

RAPPORT SUR LE PRIX BOLYAI.

Par M. Henri Poincaré (Paris).

[Reproduit avec l'autorisation de l'ACADÉMIE HONGROISE DES SCIENCES].

PROCÈS VERBAL DES SÉANCES DE LA COMMISSION INTERNATIONALE DE 1910.

A l'occasion du centième anniversaire de la naissance de JEAN BOLYAI, l'ACADÉMIE HONGROISE DES SCIENCES, voulant perpétuer le souvenir de cet illustre savant, ainsi que celui du profond penseur que fut FARKAS BOLYAI, son père et son maître, avait décidé de fonder un prix international qui devait porter le nom de *Prix Bolyai*. Ce prix devait être décerné pour la première fois en 1905 ¹⁾, puis de 5 en 5 ans à l'auteur du meilleur ouvrage de mathématiques paru au cours des 5 années précédentes, en prenant en considération toute son œuvre antérieure.

D'après le règlement du prix, l'Académie avait confié le soin de le décerner pour les années 1905-1909 à une Commission composée de deux membres résidents: M. JULES KÖNIG, secrétaire de la classe des Sciences, M. GUSTAVE RADOS, membre de la Classe, et deux membres étrangers: M. GÖSTA MITTAG-LEFFLER, membre de l'Académie des Sciences suédoise, et M. HENRI POINCARÉ, membre de l'Institut de France.

La Commission s'est réunie à Budapest le 17 et 18 octobre 1910 et elle a désigné comme président M. JULES KÖNIG et comme rapporteur M. HENRI POINCARÉ.

Parmi les travaux les plus dignes d'attention publiés dans les 5 dernières années, la Commission a particulièrement remarqué ceux de M. DAVID HILBERT, qui par la profondeur de la pensée, l'originalité des méthodes, la rigueur logique des démonstrations, ont déjà exercé une influence considérable sur les progrès des sciences mathématiques.

Après avoir examiné les titres divers de cet auteur, et prenant en considération non seulement ses travaux des 5 dernières années, mais ses recherches antérieures et l'ensemble de sa carrière scientifique, la Commission a unanimement décidé de décerner le *Prix Bolyai* de l'ACADÉMIE DES SCIENCES HONGROISE pour les années 1905-1909 à

M. David Hilbert.

Les motifs de cette décision seront exposés dans le rapport de M. POINCARÉ.

Ce procès verbal a été accepté à l'unanimité.

Budapest, 18 octobre 1910.

KÖNIG, *Président*;
POINCARÉ, *Rapporteur*;
MITTAG-LEFFLER;
RADOS.

¹⁾ Pour le prix BOLYAI décerné en 1905, voir le Rapport de M. RADOS, publié dans ces Rendiconti, tome XXI (1^{er} semestre 1906), pp. 367-385.

RAPPORT DE M. POINCARÉ.

Les problèmes traités par M. HILBERT sont tellement variés et leur importance est si évidente qu'un long préambule ne nous semble pas nécessaire. Je crois préférable d'entrer immédiatement dans l'exposé détaillé de ses principaux mémoires. Le lecteur en présence de résultats si considérables tirera la conclusion de lui-même.

Les Invariants.

Les premiers travaux de M. HILBERT sont relatifs à la théorie des invariants. On sait avec quelle passion cette partie des mathématiques a été cultivée vers le milieu du siècle dernier et combien elle a été délaissée depuis. Il semblait en effet que les CLEBSCH, les GORDAN, les CAYLEY, les SYLVESTER eussent épuisé tout ce qu'on pouvait tirer des méthodes anciennes et qu'il n'y eût plus après eux que peu de chose à glaner. Mais les progrès de l'Algèbre et de l'Arithmétique, et en particulier la théorie des nombres entiers algébriques, l'extension qu'on en fit bientôt aux polynômes entiers, la théorie des modules de KRONECKER allaient permettre d'aborder la question par un côté encore inexploré. C'est ce qu'a fait M. HILBERT en s'attaquant tout d'abord au célèbre théorème de GORDAN, d'après lequel tous les invariants d'un système de formes peuvent s'exprimer d'une façon rationnelle et entière en fonctions d'un nombre fini d'entre eux. On ne saurait mieux mesurer le progrès accompli, qu'en comparant le volume que GORDAN avait dû consacrer à sa démonstration, aux quelques lignes dont HILBERT a pu se contenter. La méthode gagnait en généralité autant qu'en simplicité et on pouvait entrevoir toute une série de généralisations possibles. Un lemme très simple, inspiré par les idées de KRONECKER, avait rendu ce résultat possible.

Considérons une série indéfinie de formes F dépendant de n variables; on peut trouver parmi elles un nombre fini de formes $F_1, \dots, F_p$ telles qu'une forme quelconque F de la série puisse être égale à

$$(1) \quad F \equiv A_1 F_1 + \dots + A_p F_p,$$

les A étant des formes dépendant des mêmes variables. C'est là une conséquence de la notion fondamentale de module introduite par KRONECKER dans la science. Cela veut dire dans le langage de KRONECKER que les diviseurs communs à plusieurs modules, ceux-ci fussent-ils en nombre infini, sont les sous-multiples de l'un d'entre eux qui est leur plus grand commun diviseur, et dans le langage géométrique (en supposant 4 variables et les regardant comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace) que l'ensemble des points communs à un nombre infini de surfaces algébriques se compose d'un nombre fini de points isolés et d'un nombre fini de courbes gauches algébriques.

Mais ce n'est pas tout; supposons que les F soient les invariants d'un système de

formes et les A des fonctions des coefficients de ces formes. On peut toujours supposer que les A sont aussi des invariants, sans quoi on pourrait effectuer sur les formes une transformation linéaire arbitraire. Alors dans la relation (1), ainsi transformée, figureraient les coefficients de cette transformation. En appliquant à la relation (1) transformée, un certain processus de différentiations successives (les différentiations s'effectuant par rapport aux coefficients de la transformation linéaire) on arrive à une relation de même forme que (1) mais où les A sont des invariants. La démonstration du théorème de GORDAN s'en déduit immédiatement.

Mais ce n'est pas tout; entre ces invariants fondamentaux, il y a un certain nombre de relations appelées syzygies. Toutes les syzygies peuvent se déduire d'un nombre fini d'entre elles par addition et multiplication. Entre ces syzygies fondamentales du 1^{er} ordre, il y a des syzygies du 2^d ordre, qui peuvent aussi se déduire d'un nombre fini d'entre elles par addition et multiplication, et ainsi de suite.

M. HILBERT déduit ce résultat d'un théorème général d'algèbre. Considérons un système d'équations linéaires de la forme :

$$\sum F_{ik} X_i = 0,$$

où les F sont des formes données et les X des formes inconnues homogènes par rapport à certaines variables; l'étude des solutions de ce système et des relations qui les lient, conduit à considérer une série de systèmes dérivés jusqu'à ce qu'on arrive à un système dérivé qui n'admet plus aucune solution. C'est ainsi d'ailleurs que M. HILBERT fut amené à déterminer et à étudier le nombre $\chi(R)$ des conditions distinctes auxquelles doit satisfaire une forme de degré R pour être congrue à zéro par rapport à un module donné.

Mais pour compléter la théorie, il ne suffisait pas d'établir l'existence d'un système d'invariants fondamentaux, il fallait donner les moyens de le former effectivement, et ce problème a été ramené par l'auteur à une question qui se rattache à la théorie des nombres entiers algébriques étendue aux polynômes entiers.

Le problème est ainsi décomposé en trois autres.

1^o Trouver des invariants J_m en fonctions desquels tous les autres puissent s'exprimer sous une forme *entière et algébrique*, c'est-à-dire tels qu'un invariant quelconque J satisfasse à une équation algébrique

$$J^k + G_1 J^{k-1} + G_2 J^{k-2} + \dots + G_{k-1} J + G_k = 0,$$

les G étant des polynômes entiers par rapport aux J_m .

2^o Trouver des invariants en fonctions desquels tous les autres puissent s'exprimer rationnellement.

3^o Trouver des invariants en fonctions desquels tous les autres puissent s'exprimer sous forme entière et rationnelle.

De ces trois problèmes le premier est le plus difficile. Si on le suppose résolu, l'ensemble des invariants se présente comme un *corps algébrique*, et le premier pas à faire c'est de déterminer le degré de ce corps; c'est à quoi parvient M. HILBERT, au

moins pour les formes binaires, en évaluant de deux manières différentes le nombre $\varphi(\sigma)$ des invariants linéairement indépendants de degré σ , ou plutôt la valeur asymptotique de cette fonction numérique $\varphi(\sigma)$ pour σ très grand.

Une fois le premier problème résolu, la solution des deux autres se ramène à une question classique de l'arithmétique des polynômes et de la théorie des corps algébriques. Il s'agit donc de trouver les invariants fondamentaux à l'aide desquels tous les autres s'expriment sous forme entière et algébrique.

