçu de mon erreur quand j'ai fait mes conférences de Göttingen; au moment où ces conférences ont été imprimées, je venais seulement de la reconnaître et j'ai dû me borner à indiquer, par une note brève en français, que la dernière formule était inexacte.

Paris, 15 octobre 1909.

H. POINCARÉ.
