

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter.

Diese Zeitschrift erscheint
monatlich.
Bezugspreis für das Jahr 3 M.
Einzelnnummer 40 Pfg.
Bestellungen nimmt der Geschäfts-
leiter entgegen.

Zeitschrift des Arnstädter Verbandes
mathematischer u. naturwissenschaftlicher
Vereine an Deutschen Hochschulen.

Anzeigen
nimmt der Schriftleiter entgegen.
 $\frac{1}{2}$ Seite 20 M., $\frac{1}{4}$ 12 M.,
 $\frac{1}{8}$ 6,50 M., $\frac{1}{16}$ 3,50 M.
Die Halbzelle 30 Pfg.
Bei Wiederholung Preis-
ermäßigung.

Nummer 4.

Berlin, April 1911.

8. Jahrgang.

Über einige Gleichungen in der Theorie der Hertz'schen Wellen.

Von Henri Poincaré - Paris.

Vortrag, gehalten am 13. Oktober 1910 im Math. Verein an der Universität Berlin.

Meine Herren! Ich will einen kleinen Satz über die Hertz'schen Wellen Ihnen beweisen und dieser Satz ist mit den Greenschen Sätzen ähnlich. Man kann mit Hilfe dieses Satzes die wichtigsten Probleme lösen, welche auf diesem Gebiete sich darstellen. Ich werde die Maxwell'schen Bezeichnungen gebrauchen, aber nur die Lichtgeschwindigkeit als Einheit der Geschwindigkeit nehmen.

sind die Komponenten der elektrischen Verschiebung; a, β, γ sind die Komponenten der magnetischen Kraft. Also gelten für diese Funktionen die bekannten Maxwell'schen Gleichungen, d. h.

$$4\pi \cdot \frac{df}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$

$$-\frac{da}{4\pi \cdot dt} = \frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz}$$

und die anderen Gleichungen, die man von diesen durch Symmetrie erzielen kann.

Ich setze voraus, daß alle unsere Funktionen von der Zeit so abhängen, daß sie der Exponentialfunktion

$$e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

proportional sind.

Wenn man einen physikalischen Sinn darüber bekommen will, so muß man nur den reellen Bestandteil unserer Funktion nehmen; und man hat, wenn ω reell ist, eine ungedämpfte, periodische Schwingung. Wenn die Schwingung gedämpft ist — das setze ich hier [voraus] —, so ist ω komplex. Ich setze [also] hier voraus, daß ω komplex und daß die Schwingung gedämpft ist. Wir haben nun:

$$4\pi \frac{df}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi \cdot i \cdot \omega \cdot a \cdot f$$

$$-\frac{da}{4\pi \cdot dt} = \frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz} = -\frac{i \omega a}{4\pi}$$

Dies sind die Gleichungen des Maxwell'schen Feldes.

Jetzt denke ich mir irgend eine geschlossene Fläche S . Ich betrachte den inneren Raum und den äußeren Raum. Ich betrachte zwei verschiedene Felder, z. B.

$f_1, g_1, h_1; a_1, \beta_1, \gamma_1;$
dies ist das erste Feld; aber das zweite Feld wird mit dem Index 2 bezeichnet:
 $f_2, g_2, h_2; a_2, \beta_2, \gamma_2.$
Ich betrachte das Integral, das ich mit $[f_1, a_2]$ bezeichne:

$$\int \begin{vmatrix} f_1, g_1, h_1 \\ a_2, \beta_2, \gamma_2 \\ l, m, n \end{vmatrix} d\sigma = [f_1, a_2]$$

$d\sigma$ ist ein Flächenelement der Fläche S ; l, m, n sind die Richtungs-cos dieses Elementes. Man sieht, daß in unserer Determinante die tangentiellen Komponenten unserer beiden Felder

vorkommen, die normalen Komponenten haben nichts zu tun, sie verschwinden. Es ist wichtig, dies zu bemerken. Wenn man eine teilweise Integration durchführt, so bekommt man die folgende Gleichung:

$$[f_1, a_2] = - \int d\tau \left[\frac{i\omega}{4\pi} \cdot \sum_{a, \beta, \gamma} a_1 \cdot a_2 + 4 i\omega \sum_{f, g, h} f_1 \cdot f_2 \right].$$