A cet effet M. HILBERT remarque que ce sont ceux qui ne peuvent s'annuler sans que tous les autres s'annulent. On conçoit ainsi que la recherche de ces invariants fondamentaux sera singulièrement facilitée par l'étude des *formes nulles*, c'est-à-dire de celles dont les coefficients numériques sont choisis de telle sorte que les valeurs numériques de tous les invariants soient nulles.

Dans le cas des formes binaires, les formes nulles sont celles qui sont divisibles par une puissance suffisamment élevée d'un facteur linéaire; mais dans les autres cas le problème est plus délicat. L'auteur met d'abord en évidence un certain nombre de théorèmes.

Considérons une forme à coefficients numériques, et sa transformée par une substitution linéaire quelconque; les coefficients de cette transformée seront des polynômes entiers par rapport aux coefficients de la substitution. Si le déterminant de la substitution est une fonction *algébrique et entière* de ces polynômes entiers, la forme proposée n'est pas une forme nulle. Dans le cas contraire, c'est une forme nulle.

Considérons, d'autre part, les transformées d'une forme par une substitution linéaire dépendant d'un paramètre arbitraire t et de telle façon que les coefficients de cette substitution soient des séries développables suivant les puissances entières, positives ou négatives, mais croissantes, de ce paramètre. S'il s'agit d'une forme nulle, on peut choisir une substitution de cette nature, de telle sorte que son déterminant devienne infini pour $t = 0$, tandis que les coefficients de la forme transformée restent finis. M. HILBERT montre que cette condition est nécessaire pour que la forme proposée soit nulle, et il est d'ailleurs évident qu'elle est suffisante. A chaque forme nulle correspond donc une et peut-être plusieurs substitutions linéaires jouissant de la propriété énoncée. Cela posé, l'auteur démontre que, partant d'une forme nulle quelconque, on peut, par une transformation linéaire, la transformer en une forme nulle *canonique*. Une forme est dite canonique quand la substitution linéaire, qui lui correspond et qui jouit par rapport à elle de la propriété que nous venons d'énoncer, est de la forme simple:

$$\begin{vmatrix} t^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{\lambda_3} \end{vmatrix}.$$

La recherche des formes nulles est ainsi ramenée à celle des formes nulles canoniques qui est beaucoup plus simple. On trouve que les formes nulles canoniques sont celles auxquelles il manque certains termes; et la détermination des termes qui doivent manquer peut se faire aisément grâce à un schéma géométrique simple. On voit sous

quel aspect nouveau et élégant se présentent aujourd'hui, grâce à M. HILBERT, des problèmes qui avaient tenté tant de géomètres il y a cinquante ans.

Le nombre e .

M. HERMITE a le premier démontré que le nombre e est transcendant et peu de temps après M. LINDEMANN étendait ce résultat au nombre π . C'était là une conquête importante pour la science, mais les méthodes d'HERMITE étaient encore susceptibles de perfectionnements; quelque ingénieuses et quelque originales qu'elles fussent, on sentait qu'elles ne conduisaient pas au but par le plus court. Ce chemin le plus court, M. HILBERT l'a trouvé et il semble qu'on ne puisse plus apporter désormais à la démonstration de simplification nouvelle.

C'était la seconde fois que M. HILBERT donnait d'un théorème connu, mais qu'on ne pouvait établir que par des considérations ardues, une démonstration d'une étonnante simplicité. Cette faculté de simplifier ce qui avait d'abord semblé complexe, se présentait ainsi comme un des caractères de son talent.

Arithmétique.

Les travaux arithmétiques de M. HILBERT ont principalement porté sur les corps algébriques. L'ensemble des nombres qui peuvent s'exprimer rationnellement en fonctions d'un ou de plusieurs nombres algébriques constitue un domaine de rationalité, et l'ensemble des nombres de ce domaine qui sont des entiers algébriques constitue un corps. Si on envisage ensuite tous les nombres algébriques d'un corps qui peuvent être mis sous la forme :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p,$$

où les α sont des nombres *donnés* du corps et les x des nombres indéterminés de ce même corps, l'ensemble de ces nombres est ce qu'on appelle un *idéal*. Ce qui fait l'intérêt de cette considération, c'est que les idéaux obéissent, en ce qui concerne leur divisibilité, aux lois habituelles de l'Arithmétique et qu'en particulier tout idéal est décomposable d'une manière, et d'une seule, en idéaux premiers. C'est là le *théorème fondamental* de DEDEKIND.

D'autre part, nous pouvons considérer des nombres qui satisfont à une équation algébrique dont les coefficients appartiennent à un domaine D de rationalité. Ces nombres et ceux qui peuvent s'exprimer rationnellement par leur moyen, définiront un nouveau domaine de rationalité D' plus étendu que D , et un corps algébrique K' plus étendu que le corps K qui correspond à D . On peut alors rapporter le corps K' , non pas aux nombres rationnels vulgaires et au corps des entiers de l'arithmétique ordinaire, mais au domaine D et au corps algébrique K . On pourra alors parler du degré *relatif* de K' par rapport à K , de la *norme relative* d'un nombre algébrique de K' par rapport

à K , etc. Il y aura des corps relativement quadratiques obtenus par l'adjonction au domaine D' d'un radical $\sqrt[\mu]{\mu}$, μ étant un nombre du domaine D , et des corps relativement abéliens, obtenus par l'adjonction à D des racines d'une équation abélienne. Il y a là une sorte de généralisation des idées de DEDEKIND, que HILBERT n'est sans doute pas le premier à avoir entrevue, mais dont il a tiré un parti inattendu.

Nous devons aussi parler des corps *galoisiens*, dont l'équation génératrice est une équation de GALOIS. Un corps quelconque est contenu dans un corps galoisien, de la même façon que le corps K' , dont nous parlions tout à l'heure, est contenu dans le corps K ; et ce corps galoisien s'obtient sans peine en adjoignant au domaine de rationalité, non seulement l'une des racines de l'équation algébrique génératrice de K , mais *toutes* ses racines. Les questions relatives à un corps quelconque sont ainsi ramenées aux problèmes analogues pour les corps galoisiens.

Après avoir montré comment on pouvait, par la discussion d'une congruence, former tous les idéaux de norme donnée, M. HILBERT a cherché une démonstration nouvelle du théorème fondamental de DEDEKIND; il l'a établi d'abord pour les corps galoisiens et l'a étendu ensuite sans peine à un corps quelconque.

M. HILBERT fut ainsi conduit à étudier la théorie générale des corps galoisiens, et il introduisit une foule de notions nouvelles, en définissant une série de sous-corps, correspondant à divers sous-groupes du groupe de GALOIS de l'équation génératrice; ces sous-groupes sont définis par certaines relations qu'ils ont avec un idéal premier quelconque du corps, et l'étude de ces sous-corps nous ouvre des aperçus nouveaux et intéressants sur la structure du corps.

L'auteur donna en 1896 une démonstration nouvelle du théorème de KRONECKER, d'après lequel les racines des équations abéliennes peuvent s'exprimer par les racines de l'unité. Cette démonstration purement arithmétique met en évidence la façon de construire tous les corps abéliens d'un groupe et d'un discriminant donné.

Mais les travaux de M. HILBERT ont eu pour objet principal l'étude des corps relativement quadratiques et relativement abéliens. Un des points essentiels de la théorie des nombres est la loi de réciprocité de GAUSS, au sujet des résidus quadratiques; on sait avec quelle prédilection le grand géomètre est revenu sur cette question et combien il a multiplié les démonstrations.

Cette loi de réciprocité est susceptible de généralisations intéressantes lorsque l'on passe du domaine des nombres rationnels ordinaires à un domaine de rationalité quelconque. M. HILBERT a pu réaliser cette généralisation dans le cas où le corps k est imaginaire et a un nombre de classes impair. Il a introduit un symbole analogue à celui de LEGENDRE, et la loi de réciprocité à laquelle il est parvenu se présente sous une forme simple; le produit d'un certain nombre de pareils symboles doit être égal à 1. Cette généralisation présente d'autant plus d'intérêt que l'auteur a pu montrer qu'il y a des genres correspondants à la moitié de tous les systèmes imaginables de caractères, résultat qui doit être rapproché de celui de GAUSS et qui permet l'extension à un domaine de rationalité quelconque de cette notion du genre des formes quadra-

tiques qui fait l'objet d'un des chapitres les plus attrayants des *Disquisitiones Arithmeticae*.

