

Sur les courbes tracées sur une surface algébrique.

Par M. H. Poincaré à Paris.

J'ai publié dans les Annales de l'École Normale Supérieure, un mémoire portant le même titre; je voudrais revenir ici sur quelques points qui dans ce mémoire n'ont pu être traités avec assez de détails.

1. Valeurs critiques. Soit $F(x, y, z, t) = 0$ une surface algébrique d'ordre n dont l'équation est exprimée en coordonnées homogènes; c'est la surface S ; nous couperons par le plan variable $\frac{y}{t} = \text{const}$, qui la coupera suivant la courbe K_y . La droite $y = t = 0$ coupera la surface S en n points $A_1, A_2, \dots, A_n$, qui appartiendront à toutes les courbes K_y . Soit p le genre de la courbe K_y ; nous pourrons former p intégrales abéliennes de première espèce relatives à cette courbe:

$$(1) \quad u_i = \int \frac{P_i dx}{Q F'_z} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

où F'_z est la dérivée partielle de F par rapport à z , où Q est un polynôme homogène de degré ν en y et t (le même pour toutes les intégrales u_i) et enfin où les P_i sont des polynômes entiers, homogènes de degré $n + \nu - 2$ en x, y, z, t , non homogènes et de degré $n - 3$ en x et z . Le polynôme P_i doit s'annuler en tous les points doubles de la courbe K_y , sauf aux points doubles supplémentaires que cette courbe pourrait acquérir pour certaines valeurs de y pour lesquelles son genre s'abaisserait. En d'autres termes la surface $P_i = 0$ doit passer par la courbe double de la surface S .

L'intégrale doit être prise en faisant varier x et z de telle façon que $F = 0$ et que y et t soient des constantes; la limite inférieure est le point A_1 , la limite supérieure est un point variable M de la courbe K_y . L'intégrale u_i est alors une fonction des coordonnées x, y, z, t d'un point variable M de la surface S et cette fonction est déterminée à une période près. Nous nous réserverons quand cela pourra se faire sans inconvénient de renoncer aux coordonnées homogènes en faisant $t = 1$.

Nous appellerons valeurs critiques de la 2^{de} sorte les valeurs de y (ou de $\frac{y}{t}$) qui annulent le dénominateur Q . Les valeurs critiques de la 1^{re} sorte sont celles pour lesquelles on peut trouver p coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ tels que

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_p P_p$$

s'annule identiquement quels que soient x et z .

J'appellerai *valeurs singulières* de y , celles pour lesquelles le genre de la courbe K_y s'abaisse; elles correspondent aux plans $\frac{y}{t} = \text{const}$ qui sont tangents à S ou qui vont passer par un point conique de cette surface.

Pour une valeur de y (ou de $\frac{y}{t}$) qui n'est singulière, ni critique de la 2^{de} sorte, la fonction u_i (de même que les périodes de l'intégrale u_i) est tou-

jours finie. Si la valeur est singulière mais non critique, l'intégrale u_i ne deviendra infinie que si le chemin d'intégration va passer par le nouveau point double. Si la valeur est critique de la 2^{de} sorte, elle est infinie en général pour tous les points M de la courbe K_y .

Supposons qu'une valeur de y soit critique de la 1^{ère} sorte, sans être singulière ni critique de la 2^{de} sorte, la combinaison

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p$$

s'annulera alors pour cette valeur de y , et cela pour tous les points M de la courbe K_y .

Il est aisé de voir ce qui se passe si une valeur est à la fois critique de la 1^{ère} et de la 2^{de} sorte. Soit y_0 une pareille valeur; alors pour $y = y_0$ le dénominateur Q de même que $\Sigma \alpha_i P_i$ s'annule identiquement; il en résulte évidemment que les intégrales u_i deviennent en général infinies, mais que la combinaison $\Sigma \alpha_i u_i$ reste finie.