Dies ist ein Raumintegral, das durch alle Raumelemente $d\tau$ des inneren Gebietes durchgeführt werden muß. Sie können sehen, daß dieser Ausdruck symmetrisch ist [in bezug auf die Indizes]:

$$[f_1, a_2] = [f_2, a_1].$$

Das ist unser Satz; aber der Satz ist nur für das innere Gebiet so bewiesen. Wenn wir ihn für das äußere Gebiet beweisen wollen, so kommt eine kleine Schwierigkeit vor.

Wir könnten für einen Raum zwischen der Fläche S und einer großen Kugel von unendlich zunehmendem Radius den Satz beweisen und in die Grenzen gehen. Und das könnte gehen, wenn im Unendlichen alle unsere Funktionen verschwinden. Aber das ist nicht immer der Fall. Es ist dann der Fall, wenn ω reell ist, wenn der imaginäre Bestandteil von ω positiv ist. Aber dies ist nicht der Fall, wenn dieser Bestandteil negativ ist, d. h. im Falle der gedämpften Schwingungen. Wir müssen also einen weiten Umweg machen.

Ich werde den Satz zuerst für den Fall der Kugel durchführen. Es sei also S eine Kugel. Sei irgend ein System von drei Funktionen in dem Raume [gegeben]. Diese drei Funktionen in dem Raume stellen die Komponenten eines Vektors dar; dieser Vektor hängt von dem Punkte (x, y, z) ab. Seien ξ, η, ζ diese drei Komponenten. Man kann diese drei Komponenten so in dieser Weise definieren:

$$\begin{aligned} \xi &= x \cdot \sum P \cdot T + \sum U \cdot \frac{dP}{dx} + \sum \left(z \cdot \frac{dP}{dy} - y \cdot \frac{dP}{dz} \right) \cdot V \\ \eta &= y \cdot \sum P \cdot T + \sum U \cdot \frac{dP}{dy} + \sum \left(x \cdot \frac{dP}{dz} - z \cdot \frac{dP}{dx} \right) \cdot V \\ \zeta &= z \cdot \sum P \cdot T + \sum U \cdot \frac{dP}{dz} + \sum \left(y \cdot \frac{dP}{dx} - x \cdot \frac{dP}{dy} \right) \cdot V \end{aligned}$$

P sind die sogenannten Kugelpolynome; man hat also: $\Delta P = 0$.

Das Polynom P ist homogen; man erhält daher:

$$\sum_{xyz} x \cdot \frac{dP}{dx} = n \cdot P.$$

T, U, V hängen nur von r ab, sind also von der Form $f(r)$. Diesen Satz zu beweisen, das wäre etwas länger; aber können bemerken, daß wir haben:

$$\sum x \cdot \xi = \sum P (r^2 \cdot T + n \cdot U).$$

Wir wissen also, daß irgend eine Funktion im Raume, wenn sie im Unendlichen verschwindet, kann nach Kugelpolynomen entwickelt werden mit Koeffizienten, welche nur von r abhängen. Wir haben [für] $\sum \frac{d\xi}{dx}$ einen ähnlichen Ausdruck und auch für

$$\sum x \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right).$$

Wir können bemerken, daß unser Vektor (ξ, η, ζ) auch von den Ausdrücken

$\sum x \xi, \sum \frac{d\xi}{dx}$ und $\sum x \left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right)$ ganz bestimmt ist. Und wirklich, wenn

$$\sum x \xi = \sum \frac{d\xi}{dx} = \sum x \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) = 0 \text{ sind,}$$

verschwinden, so verschwindet der Vektor (ξ, η, ζ) . Denn $\sum x \xi = 0$ bedeutet: Der Vektor ist der Kugeloberfläche tangential, er berührt die Kugeloberfläche. Was heißt die zweite Gleichung

$$\sum \frac{\xi d}{dx} = 0?$$

d. h. wir haben auf der Kugeloberfläche keine Konvergenz. Und was heißt die dritte Gleichung

$$\sum x \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) = 0?$$

Das bedeutet: Auf der Kugeloberfläche gibt es keine Rotation; es ist ein [sogenannter] irrotationaler Vektor. Ein Vektor, welcher auf einer geschlossenen Fläche keine Konvergenz und keine Rotation besitzt, verschwindet identisch. Also, wir können den Satz annehmen.