Pour aller plus loin, M. HILBERT est obligé d'introduire une notion nouvelle et de modifier la définition de la classe. Deux idéaux appartiennent à la même classe au sens large ou ancien, si leur rapport est un nombre algébrique existant quelconque; ils appartiennent à la même classe au sens étroit ou nouveau si leur rapport est un nombre algébrique existant *qui est positif ainsi que tous ses conjugués*. Les nombres de classes, entendus soit au sens large, soit au sens étroit, sont évidemment en relation intime, et l'auteur explique quelle est la nature de cette relation. Mais cette définition nouvelle permet à M. HILBERT d'exprimer dans un langage plus simple les théorèmes qu'il avait en vue. Ces théorèmes énoncés sous leur forme la plus générale sont, comme le dit HILBERT, d'une remarquable simplicité et d'une beauté cristalline; leur démonstration complète apparaissait à l'auteur comme le but final de ses études sur les corps algébriques. C'est sous cette forme générale que nous les énoncerons.

Si k est un corps quelconque, il existe un groupe Kk qu'on peut appeler son *Klassenkörper*. Son degré relatif est égal au nombre des classes au sens étroit. Il est non-ramifié, c'est-à-dire qu'aucun idéal premier de k n'est divisible par le carré d'un idéal premier de Kk et il contient tous les corps non ramifiés relativement abéliens par rapport à k .

Son groupe relatif est isomorphe au groupe abélien qui définit la composition des classes d'idéaux de k .

Les idéaux premiers de k , quoique premiers par rapport à k , ne le sont pas, en général, par rapport à Kk ; ils peuvent donc être décomposés en facteurs idéaux premiers par rapport à Kk ; le nombre de ces facteurs et la puissance à laquelle ils sont élevés, en un mot le mode de décomposition, dépendent uniquement de la classe à laquelle appartient dans le corps k l'idéal envisagé.

Appelons *ambige* un nombre de Kk qui est positif ainsi que tous ses conjugués et qui ne diffère de ces conjugués que par un facteur qui est une unité complexe.

Chaque ambige de Kk correspond à un idéal de k et réciproquement. Cette propriété est caractéristique du corps Kk parmi tous les corps relativement abéliens par rapport à k .

On voit quelle est la portée de ces théorèmes et quelle lumière elle jette sur la notion de classe, puisque les relations mutuelles des classes d'idéaux sont reproduites comme par une image fidèle par celles des entiers algébriques d'un corps.

A la vérité M. HILBERT n'a démontré complètement ces théorèmes que dans des cas particuliers, mais ces cas particuliers sont très nombreux, très variés et très étendus. Il est d'ailleurs, dit-il, persuadé que ses méthodes sont applicables au cas général. Tout en partageant sa conviction, nous sommes obligés de faire des réserves, tant que cet espoir, si légitime qu'il soit, n'a pas été effectivement réalisé.

Nous avons parlé plus haut de la loi de réciprocité relative aux restes quadratiques; nous aurions dû ajouter que M. HILBERT a donné une loi analogue pour ses restes de puissances quelconques, au moins pour certains corps particuliers.

En résumé, l'introduction des idéaux par KUMMER et DEDEKIND a été un progrès considérable, elle a généralisé et éclairé en même temps les résultats classiques de GAUSS sur les formes quadratiques et leur composition. Les travaux de M. HILBERT, que nous venons d'analyser, constituent un nouveau pas en avant et qui n'est pas moins important que le premier.

Théorème de Waring.

Parlons maintenant d'un autre travail arithmétique entièrement différent. Il s'agit de démontrer le théorème de WARING, d'après lequel tout entier peut être décomposé en une somme de N puissances $n^{\text{èmes}}$, N ne dépendant que de n , de même qu'il peut par exemple être toujours décomposé en une somme de 4 carrés. Inutile de rappeler que ce théorème avait jusqu'ici été simplement énoncé.

Ce qui mérite surtout d'attirer l'attention dans la démonstration de M. HILBERT, c'est qu'elle repose sur une façon nouvelle d'introduire les variables continues dans la théorie des nombres.

On part d'une identité où une intégrale 25^{uple} est égale à la puissance m^{e} de la somme de cinq carrés. Décomposant le domaine d'intégration en domaines plus petits de façon à avoir une série de valeurs approchées de l'intégrale, comme s'il s'agissait de l'évaluer par quadratures mécaniques, et par les méthodes de passage à la limite familières à l'auteur, on arrive à une autre identité :

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2)^m = \sum r_b Y_b^{2m},$$

où les r_b sont des nombres positifs rationnels et les Y des fonctions linéaires des x à coefficients entiers. Les coefficients r et ceux des Y , ainsi que le nombre de ces fonctions linéaires ne dépendent que de m .

Jusqu'ici nous ne sommes pas sortis de l'algèbre, si ce n'est pour montrer que les coefficients r et ceux de Y sont rationnels. Pour aller plus loin, l'auteur établit une série de lemmes dont l'énoncé est trop compliqué pour pouvoir être reproduit ici et qui l'amènent finalement à la démonstration complète du théorème. Nous ne devons pas douter que ces considérations, qui permettent aussi d'obtenir des relations arithmétiques en les faisant sortir d'identités où figurent des intégrales définies, ne puissent un jour, quand on en aura bien compris le sens, être appliquées à des problèmes bien plus étendus que celui de WARING.

Géométrie.

J'arrive aux travaux si originaux de M. HILBERT sur les fondements de la géométrie. Il y a dans l'histoire de cette philosophie géométrique, trois époques principales : la 1^{ère} est celle où des penseurs, à la tête desquels nous devons citer BOLYAI, ont fondé la géométrie non-euclidienne ; la 2^{de} est celle où HELMHOLTZ et LIE ont montré le rôle en géométrie de la notion de mouvement et de groupe ; la 3^e a été ouverte par

HILBERT. L'auteur allemand se place au point de vue logique. Quels sont les axiomes que l'on énonce et ceux que l'on sous-entend; quel en est le véritable contenu logique et qu'en pourrait-on tirer par la simple application des règles logiques et sans nouvel appel à l'intuition? Sont-ils enfin indépendants, ou pourrait-on, au contraire, les déduire les uns des autres? Voilà quelles sont les questions à traiter.

M. HILBERT commence donc par établir la liste complète des axiomes, en s'efforçant de n'en pas oublier un; cela n'est pas aussi facile qu'on pourrait croire, et EUCLIDE lui-même en applique qu'il n'énonce pas. L'intuition géométrique nous est tellement familière que nous faisons usage des vérités intuitives pour ainsi dire sans nous en apercevoir. De là, pour atteindre le but que se proposait HILBERT, la nécessité de ne pas accorder à l'intuition la plus petite place.

Le savant professeur répartit les axiomes en cinq groupes :

I. *Axiome der Verknüpfung* (je traduirai par *axiomes projectifs*, au lieu de chercher une traduction littérale, comme par exemple *axiomes de la connection*, qui ne saurait être satisfaisante).

II. *Axiome der Anordnung* (axiomes de l'ordre).

III. Axiomes de la Congruence ou axiomes métriques.

IV. Axiome d'EUCLIDE.

V. Axiome d'ARCHIMÈDE.

Parmi les axiomes projectifs, nous distinguerons ceux du plan et ceux de l'espace; les premiers sont ceux qui dérivent de la proposition bien connue : *par deux points passe une droite et une seule*.

Passons au second groupe, celui des axiomes de l'ordre. Voici l'énoncé des deux premiers :

« Si trois points sont sur une même droite, il y a entre eux une certaine relation « que nous exprimons en disant que l'un des points, et un seulement, est entre les deux « autres. Si C est entre A et B , si D est entre A et C , D sera aussi entre A et B , etc. ».

Ici encore on remarquera que nous ne faisons pas intervenir l'intuition; nous ne cherchons pas à approfondir le sens du mot *entre*, toute relation satisfaisant aux axiomes pourrait être désignée par le même mot.

Le troisième groupe comprend les axiomes métriques où nous distinguerons trois sous-groupes, relatifs respectivement aux longueurs, aux angles et aux triangles.

Un point important ici n'est pas traité; il aurait fallu compléter la liste des axiomes en disant que le segment AB est congruent au segment inverse BA . Cet axiome implique la symétrie de l'espace et l'égalité des angles à la base dans un triangle isocèle. M. HILBERT ne traite pas ici cette question, mais il en a fait l'objet d'un mémoire sur lequel nous reviendrons plus loin.

Le quatrième groupe ne comprend que le postulatum d'EUCLIDE.

Le cinquième groupe comprend deux axiomes; le premier et le plus important est celui d'ARCHIMÈDE.

Soient deux points quelconques A et B sur une droite D ; soit a un segment

quelconque; construisons sur D , à partir du point A , et dans la direction AB , une série de segments tous égaux entre eux et égaux à a : AA_1 , A_1A_2 , ..., $A_{n-1}A_n$; on pourra toujours prendre n assez grand pour que le point B se trouve sur l'un de ces segments.

C'est-à-dire que, si l'on se donne deux longueurs quelconques l et L , on peut toujours trouver un nombre entier n assez grand pour que, en ajoutant n fois à elle-même la longueur l , on obtienne une longueur totale plus grande que L .