Examinons maintenant le cas d'une valeur singulière qui n'est pas critique. Il se subdivise; nous ne parlerons que des cas particuliers suivants:

1^o Le plan $\frac{y}{t} = \text{const}$ qui correspond à la valeur singulière est un plan tangent ordinaire. Soient alors: $\omega_{1i}, \omega_{2i}, \omega_{3i}, \dots$ les périodes de l'intégrale u_i ; on pourra supposer que ces périodes ont été choisies de telle sorte que toutes à l'exception de ω_{1i} soient des fonctions holomorphes de y dans le voisinage de la valeur singulière y_0 envisagée, ne s'annulant pas d'ailleurs pour $y = y_0$ (je fais $t = 1$ pour abréger l'écriture). Quant à ω_{1i} , il peut se mettre sous la forme:

$$\omega_{1i} = \varphi(y) + \frac{\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

$\varphi(y)$ étant holomorphe pour $y = y_0$. Une des déterminations de u_i que j'appellerai u_i^* reste holomorphe pour $y = y_0$, et la détermination la plus générale s'écrit

$$u_i = u_i^* + \Sigma m_k \omega_{ki} = \psi(y) + \frac{m_1 \omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0),$$

les m sont des entiers, $\psi(y)$ est holomorphe pour $y = y_0$. Ainsi cette détermination la plus générale devient logarithmiquement infinie au point $y = y_0$. Elle se change en $u_i + m_1 \omega_{2i}$ quand y tourne autour de la valeur singulière y_0 .

2^o Le plan $\frac{y}{t} = \text{const}$ va passer par un point conique de S et ce point conique admet un cône tangent du 2^d ordre, sans autre singularité.

Le résultat est encore le même, on a seulement:

$$\omega_{1i} = \varphi(y) + \frac{2\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0), \quad u_i = \psi(y) + \frac{2m_1 \omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

de sorte que φ_{1i} et u_i se changent en $\omega_{1i} + 2\omega_{2i}$ et $u_i + 2m_1 \omega_{2i}$, et non plus en $\omega_{1i} + \omega_{2i}$ et $u_i + m_1 \omega_{2i}$ quand y tourne autour de y_0 .

Considérons les points de contact de la courbe K_y avec des tangentes parallèles à une direction donnée; dans les deux cas que nous venons d'examiner, deux de ces points, A et B , se confondent en un seul pour $y = y_0$; mais dans le 1^{er} cas, A et B s'échangent entre eux quand y tourne autour de y_0 ; dans

le 2^d cas, A et B reviennent à leurs positions initiales, mais après avoir tourné l'un autour de l'autre.

3^o Le plan $\frac{y}{t} = \text{const}$, passe par un point conique de S , et ce point conique admet un cône tangent du 3^e ordre sans autre singularité.

Alors six des points de contact dont nous venons de parler se confondent en un seul pour $y = y_0$; deux des périodes ω_{ki} (à savoir celles que l'on obtient en intégrant le long de contours s'écartant très peu de ces six points de contact) restent des fonctions uniformes de y dans le voisinage de $y = y_0$, mais elles peuvent devenir infinies du 1^{er} ordre pour $y = y_0$; les autres périodes peuvent cesser d'être des fonctions uniformes.

Nous distinguerons trois sortes de périodes; celles dont nous venons de parler et dont les contours s'écartent très peu de nos six points de contact; celles dont les contours restent toujours très éloignés de ces six points; celles dont les contours vont passer très près de ces six points et entre ces points et s'en écartent ensuite beaucoup.

De même nous distinguerons trois sortes d'intégrales; celles où P_i s'annule au point conique; celles où P_i est indépendant de x et de z , celles qui ne satisfont à aucune de ces deux conditions. Si la surface S ne présente d'autre singularité que le point conique, les intégrales de la 3^e sorte ne sont que des combinaisons de celles des deux premières.

Cela posé, les périodes de la 2^{de} sorte se comportent régulièrement; nous venons de voir que celles de la 1^{ère} sorte se comportent comme $\frac{1}{y - y_0}$; c'est ce qui arrive pour les intégrales de la 2^{de} ou de la 3^e sorte; pour les intégrales de la 1^{ère} sorte, ces périodes restent des fonctions holomorphes de y .