Jetzt werden wir also unsere beiden Vektoren (f, g, h) und (a, β, γ) in dieser Art entwickeln. Ich werde zuerst den Satz $[f_1, a_2] = [f_2, a_1]$ beweisen für einen besonderen Fall. Ich setze voraus, daß a, β, γ nur ein einfaches Glied der Entwicklung enthält; d. h., daß wir haben z. B.

$$a = \left(z \frac{dP}{dy} - y \frac{dP}{dz} \right) \cdot V \text{ usw.}$$

Wenn a, β, γ gegeben sind, so kann man f, g, h mit den Maxwellschen Gleichungen leicht berechnen. Ein solches Feld heiße ein einfaches Feld erster Gattung.

Setzen wir jetzt voraus, daß wir haben

$$f = \left(z \cdot \frac{dP}{dy} - y \cdot \frac{dP}{dz} \right) \cdot V \text{ usf.,}$$

und berechnen wir die magnetische Kraft mit den Maxwellschen Gleichungen. Ein solches Feld heiße ein einfaches Feld zweiter Gattung. Ein beliebiges Feld ist die Summe einer unendlichen Reihe von einfachen Feldern erster und zweiter Gattung. Es genügt also, unseren Satz zu beweisen für den Fall, wo die beiden Felder einfache Felder erster oder zweiter Gattung sind. Also betrachten wir unseren Ausdruck $[f_1, a_2] - [f_2, a_1]$, welcher nach unserem Satz verschwinden muß. Dieser Ausdruck ist von dem Radius der Kugel unabhängig. Denn wir können den Raum betrachten, welcher zwischen zwei Kugeln von verschiedenem Radius steht; und dieser Raum ist endlich. Also wir haben keine Schwierigkeit. Für diesen Raum gilt der Satz. Dieser Ausdruck verschwindet für die beiden Grenzen des Raumes; also $[f_1, a_2] - [f_2, a_1]$ hat denselben Wert für die innere und die äußere Kugel und ist von r unabhängig. Wir haben vorausgesetzt, daß unsere beiden Felder einfache Felder sind, welche von zwei Funktionen V abhängen, und diese Funktionen können V und V_2 heißen. Unser Ausdruck hängt von den Funktionen V_1 und V_2 ab. Und man kann sehen: V muß einer Gleichung genug tun, V ist eine Funktion von r :

$$V + \frac{2(n+1)}{r} \cdot V + \omega^2 \cdot V = 0.$$

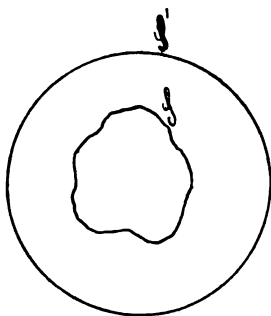
Wir brauchen bloß eine (partikuläre) Lösung dieser algebraischen Gleichung (mit) zu nehmen, das ist die Lösung: $V = e^{-i\omega r} \pi \left(\frac{1}{r} \right)$, wo π ein ganzes Polynom ist.

Man kann beweisen, daß unser Ausdruck von der Form $e^{-2i\omega r} \pi \left(\frac{1}{r} \right)$ ist.

Diese partikuläre Lösung ist diejenige, welche die Bedingung erfüllt, daß die Störung von der Quelle bis zum Unendlichen fortgepflanzt wird. Dieser Ausdruck kann nur konstant und von r unabhängig sein, wenn er ganz identisch verschwindet. Der Satz ist also für das äußere Gebiet einer Kugel bewiesen.

Um diesen Satz für irgend eine Fläche zu erweitern, das ist jetzt ganz leicht.