Le second est l'*Axiom der Vollständigkeit* dont j'expliquerai plus loin le sens.

Indépendance des axiomes. — La liste des axiomes une fois dressée, il faut voir si elle est exempte de contradictions. Nous savons bien que oui, puisque la géométrie existe; et M. HILBERT avait d'abord répondu oui en construisant une géométrie. Mais, chose étrange, cette géométrie n'est pas tout à fait la nôtre, son espace n'est pas le nôtre, ou du moins ce n'en est qu'une partie. Dans l'espace de M. HILBERT il n'y a pas tous les points qui sont dans le nôtre, mais ceux seulement qu'on peut, en partant de deux points donnés, construire par le moyen de la règle et du compas. Dans cet espace, par exemple, il n'existerait pas, d'angle de 10° .

Dans sa seconde édition, M. HILBERT a voulu compléter sa liste de façon à retrouver notre géométrie et à n'en pas retrouver d'autre, c'est pour cela qu'il introduisit l'*Axiom der Vollständigkeit* qu'il énonce comme il suit:

Au système des points, droites et plans, il est impossible d'adjoindre un autre système d'objets tel que le système complet satisfasse à tous les autres axiomes.

Il est clair alors que cet espace dont je parlais, qui ne contient pas tous les points de notre espace, ne satisfait pas à ce nouvel axiome, car on peut lui adjoindre ceux des points de notre espace qu'il ne contenait pas, sans cesser de satisfaire à tous les axiomes.

Il y a donc une infinité de géométries qui satisfont à tous les axiomes, moins l'*Axiom der Vollständigkeit*, mais il n'y en a qu'une, la nôtre, qui satisfasse en outre à ce dernier axiome.

On doit se demander ensuite si les axiomes sont indépendants, c'est-à-dire si l'on peut sacrifier l'un des cinq groupes en conservant les quatre autres et obtenir néanmoins une géométrie cohérente. C'est ainsi qu'en supprimant le groupe IV (postulatum d'EUCLIDE) on obtient la géométrie non-euclidienne de BOLYAI.

Ou peut également supprimer le groupe III. M. HILBERT a réussi à conserver les groupes I, II, IV et V, ainsi que les deux sous-groupes des axiomes métriques des segments et des angles, tout en rejetant l'axiome métrique des triangles, c'est-à-dire la proposition III, 6.

La Géométrie non archimédienne. — Mais la conception la plus originale de M. HILBERT, c'est celle de la Géométrie non archimédienne, où tous les axiomes restent vrais, sauf celui d'ARCHIMÈDE. Pour cela il fallait d'abord construire un système de nombres non archimédiens, c'est-à-dire un système d'éléments entre lesquels on pût concevoir des relations d'égalité et d'inégalité, et auxquels on pût appliquer des opérations correspon-

dant à l'addition et à la multiplication arithmétiques, et cela de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Les règles arithmétiques de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité, etc. (*Arithmetische Axiome der Verknüpfung*)) subsistent sans changement.

2° Les règles du calcul et de la transformation des inégalités (*Arithmetische Axiome der Anordnung*) subsistent également.

3° L'axiome d'ARCHIMÈDE n'est pas vrai.

On peut arriver à ce résultat, en choisissant, pour éléments, des séries de la forme suivante :

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + A_2 t^{m-2} + \dots,$$

où m est un entier positif ou négatif et où les coefficients A sont réels, et en convenant d'appliquer à ces séries les règles ordinaires de l'addition et de la multiplication. Il faut ensuite définir les conditions d'inégalité de ces séries, de façon à ranger nos éléments dans un ordre déterminé. Nous y arriverons par la convention suivante : nous attribuerons à notre série le signe de A_0 et nous dirons qu'une série est plus petite qu'une autre quand, retranchée de celle-ci, elle donne une différence positive.

Il est clair qu'avec cette convention, les règles du calcul des inégalités subsistent ; mais l'axiome d'ARCHIMÈDE n'est plus vrai.

Nos nombres vulgaires rentrent comme cas particuliers parmi ces *nombres non archimédiens*. Les nouveaux nombres viennent s'intercaler pour ainsi dire dans la série de nos nombres vulgaires, de telle façon qu'il y ait, par exemple, une infinité de nombres nouveaux plus petits qu'un nombre vulgaire donné A et plus grands que tous les nombres vulgaires inférieurs à A .

Cela posé, imaginons un espace à trois dimensions où les coordonnées d'un point seraient mesurées, non pas par des nombres vulgaires, mais par des nombres non archimédiens, mais où les équations habituelles de la droite et du plan subsisteraient, de même que les expressions analytiques des angles et des longueurs. Il est clair que dans cet espace tous les axiomes resteraient vrais, sauf celui d'ARCHIMÈDE.

Sur une droite quelconque entre nos points vulgaires, viendraient s'intercaler des points nouveaux. Il y aura également sur cette droite une infinité de points nouveaux qui seront à droite de tous les points vulgaires. En résumé, notre espace vulgaire n'est qu'une partie de l'espace non-archimédien.

On voit quelle est la portée de cette invention et en quoi elle constitue dans la marche de nos idées un pas presque aussi hardi que celui que BOLYAI nous a fait faire ; la géométrie non-euclidienne respectait pour ainsi dire notre conception qualitative du continu géométrique tout en bouleversant nos idées sur la mesure de ce continu. La géométrie non-archimédienne détruit cette conception ; elle dissèque le continu pour y introduire des éléments nouveaux.

Dans cette conception si audacieuse, HILBERT avait eu un précurseur. Dans ses fondements de la géométrie, VERONESE avait eu une idée analogue. Le chapitre VI de

son *Introduction* est le développement d'une véritable arithmétique et d'une véritable géométrie non-archimédiennes, où les nombres transfinis de CANTOR jouent un rôle prépondérant. Toutefois par l'élégance et la simplicité de son exposition, par la profondeur de ses vues philosophiques, par le parti qu'il a tiré de l'idée fondamentale, HILBERT a bien fait sa chose de la nouvelle géométrie.

La Géométrie non arguésienne. — Le théorème fondamental de la Géométrie projective est le théorème de DESARGUES. Deux triangles sont dits *homologues*, lorsque les droites qui joignent chacun à chacun les sommets correspondants se coupent en un même point. DESARGUES a démontré que les points d'intersection des côtés correspondants de deux triangles homologues sont sur une même ligne droite; la réciproque est également vraie.

Le théorème de DESARGUES peut s'établir de deux manières:

- 1° En se servant des axiomes projectifs du plan et des axiomes métriques du plan.
- 2° En se servant des axiomes projectifs du plan et de ceux de l'espace.

Le théorème pourrait donc être découvert par un animal à deux dimensions, à qui une troisième dimension paraîtrait aussi inconcevable qu'à nous une quatrième, qui, par conséquent, ignorerait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui aurait vu se déplacer, dans le plan qu'il habite, des figures invariables analogues à nos corps solides, et qui, par conséquent, connaîtrait les axiomes métriques. Le théorème pourrait être découvert également par un animal à trois dimensions qui connaîtrait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui, n'ayant jamais vu se déplacer de corps solides, ignorerait les axiomes métriques.

Mais pourrait-on établir le théorème de DESARGUES sans se servir ni des axiomes projectifs de l'espace, ni des axiomes métriques, mais seulement des axiomes projectifs du plan? On pensait que non, mais on n'en était pas sûr. M. HILBERT a tranché la question en construisant une *géométrie non arguésienne*, qui est, bien entendu, une géométrie plane.

La Géométrie non pascalienne. — M. HILBERT ne s'arrête pas là, et il introduit encore une nouvelle conception. Pour bien la comprendre, il nous faut d'abord retourner un instant dans le domaine de l'Arithmétique. Nous avons vu plus haut s'élargir la notion de nombre, par l'introduction des *nombres non archimédiens*. Il nous faut une classification de ces nombres nouveaux, et pour l'obtenir nous allons classer d'abord les axiomes de l'Arithmétique en quatre groupes qui seront:

1° Les lois d'associativité et de commutativité de l'addition, la loi d'associativité de la multiplication, les deux lois de distributivité de la multiplication; ou en résumé toutes les règles de l'addition et de la multiplication, sauf la loi de commutativité de la multiplication.

2° Les axiomes de l'ordre, c'est-à-dire les règles du calcul des inégalités.

3° La loi de commutativité de la multiplication, d'après laquelle on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit.

4° L'axiome d'ARCHIMÈDE.

Les nombres qui admettront les deux premiers groupes seront dits *arguésiens*; ils pourront être *pascaliens* ou *non pascaliens* selon qu'ils satisferont ou ne satisferont pas à l'axiome du troisième groupe; ils seront *archimédiens* ou *non archimédiens*, suivant qu'ils satisferont ou non à l'axiome du quatrième groupe. Nous ne tarderons pas à voir la raison de ces dénominations.