En ce qui concerne les périodes de la 3^e sorte, on voit qu'elles se comportent comme $\frac{1}{y - y_0}$ pour les intégrales de la 2^{de} sorte; qu'elles deviennent logarithmiquement infinies pour celles de la 1^{ère} sorte; pour celles de la 3^e, leurs deux singularités se trouvent réunies, c'est à dire que le développement comporte des termes en $\frac{1}{y - y_0}$, $(y - y_0)^m$, $L(y - y_0)$, $(y - y_0)^m L(y - y_0)$.

Comment se comportent maintenant les intégrales u_i elles-mêmes; cela dépend si le point M coïncide ou non avec le point conique; dans le second cas une des déterminations que j'appelle u_i se comporte régulièrement; la détermination la plus générale

$$u_i = u_i^* + \sum m_k \omega_{ki}$$

se comporte comme les périodes; quand y tourne autour de y_0 , u_i augmente d'une période.

Qu'arrive-t-il maintenant si quand y tend vers y_0 , le point M se rapproche indéfiniment du point conique? Les intégrales de la 1^{ère} sorte, deviendront logarithmiquement infinies; celles de la 2^{de} sorte se comporteront comme $\frac{1}{y - y_0}$; celles de la 3^e sorte présenteront la combinaison des deux singularités.

Revenons encore sur les deux premiers cas, pour expliquer comment se comporte u_i quand le point M tend vers le nouveau point double.

Soit par exemple $x = y = z = 0$ le nouveau point double que la courbe K_y acquiert quand y s'annule. Dans le 1^{er} cas (plan tangent ordinaire) nous

supposerons que le point M se rapproche du nouveau point double de telle façon que $\frac{x}{\sqrt{y}}, \frac{z}{\sqrt{y}}$ tendent vers des limites finies. Alors u_i sera de la forme:

$$\psi(y) + \mu \frac{\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0) \quad (\text{ici } y_0 = 0)$$

ψ étant holomorphe et μ étant la moitié d'un entier impair. Dans le second cas (point conique du 2^d ordre) nous supposerons que $\frac{x}{y}$ et $\frac{z}{y}$ tendent vers des limites finies et u_i sera encore de même forme, μ désignant cette fois un entier impair.

Ce que nous venons de dire au sujet des valeurs singulières va nous aider à comprendre ce qui concerne les valeurs *critiques apparentes*.

Soit

$$u_i = \int \frac{P_i dx}{Q F_i}.$$

Je suppose que P_i soit divisible par y , de telle façon que y soit une valeur critique de la 1^{ère} sorte; je suppose que le point $x = y = z = 0$ soit un point conique du 3^e ordre de la surface S de telle sorte que $y = 0$ soit *en même temps* une valeur singulière correspondant au 3^e cas envisagé plus haut. De plus P_i est indépendant de x et de z de façon que notre intégrale sera de la 2^de sorte. Enfin Q ne s'annule pas pour $y = 0$. Dans ces conditions l'intégrale $\frac{t u_i}{y}$ reste finie pour $y = 0$, si le point M ne coïncide pas avec le point conique, et elle devient infinie comme $\frac{1}{y}$ dans le cas contraire. Donc l'intégrale u_i s'annulera pour $y = 0$ si le point M ne vient pas au point conique, mais elle restera finie dans le cas contraire. La valeur $y = 0$ n'est donc qu'une valeur critique apparente, puisque l'intégrale u_i n'est pas assujettie à s'annuler pour $y = 0$.

Cette difficulté n'est pas à redouter dans les deux autres cas examinés plus haut, qui sont ceux du plan tangent ordinaire et du point conique du 2^d ordre. En effet $\frac{t u_i}{y}$ ne devient infinie que logarithmiquement d'où il suit que u_i est nul.