Wir haben eine Fläche S und eine große Kugel S' . Dieser Satz gilt für den Raum außerhalb S' , weil S' eine Kugel ist; er gilt für den Raum zwischen S und S' ; er muß also für den Raum außerhalb S' gelten. Ich betrachte jetzt, was ich Grundfunktion nennen werde; wir haben zwei Arten von Grundfunktionen. S ist eine Oberfläche; das wird die Oberfläche des Hertzschen Leiters, des Hertzschen Erregers oder des Hertzschen Akzeptors oder eines beugenden Körpers.



Unsere Funktionen $f, g, h; a, \beta, \gamma$ genügen den Maxwellschen Gleichungen außerhalb S und innerhalb S und sie verhalten sich regulär innerhalb S und außerhalb S , aber sie sind unstetig an der Oberfläche S .

f und a , das sind die Grundfunktionen. f_1^e ist die Funktion in dem äußeren Gebiete, f_1^i in dem inneren Gebiete.

μ ist ein konstanter Koeffizient; [dann ist]: $f_1^e = \mu \cdot f_1^i$ für die tangentiellen Komponenten der elektrischen Verschiebung und $f_1^e = f_1^i$ für die Normalkomponenten der elektrischen Verschiebung. Für die magnetische Kraft ist es umgekehrt:

$$a_1^e = a_1^i \text{ für die tangentiellen Komponenten und}$$

$$a_1^e = \mu \cdot a_1^i \text{ für die normalen Komponenten.}$$

Dies ist für die [Grund]-funktionen der I. Gattung und für die Funktionen der II. Gattung ist es umgekehrt:

$f_2^e = f_2^i$ für die tangentiellen Komponenten und $f_2^e = \mu' \cdot f_2^i$ für die normalen Komponenten der elektrischen Verschiebung [und entsprechend die Komponenten der magnetischen Kraft]. Also, wenn wir haben den Ausdruck $\left[f_1^e, a_2^e \right]$, so hängt dieser Ausdruck, wie ich schon oben bemerkt habe, nur ab von den tangentiellen Komponenten. Ich setze voraus, daß das erste Feld $f_1, \dots$ durch eine Grundfunktion erster Gattung bestimmt wird, und das zweite Feld $f_2, \dots$ durch eine Grundfunktion zweiter Gattung.

Man hat also:

$$\left[f_1^e, a_2^e \right] = \mu \cdot \mu' \left[f_1^i, a_2^i \right]$$

und umgekehrt hat man:

$$\left[f_2^e, a_1^e \right] = \left[f_2^i, a_1^i \right].$$

Nach unserem Satze ist aber der erste Ausdruck dem zweiten gleich; also alle Ausdrücke müssen verschwinden, wenn nicht $\mu \cdot \mu' = 1$ ist.

Das ist eine Eigenschaft der Grundfunktion.

Ich will unser Feld nach Grundfunktionen entwickeln in der folgenden Weise: f und a sind das betrachtete Feld. Ich setze:

$$f = \sum \lambda_k \cdot f_k \text{ und } a = \sum \lambda'_k \cdot a'_k,$$

f_k und a'_k sind die Grundfunktionen erster Gattung, a'_k und f'_k sind die Grundfunktionen II. Gattung, welche so gewählt werden, daß $\mu \cdot \mu' = 1$ ist, wenn man zwei Grundfunktionen von verschiedener Gattung, aber von demselben Index k betrachtet. Wie kann man nun die Entwicklung durchführen, wie kann man die Koeffizienten λ berechnen? Man hat $[f, a_j] = \sum \lambda_k [f_k, a'_j]$ und die Glieder dieses Ausdruckes verschwinden nach unserem Satze, wenn $\mu \cdot \mu' \neq 1$ ist oder wenn die Indizes verschieden sind: $j \neq k$. Man kann annehmen, daß unsere Grundfunktionen nur bis auf konstante Koeffizienten bestimmt sind. — Ich kann annehmen, daß, wenn $j = k$ ist, unser Ausdruck $[f_j, a'_j] = 1$ ist. Es bleibt also in der Entwicklung nur ein Glied, nämlich λ_j ; alle anderen verschwinden, also:

$$[f, a'_j] = \lambda_j. —$$

Wir können in dieser Weise die Koeffizienten der Entwicklung berechnen. Um die Möglichkeit der „Entwicklung“ zu beweisen, müßte man die Fredholm-Hilbertsche Methode benutzen. Dazu habe ich nicht Zeit genug. Ich betrachte ein physikalisches Problem:

S ist die Oberfläche des Rezeptorleiters; f, a bezeichnen das sogenannte innere Feld, welches von den Oberflächen-Konduktionsströmen auf der Oberfläche des Rezeptorleiters erzeugt wird, und f^*, a^* sind das äußere Feld, d. h. das Feld, welches die Konduktionsströme der Oberfläche des Erregers erzeugen. Das Doppelfeld ist $f + f^*$.

Das äußere Feld ist bekannt; ich setze voraus, daß wir eine bekannte Quelle von Hertzschen Wellen besitzen, und wir werden den Einfluß dieser Quelle auf einen Rezeptorleiter studieren. Das äußere Feld ist gegeben; unbekannt ist das innere Feld (f, a). Da das äußere Feld bekannt ist, so können wir es entwickeln in der obigen Weise. a_i^* ist das Feld innerhalb, a_e^* ist das Feld außerhalb der Leiterfläche. Man kann schreiben: $a_i^* = a_e^*$, weil die Oberfläche des Rezeptorleiters für das äußere Feld, (das nur von den Erregerströmen erzeugt ist,) nicht eine Unstetigkeitsfläche ist. Da die Oberfläche des Rezeptorleiters keine Unstetigkeit aufweist und da das Feld bekannt ist, so können wir dieses entwickeln in der Weise:

$$a_i^* = a_e^* = \sum \lambda'_k \cdot a'_k.$$

Es wird entwickelt hier nach den Funktionen I. Gattung. Die Koeffizienten λ' sind bekannt und können nach früherer Formel berechnet werden. Im Innern des Leiters gibt es kein Feld, also

$$a_i + a_i^* = 0$$

und wir haben:

$$a_i^* = - \sum \lambda'_k \cdot a'_k.$$

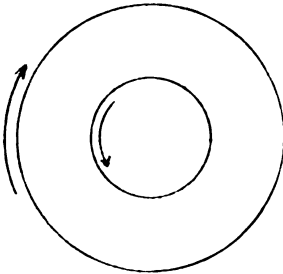
Und wir müssen jetzt a_e , das innere Feld, aber außerhalb der Leiterfläche berechnen, und nach den Eigenschaften und der Definition der Grundfunktionen hat man:

$$a_e = - \sum \lambda'_k \cdot \mu'_k \cdot a'_k.$$

Diese Formel gilt nur für die tangentiellen Komponenten der magnetischen Kraft. Da die Komponenten des äußeren Feldes schon bekannt sind, so sind die tangentiellen Komponenten der magnetischen Kraft des totalen Feldes $a_e + a_e^*$ vollständig bestimmt, man kann daher die Oberflächenkonduktionsströme berechnen. a_e ist also ganz bestimmt. Um die Existenz der Grundfunktion, die Möglichkeit der Entwicklung zu beweisen, oder um die Grundfunktion wirklich zu bekommen, muß man die Fredholm-Hilbertsche Methode anwenden. Das

kann ich hier nicht ausführlich erklären; aber es ist ein Satz der für die Theorie der elektrischen Wellen benutzt werden kann.

Ich hätte gewünscht Ihnen etwas Neueres vorzutragen, aber unglücklicherweise ist es nicht ganz fertig. Meine Absicht war die periodische Lösung des Dreikörperproblems weiterzustudieren. Ich habe die Existenz dieser Lösung für die kleinen Werte der Massen bewiesen, aber für die größeren Werte der Massen wußte ich gar nichts und ich versuchte die Existenz der Lösungen in sämtlichen Fällen zu beweisen. Dazu brauchte ich einen Satz; das ist der folgende:



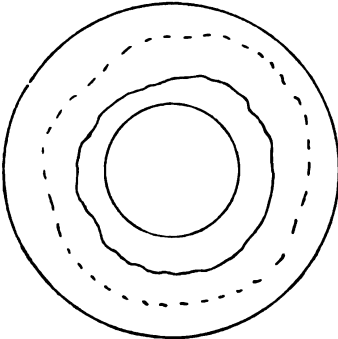
Sei in der Ebene ein Ring mit einem äußeren und einem inneren Kreise, Grenzkreise. Ich denke mir eine Punkttransformation von diesem Ring in sich selbst; diese ist eine stetige und umkehrbar eindeutige. Der äußere Kreis geht in sich selbst über und ebenso der innere. Die Punkttransformation transformiert den Ring in sich selbst. Ich setze voraus, daß jeder Punkt für die äußere Grenze im Sinne des Uhrzeigers, für die innere Grenze im entgegengesetzten Sinne geht.

Der Satz ist: Wenn für die Punkttransformation der Flächeninhalt unverändert bleibt oder wenn die Punkttransformation irgend welche positive Integralinvariante besitzt, so sind in dem Ringe immer 2 invariante Punkte, die von der Transformation nicht verändert werden.

Um den Satz zu beweisen, habe ich auf folgende Weise versucht: Seien xy die Polarkoordinaten; ich kann sie auch als rektanguläre Koordinaten betrachten. Unsere Kreise werden [dabei] Gerade, und der Ring ist unendlich schmal auf der Ebene.

$$\frac{(x,y)}{r}$$

(xy) sind ganz bestimmt, und die Richtung der Bewegung des äußeren Grenzkreises ist ganz bestimmt.



Aber ich betrachte jetzt die Punkttransformation derselben Beschaffenheit; aber ich setze nicht voraus, daß diese Punkttransformation einen integralinvarianten Punkt besitzt oder daß sie den Flächeninhalt nicht ändert. Aber ich setze voraus, daß wir keinen invarianten Punkt im Innern des Kreises haben. Und ich versuchte zu beweisen, daß in diesem Falle ich immer eine solche geschlossene Kurve bekomme, die durch die Transformation in eine andere geschlossene Kurve transformiert wird, die entweder ganz innerhalb oder ganz außerhalb liegt. Der Flächeninhalt bleibt also nicht unverändert; es ist bewiesen, daß unsere Transformation keine integralinvarianten Punkte besitzt.

Aber leider geben sich viele, viele besondere Fälle zu betrachten. Ich habe mancherlei besondere Fälle betrachtet, und in jedem ist es mir gelungen, die Kurve zu finden und den

Satz zu beweisen. Ich glaube keinen Fall vergessen zu haben; aber ich bin noch nicht ganz sicher davon. Ich glaubte indessen, daß es nicht ohne Interesse sein könnte.

Das Jubiläum der Firma B. G. Teubner.

Die heutige Weltfirma B. G. Teubner ging vor 100 Jahren aus sehr bescheidenen Anfängen einer Druckerei hervor. Am 21. Februar 1811 erwarb Benedict Gotthelf Teubner die vorher seinem Schwager Weinedel gehörige Druckerei. Das Geschäft war 1791 von Joh. Chr. Otto gegründet worden, aber nicht gediehen, so daß der Kurfürstl. Bauschreiber Weinedel am 22. Februar 1806 die aus zwei hölzernen Pressen und 40 Zentnern Schrift bestehende Druckerei aus dem Konkurs erwerben konnte.

Die Leitung übernahm nach längeren Bitten Teubner, der bei dem Hofbuchdrucker Meinhold in Dresden die 5jährige Lehrzeit beendet und sich dann in Leipzig und Preßburg weiter ausgebildet hatte. Obgleich damals der Geschäftsgang im allgemeinen sehr flau war, gelang es Teubner doch, eine dritte Presse und 13 Zentner Schrift anzuschaffen. Eine energische Hand hatte eingegriffen; unter besonderer Anerkennung leitete Teubner die Druckerei erst für seinen Schwager, dann für dessen Witwe und von 1809 ab für die Erben, bis er 1811, 3 Jahre nach dem Tod Weinedels, die Druckerei käuflich erwarb.

Trotz der mißlichen Zeitverhältnisse gelang es dem rührigen Manne, seine Druckerei immer mehr auszubauen und zu vergrößern, eine Buchhandlung zu errichten und mit dem