Les nombres ordinaires sont à la fois arguésiens, pascaliens et archimédiens. On peut démontrer la loi de commutativité en partant des axiomes des deux premiers groupes et de l'axiome d'ARCHIMÈDE; il n'y a donc pas de nombres arguésiens, archimédiens et non pascaliens.

Il est aisé de former, en revanche, un système de nombres arguésiens, non pascaliens et non archimédiens. Les éléments de ce système seront des séries de la forme:

$$S = T_0 s^n + T_1 s^{n-1} + \dots,$$

où s est un symbole analogue à t , n un entier positif ou négatif, et $T_0, T_1, \dots$ des nombres du système T ; si donc on remplaçait les coefficients $T_0, T_1, \dots$ par les séries en t correspondantes, on aurait une série dépendant à la fois de t et de s . On additionnera les séries S d'après les règles ordinaires, et de même pour la multiplication de ces séries, on admettra les règles de distributivité et d'associativité, mais on admettra que la loi de commutativité n'est pas vraie et qu'au contraire $st = -ts$.

Il reste à *ranger* les séries dans un ordre déterminé pour satisfaire aux axiomes de l'ordre. Pour cela, on attribuera à la série S le signe du premier coefficient T_0 ; on dira qu'une série est plus petite qu'une autre quand, retranchée de celle-ci, elle donnera une différence positive. C'est donc toujours la même règle: t est regardé comme très grand par rapport à un nombre réel ordinaire quelconque, et s est regardé comme très grand par rapport à un nombre quelconque du système T .

La loi de commutativité n'étant pas vraie, ce sont bien des nombres non pascaliens.

Avant d'aller plus loin, je rappelle que HAMILTON a depuis longtemps introduit un système de nombres complexes où la multiplication n'est pas commutative; ce sont les *quaternions*, dont les Anglais font un si fréquent usage en Physique mathématique. Mais, pour les quaternions les axiomes de l'ordre ne sont pas vrais; ce qu'il y a donc d'original dans la conception de M. HILBERT, c'est que ses nouveaux nombres satisfont aux axiomes de l'ordre, sans satisfaire à la règle de commutativité.

Revenons à la Géométrie. Admettons les axiomes des trois premiers groupes, c'est-à-dire les axiomes projectifs du plan et de l'espace, les axiomes de l'ordre et le postulat d'EUCLIDE; le théorème de DESARGUES s'en déduira, puisqu'il est une conséquence des axiomes projectifs de l'espace.

Nous voulons constituer notre géométrie *sans nous servir des axiomes métriques*; le mot de *longueur* n'a donc encore pour nous aucun sens; nous n'avons pas le droit de nous servir du compas; en revanche, nous pouvons nous servir de la règle, puisque nous admettons que par deux points on peut faire passer une droite, en vertu de l'un des axiomes projectifs; nous savons également mener par un point une parallèle à une droite donnée, puisque nous admettons le postulatum d'EUCLIDE. Voyons ce que nous pouvons faire avec ces ressources.

Nous pouvons définir l'homothétie de deux figures; et par elle les proportions. Nous pouvons aussi définir l'égalité dans une certaine mesure.

Les deux côtés opposés d'un parallélogramme seront égaux *par définition*; nous savons ainsi reconnaître si deux segments sont égaux entre eux, *pourvu qu'ils soient parallèles*.

Grâce à ces conventions, nous sommes maintenant en mesure de comparer les longueurs de deux segments, mais *pourvu que ces segments soient parallèles*. La comparaison de deux longueurs dont la direction est différente n'a aucun sens, et il faudrait pour ainsi dire une unité de longueur différente pour chaque direction. Inutile d'ajouter que le mot *angle* n'a aucun sens.

Les longueurs seront ainsi exprimées par des nombres; mais ce ne seront pas forcément des nombres ordinaires. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que, si le théorème de DESARGUES est vrai comme nous l'admettons, ces nombres appartiendront à un *système arguésien*. Inversement, étant donné un système quelconque S de nombres arguésiens, on peut construire une géométrie telle que les longueurs des segments d'une droite soient justement exprimées par ces nombres.

L'équation du plan sera une équation linéaire comme dans la géométrie analytique ordinaire: mais, comme dans le système S la multiplication ne sera pas commutative, en général, il importe de faire une distinction et de dire que dans chacun des termes de cette équation linéaire, ce sera la coordonnée qui jouera le rôle de multiplicande et le coefficient constant qui jouera le rôle de multiplicateur.

Ainsi, à chaque système de nombres arguésiens, correspondra une géométrie nouvelle satisfaisant aux axiomes projectifs, à ceux de l'ordre, au théorème de DESARGUES et au postulat d'EUCLIDE. Quelle est maintenant la signification géométrique de l'axiome arithmétique du troisième groupe, c'est-à-dire de la règle de commutativité de la multiplication? *La traduction géométrique de cette règle, c'est le théorème de PASCAL*; je veux parler du théorème sur l'hexagone inscrit dans une conique, en supposant que cette conique se réduit à deux droites.

Ainsi le théorème de PASCAL sera vrai ou faux, selon que le système S sera pascalien ou non pascalien; et, comme il y a des systèmes non pascaliens, *il y aura également des géométries non pascaliennes*.

Le théorème de PASCAL peut se démontrer en partant des axiomes métriques; il sera donc vrai, si l'on admet que les figures peuvent se transformer non seulement par homothétie et translation, comme nous venons de le faire, mais encore par rotation.

Le théorème de PASCAL peut également se déduire de l'axiome d'ARCHIMÈDE, puisque nous venons de voir que tout système de nombres arguésiens et archimédiens est en même temps pascalien; *toute géométrie non pascalienne est donc en même temps non archimédienne*.

Le Streckenübertrager. — Citons encore une autre conception de HILBERT. Il étudie les constructions que l'on pourrait faire, non pas à l'aide de la règle et du compas, mais par le moyen de la règle et d'un instrument particulier, qu'il appelle *Streckenübertrager*,

et qui permettrait de porter sur une droite un segment égal à un autre segment pris sur une autre droite. Le *Streckenübertrager* n'est pas l'équivalent du compas; ce dernier instrument permettrait de construire l'intersection de deux cercles, ou d'un cercle et d'une droite quelconque; le *Streckenübertrager* nous donnerait seulement l'intersection d'un cercle et d'une droite *passant par le centre de ce cercle*. M. HILBERT cherche donc quelles sont les constructions qui seront possibles avec ces deux instruments, et il arrive à une conclusion bien remarquable.

Les constructions qui peuvent se faire par la règle et le compas, peuvent se faire également par la règle et le *Streckenübertrager*, si ces constructions sont telles que le résultat en soit toujours réel. Il est clair, en effet, que cette condition est nécessaire, car un cercle est toujours coupé en deux points réels par une droite menée par son centre. Mais il était difficile de prévoir que cette condition serait également suffisante.

Mais ce n'est pas tout; dans toutes ces constructions, comme l'a remarqué le premier M. KÜRSCHAK, il serait possible de remplacer le *Streckenübertrager* par l'*Eichmass*, instrument qui permet de porter sur une droite quelconque à partir d'un point quelconque, non plus une longueur quelconque, mais une longueur égale à l'unité.

Une question analogue est traitée dans un autre article de M. HILBERT: *Über die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkigen Dreieck*.

Dans la géométrie plane ordinaire, le plan est symétrique, ce qui se traduit par l'égalité des angles à la base du triangle isocèle.

On doit faire figurer cette *symétrie du plan* dans la liste des axiomes métriques. Dans toutes les géométries, plus ou moins étranges, dont nous avons parlé jusqu'ici, dans celles du moins où l'on admet les axiomes métriques, dans la géométrie métrique non archimédienne, dans les géométries nouvelles de M. DEHN, dans celles qui ont fait l'objet du mémoire *Über eine neue Begründung*, etc., cette symétrie du plan est toujours supposée. Est-elle une conséquence des autres axiomes métriques? Oui, comme le montre M. HILBERT, si l'on admet l'axiome d'ARCHIMÈDE. Non, dans le cas contraire. Il y a des géométries non archimédiennes où tous les axiomes métriques sont vrais, à l'exception de celui de la symétrie du plan.

Dans cette géométrie, il n'est pas vrai que les angles à la base d'un triangle isocèle soient égaux: il n'est pas vrai que dans un triangle un côté soit plus petit que la somme des deux autres; le théorème de PYTHAGORE sur le carré de l'hypoténuse n'est pas vrai. C'est pour cette raison, que cette géométrie s'appelle *non-pythagoricienne*.

J'arrive à un important mémoire de M. HILBERT, qui est intitulé *Grundlagen der Geometrie*, qui porte par conséquent le même titre que sa *Festschrift*, mais où il se place cependant à un point de vue tout différent. Dans sa *Festschrift*, en effet, comme on l'a vu par l'Analyse qui précède, les rapports de la notion d'espace et de la notion du groupe, tels qu'ils résultent des travaux de LIE, sont laissés de côté ou relégués au second plan. Les propriétés générales des groupes n'apparaissent pas dans la liste des axiomes fondamentaux. Il n'en est pas de même dans le mémoire dont nous allons parler.