M. Picard a démontré que, par une transformation birationnelle, on peut changer une surface quelconque en une surface S n'ayant d'autre singularité qu'une courbe double et certains points triples à plans tangents séparés qui sont des points triples de cette courbe double. Nous pourrions donc toujours supposer que la surface S n'a pas de point conique; d'autre part le choix des axes étant arbitraire nous pourrions toujours supposer que la droite $y = t = 0$ ne touche pas la surface et ne se trouve sur aucun plan tangent singulier à cette surface, non plus que sur les plans qui touchent cette surface en deux ou plusieurs points. *Les seules valeurs singulières que nous aurons à envisager correspondront donc à des plans tangents ordinaires.*

Cela posé, nous pouvons encore choisir d'une manière assez arbitraire les intégrales u_i . Si en effet nous posons:

$$(2) \quad X'_z = \sum_{i=1}^{i=p} q_{iz} \frac{P_i}{Q} \quad (z = 1, 2, \dots, p)$$

les q_{ix} étant p^2 fonctions rationnelles homogènes de degré zéro en y et t , nous aurons $X'_x = \frac{P'_x}{Q'}$, Q' étant un polynôme homogène de degré ν' en y et t , P'_x un polynôme homogène de degré $n + \nu' - 2$ en x, y, z, t , contenant x et z au plus au degré $n - 3$. En d'autres termes les intégrales

$$u'_x = \int \frac{P'_x dx}{Q' F'_z} = \Sigma q_{ix} u_i$$

pourront jouer le même rôle que les intégrales u_i .

Quelles simplifications pourrions-nous obtenir par l'emploi de la transformation (2)? En premier lieu, nous pouvons prendre $q_{ix} = \frac{Q}{Q'}$, Q' étant un polynôme de même forme et de même degré que Q ; alors les ν valeurs critiques de la 2^{de} sorte qui étaient données par $Q = 0$, seront données par $Q' = 0$; le polynôme Q' étant arbitraire, les ν valeurs critiques de la 2^{de} sorte peuvent être choisies arbitrairement, nous pouvons donc toujours supposer qu'elles ne coïncident ni avec les valeurs critiques de la 1^{ère} sorte ni avec les valeurs singulières, et qu'elles sont d'ailleurs toutes distinctes et correspondent à des infinis simples.

En second lieu, nous pouvons supposer que les valeurs critiques de la 1^{ère} sorte ne coïncident pas non plus avec les valeurs singulières. Soit en effet $y = y_0 t$ une valeur singulière, et supposons qu'elle soit également une valeur critique de la 1^{ère} sorte. Ce pourra être une valeur critique d'ordre supérieur. Si par exemple parmi les combinaisons $\Sigma \alpha_i P_i$, il y en a μ_3 qui sont divisibles par $(y - y_0 t)^3$, μ_2 divisibles par $(y - y_0 t)^2$, et enfin μ_1 divisibles par $(y - y_0 t)$, ce sera une valeur critique d'ordre $3\mu_3 + 2\mu_2 + \mu_1$. Il suffira de prendre un cas particulier, supposons donc pour fixer les idées que la seule combinaison qui soit divisible par $(y - y_0 t)^3$ soit $\Sigma \beta_i P_i$, que $\Sigma \gamma_i P_i$ soit divisible par $y - y_0 t$ et que toute combinaison divisible par $y - y_0 t$ soit de la forme $B \Sigma \beta_i P_i - C \Sigma \gamma_i P_i$. Nous poserons alors, par une 1^{ère} transformation:

$$P'_1 = \Sigma \beta_i P_i, \quad P'_2 = \Sigma \gamma_i P_i, \quad P'_3 = \Sigma \delta_i P_i, \quad \dots \quad P'_p = \Sigma \theta_i P_i$$

de telle façon que le déterminant des coefficients constants $\beta, \gamma, \delta, \dots, \theta$, ne soit pas nul. Alors P'_1 sera divisible par $(y - y_0 t)^3$ et P'_2 par $y - y_0 t$. Nous ferons ensuite une 2^{de} transformation en posant:

$$P''_1 = \frac{(y - y_1 t)(y - y_2 t)}{(y - y_0 t)^2} P'_1, \quad P''_2 = \frac{y - y_3 t}{y - y_0 t} P'_2, \quad P''_k = P'_k \quad (k > 2).$$

Pour les polynômes P'' , la valeur critique triple y_0 a disparu pour être remplacée par les trois valeurs critiques simples y_1, y_2, y_3 , choisies arbitrairement. Nous pourrions donc toujours supposer que toutes les valeurs critiques sont simples, distinctes entre elles et distinctes des valeurs singulières.