Par rapport aux idées de LIE, le progrès réalisé est considérable. LIE supposait que ses groupes étaient définis par des équations analytiques. Les hypothèses de M. HILBERT sont beaucoup plus générales. Sans doute cela n'est pas encore entièrement satisfaisant, puisque si la *forme* du groupe est supposée quelconque, sa *matière* c'est-à-dire le plan qui subit les transformations, reste assujéti à être une *Zahlenmannigfaltigkeit* au sens de LIE. Ce n'est pas moins un pas en avant, et d'ailleurs M. HILBERT analyse mieux qu'on ne l'avait fait avant lui l'idée de *Zahlenmannigfaltigkeit* et donne des aperçus qui pourront devenir le germe d'une théorie axiomatique de l'Analysis situs.

Il est impossible de n'être pas frappé du contraste entre le point de vue où se place ici M. HILBERT et celui qu'il avait adopté dans sa *Festschrift*. Dans cette *Festschrift* les axiomes de continuité occupaient le dernier rang et la grande affaire était de savoir ce que devenait la géométrie quand on les mettait de côté. Ici au contraire, c'est la continuité qui est le point de départ, et M. HILBERT s'est surtout préoccupé de voir ce qu'on tire de la continuité seule, jointe à la notion du groupe.

Il nous reste à parler d'un mémoire intitulé : *Flächen von konstanter Krümmung*. On sait que BELTRAMI a montré qu'il y a dans l'espace ordinaire des surfaces qui sont l'image du plan non-euclidien, ce sont les surfaces à courbure constante négative; on sait quelle impulsion cette découverte a donnée à la géométrie non-euclidienne. Mais est-il possible de représenter le plan non-euclidien tout entier sur une surface de BELTRAMI sans point singulier? M. HILBERT démontre que non.

En ce qui concerne les surfaces à courbure constante positives auxquelles se rapporte la géométrie de RIEMANN, M. HILBERT démontre que, à part la sphère, il n'y a pas d'autre surface fermée de cette sorte.

Équations intégrales.

Dans ces dernières années, M. HILBERT s'est surtout occupé de perfectionner la théorie des équations intégrales. On sait que les fondements de cette théorie ont été jetés il y a quelques années par M. FREDHOLM; depuis, la fécondité de sa méthode et la facilité avec laquelle elle s'applique à tous les problèmes de la Physique mathématique se sont affirmées chaque jour avec plus d'éclat. C'est là certainement une des découvertes les plus remarquables qui aient été faites en mathématiques et, à elle seule, elle mériterait les plus hautes récompenses; si aujourd'hui cependant ce n'est pas au premier inventeur, mais à l'auteur de perfectionnements importants que nous avons décidé de décerner le prix BOLYAI, c'est que nous avons dû prendre en considération, non-seulement les travaux de M. HILBERT sur les équations intégrales, mais l'ensemble de son œuvre qui intéresse les branches les plus diverses de la Science mathématique et dont les autres parties de ce rapport permettent d'apprécier l'intérêt. Mais nous ne pouvions aborder ce sujet sans rendre hommage au service immense que M. FREDHOLM a rendu à la Science.

La théorie de M. FREDHOLM est une généralisation des propriétés élémentaires des

équations linéaires et des déterminants. Cette généralisation pouvait être poursuivie de deux façons différentes; soit en envisageant une infinité *discrète* de variables liées par une infinité d'équations linéaires, ce qui conduit aux déterminants d'ordre infini; soit en considérant une fonction inconnue $\varphi(x)$ (c'est-à-dire en dernière analyse une infinité *continue* d'inconnues) et cherchant à la déterminer à l'aide d'équations où cette fonction figure dans des intégrales sous le signe $\int$. C'est cette seconde voie où s'est engagé M. FREDHOLM.

Soit $K(x, y)$ une fonction qu'on appelle le *noyau*; l'intégrale

$$\psi(x) = \int K(x, y)\varphi(y)dy,$$

prise entre des limites fixes, peut être regardée comme une transformée de $\varphi(x)$ par une sorte de transformation linéaire et être représentée par $S\varphi(x)$.

Les équations intégrales peuvent alors se mettre sous la forme:

$$(1) \quad a\varphi(x) + \lambda S\varphi(x) = f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction donnée; l'équation est dite de la première sorte si le coefficient a est nul, et de la seconde sorte si ce coefficient est égal à 1.

La relation (1) doit être satisfaite pour toutes les valeurs de y comprises dans le champ d'intégration; elle équivaut donc à une infinité *continue* d'équations linéaires.

FREDHOLM a traité le cas des équations de la seconde sorte; la solution peut se mettre alors sous la forme du quotient de deux expressions analogues aux déterminants et qui sont des fonctions entières de λ . Pour certaines valeurs de λ , le dénominateur s'annule. On peut alors trouver des fonctions $\varphi(x)$ (appelées *fonctions propres*) qui satisfont à l'équation (1) quand on y remplace $f(x)$ par 0.

Le résultat suppose que le noyau $K(x, y)$ est limité; s'il n'en était pas ainsi on serait amené à envisager les noyaux *réitérés*; si on répète n fois la substitution linéaire S , on obtient une substitution de même forme avec un noyau différent $K_n(x, y)$; il suffit qu'un de ces noyaux réitérés K_n soit limité, pour que la méthode reste applicable moyennant un artifice très simple. Or cela arrive dans un grand nombre de cas, comme l'a montré FREDHOLM. La généralisation pour le cas où la fonction inconnue dépend de plusieurs variables et pour celui où il y a plusieurs fonctions inconnues se fait sans difficulté.

FREDHOLM a appliqué ensuite sa méthode à la résolution du problème de DIRICHLET et à celle d'un problème d'élasticité, montrant ainsi par quelle voie on peut aborder toutes les questions de Physique mathématique.

Telle est la part du premier inventeur; quelle est maintenant celle de HILBERT? Considérons d'abord un nombre fini d'équations linéaires; si le déterminant de ces équations est symétrique, leurs premiers membres peuvent être regardés comme les dérivées d'une forme quadratique, et il en résulte pour les équations de cette forme une série de propriétés bien dignes d'intérêt et bien connues des géomètres. Le cas correspondant pour les équations intégrales est celui où le noyau est symétrique, c'est-à-dire où:

$$K(x, y) = K(y, x).$$

C'est celui auquel s'attache M. HILBERT. Les propriétés des formes quadratiques d'un nombre fini de variables peuvent être généralisées de façon à s'appliquer aux équations intégrales de cette forme symétrique. La généralisation se fait par un simple passage à la limite; mais ce passage présentait des difficultés dont M. HILBERT s'est tiré par une méthode dont on doit admirer la simplicité, la sûreté et la généralité. Les développements auxquels on parvient sont *uniformément* convergents; mais cette uniformité se présente sous une forme nouvelle qui mérite d'attirer l'attention. Dans les développements figure une fonction arbitraire $u(x)$ (ou plusieurs) et le reste de la série, quand on y a pris n termes, est inférieur à une limite qui ne dépend que de n et ne dépend pas de la fonction arbitraire, pourvu que cette fonction soit assujettie à l'inégalité

$$\int u^2(x) dx < 1,$$

l'intégrale étant prise entre des limites convenables. C'est là une considération entièrement nouvelle utilisable dans des problèmes bien différents.

HILBERT retrouve ainsi quelques-uns des théorèmes de FREDHOLM par une voie nouvelle; mais j'insisterai surtout sur les résultats les plus originaux.

Tout d'abord le dénominateur des expressions de FREDHOLM est une fonction de λ qui n'admet que des zéros réels et c'est là une généralisation du théorème élémentaire relatif à « l'équation en S ». Vient ensuite une formule où figurent sous le signe $\int$ deux fonctions arbitraires $x(s)$ et $y(s)$ et que l'on doit considérer comme la généralisation des formules élémentaires qui permettent la décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés.

Mais j'ai hâte d'arriver à la question du développement d'une fonction arbitraire procédant suivant les fonctions propres. Ce développement, analogue à la série de FOURIER, ou à tant d'autres séries qui jouent un rôle capital en Physique mathématique est-il possible dans le cas général? La condition suffisante pour qu'une fonction soit susceptible d'un tel développement, c'est qu'on puisse la mettre sous la forme $Sg(x)$, $g(x)$ étant continue. C'est là la forme définitive du résultat, tel que HILBERT l'énonce dans sa 5^e communication. Dans la 1^{ère} il avait dû lui imposer certaines restrictions; nous devons ici citer le nom de M. SCHMIDT qui dans l'intervalle avait fait paraître un travail qui a aidé M. HILBERT à s'affranchir de ces restrictions. La seule condition imposée à notre fonction est de pouvoir se mettre sous la forme $Sg(x)$, et au premier abord elle paraît assez complexe, mais dans un grand nombre de cas, par exemple si le noyau est une fonction de GREEN, elle exige seulement que la fonction possède un certain nombre de dérivées.

M. HILBERT fut conduit ensuite à développer ses vues de la manière suivante: il considère cette fois une forme quadratique à un nombre infini de variables et il en étudie les transformations orthogonales; c'est comme s'il voulait étudier les diverses formes de l'équation d'une surface du second degré dans l'espace à un nombre infini de dimensions lorsqu'on la rapporte à divers systèmes d'axes rectangulaires. Il forme, à cet

effet, ce qu'il appelle la forme résolvante de la forme donnée. Soit $K(x)$ la forme donnée, $K(\lambda, x, y)$ la forme résolvante cherchée; elle sera définie par l'identité:

$$K(\lambda, x, y) - \frac{1}{2} \lambda \sum_r \frac{dK(x)}{dx_r} \frac{dK(\lambda, x, y)}{dx_r} = \sum x_r y_r.$$

Lorsque la forme $K(x)$ ne dépend que d'un nombre fini de variables, la forme résolvante se présente comme le quotient de deux déterminants qui sont des polynômes entiers en λ . L'auteur applique à ce quotient les procédés de passage à la limite qui lui sont familiers; la limite du quotient existe même quand celles du numérateur et du dénominateur n'existent pas.

Dans le cas d'un nombre fini de variables, $K(\lambda, x, y)$ est une fonction rationnelle de λ et cette fonction rationnelle peut-être décomposée en fractions simples. Qu'advient-il de cette décomposition quand le nombre des variables devient infini? Les pôles de la fonction rationnelle en λ , peuvent dans ce cas tendre vers certains points limites en nombre infini, mais discrets. L'ensemble de ces points constitue ce que l'auteur appelle le *spectre discontinu* de sa forme. Ils peuvent aussi admettre comme points limites tous les points d'un ou de plusieurs segments de l'axe réel. L'ensemble de ces segments constitue le *spectre continu* de la forme.

Les fractions simples correspondant au spectre discontinu formeront par leur ensemble une série convergente; celles qui correspondent au spectre continu se changeront à la limite en une intégrale de la forme:

$$\int \frac{\sigma d\mu}{\lambda - \mu},$$

où l'on fait varier la variable d'intégration μ tout le long des segments du spectre continu, et où σ est une fonction convenable de μ . La fonction rationnelle $K(\lambda, x, y)$ n'a donc pas alors pour limite une fonction méromorphe, mais une fonction uniforme avec des coupures. La décomposition en éléments simples ainsi transformée reste valable. Si la forme donnée est *limitée*, c'est-à-dire si elle ne peut dépasser une certaine valeur quand la somme des carrés des variables est inférieure à 1, on peut déduire de là une manière de simplifier cette forme par une transformation orthogonale, analogue à la simplification qu'éprouve l'équation d'un ellipsoïde quand on rapporte cette surface à ses axes.

Parmi les formes quadratiques nous distinguerons celles qui sont *proprement continues* (*vollstetig*) c'est-à-dire celles dont l'accroissement tend vers zéro, quand les accroissements des variables tendent simultanément vers zéro d'une manière quelconque. Une pareille forme ne possède pas de spectre continu et il en résulte des simplifications considérables dans les formules.

D'autres théorèmes sur les systèmes de formes quadratiques simultanés, sur les formes bilinéaires, sur la forme de HERMITE s'étendent également au cas d'un nombre infini de variables.

Il y avait dans cette théorie le germe d'une extension de la méthode de FREDHOLM à des noyaux auxquels l'analyse du géomètre suédois n'était pas applicable, et des élèves

de HILBERT devaient mettre ce fait en évidence. Quoi qu'il en soit, M. HILBERT s'occupa d'abord d'étendre sa façon d'envisager les équations intégrales aux cas où le noyau est dissymétrique. A cet effet, il introduit un système quelconque de fonctions orthogonales, suivant lesquelles il est possible de développer une fonction arbitraire par des formules analogues à celle de FOURIER. Au lieu d'une fonction inconnue, il prend comme inconnues les coefficients du développement de cette fonction; une équation intégrale peut ainsi être remplacée par un système d'une infinité *discrète* d'équations linéaires entre une infinité *discrète* de variables. La théorie des équations intégrales se trouve ainsi rattachée d'une part aux idées de M. von KOCH sur les déterminants infinis, et d'autre part aux recherches de M. HILBERT que nous venons d'analyser et où le rôle essentiel est joué par des fonctions dépendant d'une infinité discrète de variables.

A chaque noyau correspondra ainsi une forme bilinéaire dépendant d'une infinité de variables. Si le noyau est symétrique, cette forme bilinéaire est symétrique et peut-être regardée comme dérivant d'une forme quadratique. Si le noyau satisfait aux conditions énoncées par FREDHOLM, on voit que cette forme quadratique est proprement continue et par conséquent ne possède pas de spectre continu. C'est là une manière de retrouver les résultats de FREDHOLM et, si indirecte qu'elle soit, elle ouvre des vues entièrement neuves sur les raisons profondes de ces résultats et par là sur la possibilité de nouvelles généralisations.

Les équations intégrales se prêtent à la résolution de certaines équations différentielles dont les intégrales sont assujetties à certaines conditions aux limites et c'est là un problème fort important pour la Physique mathématique. FREDHOLM l'avait résolu dans quelques cas particuliers et M. PICARD avait généralisé ses méthodes. M. HILBERT devait faire de la question une étude systématique. Considérons une équation différentielle :

$$\Delta u = f,$$

où u est une fonction inconnue d'une ou plusieurs variables, f une fonction connue et Δ une expression différentielle linéaire quelconque. Cette équation peut être considérée au même titre qu'une équation intégrale comme un système infini d'équations linéaires liant une infinité continue de variables, comme une sorte de transformation linéaire d'ordre infini permettant de passer de f à u . Si on résout cette équation, on trouve :

$$u = S(f),$$

$S(f)$ se présentant cette fois sous la forme d'une expression intégrale. Alors Δ et S sont les symboles de deux transformations linéaires d'ordre infini inverses l'une de l'autre. Le noyau de cette expression intégrale $S(f)$ est ce qu'on appelle une *fonction de GREEN*. Cette fonction avait été rencontrée pour la première fois dans le problème de DIRICHLET, c'était alors la fonction de GREEN proprement dite, trop connue pour que j'insiste; on en avait déjà obtenu des généralisations diverses. Il appartenait à HILBERT de donner une théorie complète. A chaque expression différentielle Δ , supposée du 2^d ordre et de type elliptique, à chaque système de conditions aux limites, correspond une fonction de GREEN. Citons la formation des fonctions de GREEN dans le cas où

l'on n'a qu'une variable indépendante et où elles se présentent sous une forme particulièrement simple, et la discussion des diverses formes que peuvent affecter les conditions aux limites. Cela posé, imaginons que l'on ait résolu le problème dans le cas d'une équation différentielle auxiliaire peu différente de celle qui est proposée, n'en différant pas en tout cas par les termes du 2^d ordre; on pourra alors par une transformation simple ramener le problème à la résolution d'une équation de FREDHOLM, où le rôle du noyau est joué par la fonction de GREEN relative à l'équation différentielle auxiliaire.

Toutefois, la considération de cette équation auxiliaire, la nécessité de la choisir et de la résoudre pouvait encore constituer un embarras: M. HILBERT s'en est affranchi dans sa 6^e communication. L'équation différentielle est encore transformée en une équation de FREDHOLM, où le rôle du noyau est joué par une fonction que l'auteur appelle *Paramétrix*. Elle est assujettie à toutes les conditions qui définissent la fonction de GREEN, une seule exceptée, la plus gênante il est vrai; elle n'est pas astreinte à satisfaire à une équation différentielle; elle reste donc arbitraire dans une très large mesure. La transformation subie par l'équation différentielle est comparable à celle qu'éprouverait un système d'équations linéaires si l'on remplaçait les variables primitives par des combinaisons linéaires convenablement choisies de ces variables. La méthode n'est nullement restreinte au cas où l'équation différentielle envisagée est adjointe à elle-même.

M. HILBERT a examiné en passant une foule de questions relatives aux équations intégrales et montré la possibilité de leur application dans les domaines les plus variés. Il a par exemple étendu la méthode au cas d'un système de deux équations aux dérivées partielles de 1^{er} ordre du type elliptique, aux équations intégrales *polaires*, c'est-à-dire où le coefficient a dans l'équation intégrale (1) au lieu d'être constamment égal à 1 est une fonction de x et en particulier est égal tantôt à $+1$, tantôt à -1 .

Il l'a appliquée au problème de RIEMANN pour la formation des fonctions d'une variable complexe assujetties à certaines conditions aux limites, au théorème des oscillations de KLEIN, à la formation des fonctions fuchsienues, et en particulier au problème suivant: déterminer λ de façon que l'équation

$$\frac{d}{dx} \left[(x-a)(x-b)(x-c) \frac{dy}{dx} \right] + (x+\lambda)y = 0$$

soit une équation fuchsienne.

Une des applications les plus inattendues est celle que fait M. HILBERT à la théorie des volumes et des surfaces de MINKOWSKI, et par laquelle il rattache à la méthode de FREDHOLM une question importante pour ceux qui s'intéressent à l'analyse philosophique des notions fondamentales de la géométrie.

Principe de Dirichlet.

On sait que RIEMANN avait démontré d'un trait de plume les théorèmes fondamentaux sur le problème de DIRICHLET et la représentation conforme, en s'appuyant

sur ce qu'il appelait le principe de DIRICHLET; envisageant une certaine intégrale dépendant d'une fonction arbitraire U , et que nous appellerons l'intégrale de DIRICHLET, il montrait que cette intégrale ne peut s'annuler, et il en concluait qu'elle devait avoir un minimum, et que ce minimum ne pouvait être atteint que quand la fonction U était harmonique. Ce raisonnement était fautif, comme on l'a montré depuis, car il n'est pas certain que le minimum puisse être effectivement atteint, et, s'il l'est, qu'il puisse l'être pour une fonction continue.

Les résultats étaient exacts cependant; on a beaucoup travaillé sur cette question, on a montré que le problème de DIRICHLET peut toujours être résolu, et on l'a même effectivement résolu; il en est de même pour un grand nombre d'autres problèmes de physique mathématique qui auraient pu autrefois paraître abordables par la méthode de RIEMANN. Ce n'est pas ici le lieu de faire le long historique de ces travaux; je me bornerai à mentionner le point final d'aboutissement qui est la méthode de FREDHOLM.

Il semblait que ce succès eût rejeté pour jamais dans l'oubli l'aperçu de RIEMANN et le principe de DIRICHLET lui-même. Beaucoup le regrettaient cependant; ils sentaient qu'on était privé ainsi d'un instrument puissant et ils ne pouvaient croire que la force de persuasion que conservait malgré tout l'argument de RIEMANN, et qui semblait reposer sur je ne sais pas quelle adaptation de la pensée mathématique à la réalité physique, ne fût en réalité qu'une pure illusion due à de mauvaises habitudes d'esprit. M. HILBERT voulut rechercher s'il ne serait pas possible, avec les nouvelles ressources de l'analyse mathématique, de transformer l'aperçu de RIEMANN en une démonstration rigoureuse.

Voici comment il y est parvenu; considérons l'ensemble des fonctions U satisfaisant aux conditions proposées; choisissons dans cet ensemble une suite indéfinie S de fonctions telles que les intégrales de DIRICHLET correspondantes tendent en décroissant vers leur limite inférieure. Il n'est pas certain qu'en chaque point du domaine envisagé cette suite S converge; elle pourrait osciller entre certaines limites. Mais on peut détacher dans S une suite partielle S_1 qui converge en un point M_1 du domaine; dans S_1 , détachons une autre suite partielle S_2 qui convergera toujours en M_1 , mais qui de plus convergera encore en M_2 . En continuant de la sorte nous obtiendrons une suite qui convergera en autant de points que nous voudrons; et par un artifice simple, nous en déduirons une autre suite qui convergera en tous les points d'un ensemble dénombrable, par exemple en tous les points dont les coordonnées sont rationnelles. Si l'on pouvait alors démontrer que les dérivées de toutes les fonctions de la suite sont inférieures en valeur absolue à une limite donnée, on pourrait conclure immédiatement que la suite converge uniformément dans tout le domaine, et l'application des règles du calcul des variations ne présenterait plus de difficulté spéciale.

Pour établir le point qui reste à démontrer, M. HILBERT a employé deux artifices différents, il n'a pas développé le premier autant qu'il serait désirable, et il s'est surtout attaché au second. Celui-ci consiste à remplacer la fonction u proposée par la fonction v qui s'en déduit par une double quadrature et dont elle est la dérivée seconde par

rapport aux deux variables indépendantes. Les dérivées de v étant les intégrales premières de u , on peut leur assigner une limite supérieure, à l'aide de quelques inégalités faciles à démontrer. Seulement il faut se résigner à un détour nouveau et à un artifice d'ailleurs simple pour appliquer à cette nouvelle fonction inconnue v les règles du calcul des variations qui s'appliquaient tout naturellement à la fonction u .

Il est inutile d'insister sur la portée de ces découvertes qui dépasse de beaucoup le problème spécial de DIRICHLET. Nous ne devons pas nous étonner que de nombreux chercheurs se soient engagés sur la voie ouverte par M. HILBERT. Nous devons citer MM. LEVI, ZAREMBA et FUBINI; mais je crois avant tout devoir signaler M. RITZ qui, s'écartant un peu de la route commune, a imaginé une méthode de calcul numérique applicable à tous les problèmes de physique mathématique, mais qui y a utilisé plusieurs des procédés ingénieux créés par son maître M. HILBERT.

M. HILBERT a récemment appliqué sa méthode à la question de la représentation conforme. Je n'analyserai pas ce mémoire dans le détail. Je me bornerai à dire qu'il fournit le moyen de faire cette représentation pour un domaine limité par un nombre infini de courbes ou pour une surface de RIEMANN simplement connexe d'une infinité de feuillets. C'est donc une solution nouvelle du problème de l'uniformisation des fonctions analytiques.

Divers.

Nous avons passé en revue les principaux sujets d'études où M. HILBERT a marqué sa trace, ceux pour lesquels il montrait une sorte de prédilection et où il est revenu à diverses reprises; nous devons signaler encore d'autres problèmes dont il s'est occupé occasionnellement et sans y insister. Je crois devoir me borner à énoncer dans un ordre chronologique les résultats les plus saillants qu'il a obtenus de la sorte.

Si l'on excepte les formes binaires, les formes quadratiques et les formes ternaires biquadratiques, la forme définie la plus générale de son degré n'est pas décomposable en une somme de carrés d'autres formes en nombre fini.

On peut trouver par des procédés élémentaires les solutions en nombres entiers d'une équation diophantine de genre nul.

Si un polynôme entier dépendant de plusieurs variables et de plusieurs paramètres est irréductible quand ces paramètres restent arbitraires, on peut toujours attribuer à ces paramètres des valeurs entières telles que le polynôme reste irréductible.

Par conséquent il existe toujours des équations d'ordre n à coefficients entiers et admettant un groupe donné.

Le théorème fondamental de DEDEKIND sur les nombres complexes à multiplication commutative peut s'établir aisément en s'appuyant sur l'un des lemmes fondamentaux de la théorie des invariants de M. HILBERT.

L'équation diophantine obtenue en égalant à ± 1 le discriminant d'une équation algébrique de degré n , possède toujours des solutions rationnelles, mais, sauf pour le 2^d et le 3^e degré, ne possède pas de solutions entières.

Parmi les surfaces réelles du 4^e ordre, certaines formes, logiquement concevables, ne sont pas possibles; par exemple, il ne peut pas y en avoir qui soient composées de 12 surfaces fermées simplement connexes ou d'une surface unique avec onze trous.

Conclusions.

Après cet exposé, un long commentaire serait inutile. On voit quelle a été la variété des recherches de M. HILBERT, l'importance des problèmes auxquelles il s'est attaqué. Nous signalerons l'élégance et la simplicité des méthodes, la clarté de l'exposition, le souci de l'absolue rigueur. En cherchant à être parfaitement rigoureux, on risque parfois d'être long, et ce n'est pas là acheter trop cher une correction sans laquelle les mathématiques ne seraient rien. Mais M. HILBERT a su éviter ce que ces longueurs auraient pu avoir d'un peu pénible pour ses lecteurs, en ne leur laissant jamais perdre de vue le fil conducteur qui lui a servi à s'orienter. On voit toujours aisément par quel enchaînement d'idées il a été amené à se poser un problème et à en trouver la solution. On sent que, plus analyste que géomètre au sens ordinaire du mot, il a néanmoins aperçu l'ensemble de son travail d'un coup d'œil, avant d'en distinguer les détails, et il sait faire profiter le lecteur de cette vue d'ensemble.

M. HILBERT a exercé une influence considérable sur les progrès récents des sciences mathématiques, non seulement par ses travaux personnels, mais par son enseignement, par les conseils qu'il donnait à ses élèves et qui leur permettaient de contribuer à leur tour à ce développement de nos connaissances en se servant des méthodes créées par leur Maître.

Il n'est pas besoin, ce semble, d'en dire davantage pour justifier le choix de la Commission qui a été unanime à attribuer à M. HILBERT le prix BOLYAI pour la période 1905-1909.

Paris, novembre 1910.

H. POINCARÉ.