Nous pouvons aussi profiter de la transformation (2) pour faire disparaître toutes les valeurs critiques de la 2^{de} sorte; mais c'est un point que nous ne pourrions démontrer complètement que plus loin et qui exige quelques explications.

Soient

$$y = y_1 t, \quad y = y_2 t, \quad \dots, \quad y = y_\mu t$$

les diverses valeurs critiques de la 1^{ère} sorte. Soient

$$(3) \quad \Sigma \alpha_i^1 P_i, \quad \Sigma \alpha_i^2 P_i, \quad \dots, \quad \Sigma \alpha_i^\mu P_i$$

les combinaisons linéaires des P_i qui s'annulent en ces diverses valeurs critiques. Les combinaisons (3) peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de h d'entre elles, h étant au plus égal à p . Si $h = p$, notre théorème est aisé à démontrer; soit en effet $y = y_0 t$ l'une des valeurs critiques de la 2^e sorte; nous poserons d'abord, en supposant que les p premières combinaisons (3), sont linéairement indépendantes

$$P'_1 = \Sigma \alpha_i^1 P_i, \quad P'_2 = \Sigma \alpha_i^2 P_i, \quad \dots, \quad P'_p = \Sigma \alpha_i^p P_i.$$

Alors P'_x étant divisible par $y - y_x t$, nous poserons: $P'_x = \frac{y - y_0 t}{y - y_x t} P_x$ la valeur critique $y = y_0 t$ aura disparu et nous pourrions ainsi les faire disparaître toutes, les unes après les autres.

Si $h < p$, parmi nos polynômes P_x il y en aura qui ne seront pas des combinaisons linéaires des combinaisons (3). Quand il en sera ainsi, nous dirons quelquefois pour abrégé que les intégrales u_x correspondantes n'ont pas de valeur critique de la 1^{ère} sorte. Nous montrerons plus loin que *cette circonstance ne peut pas se présenter tant qu'il existe des valeurs critiques de la 2^{de} sorte*; nous aurons ainsi achevé d'établir la possibilité de faire disparaître toutes les valeurs critiques de la 2^{de} sorte.

2. Les fonctions v_i . Soit C une courbe algébrique tracée sur la surface S ; le plan $\frac{y}{t} = \text{const}$ coupera cette courbe en m points mobiles, $M_1, M_2, \dots, M_m$, soient $u_1^1, u_1^2, \dots, u_1^m$ les valeurs correspondantes de l'intégrale u_i ; je poserai:

$$(1) \quad v_i = u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^m;$$

on remarquera que cette notation n'est pas tout à fait la même que celle que j'avais employée dans le mémoire cité des Annales de l'Ecole Normale; j'avais posé:

$$m v_i = u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^m;$$

la nouvelle notation est plus commode. Nous verrons alors:

1^o que pour une valeur ordinaire de y , v_i est fonction holomorphe de y ; elle est fonction holomorphe de $\frac{1}{y}$ pour $y = \infty$;

2^o que les fonctions v_i peuvent devenir infinies du 1^{er} ordre pour les valeurs critiques de la 2^{de} sorte (supposées toutes simples);

3^o que pour une valeur critique de la 1^{ère} sorte, pour laquelle $\Sigma \alpha_i P_i$ s'annule, on devra avoir $\Sigma \alpha_i v_i = 0$;

4^o que pour une valeur singulière, les x_i peuvent devenir logarithmiquement infinies; quand y tourne autour d'une valeur singulière, v_i augmente d'une période. Je précise, supposons que u_i^* soit la détermination de u_i qui reste fonction holomorphe de y , et que l'on envisage la détermination:

$$u_i = u_i^* + \Sigma m_x \omega_{xi}$$

on aura (cf. § précédent)

$$u_i = \psi(y) + \frac{m_1 \omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

et u_i se changera en $u_i + m_1 \omega_{2i}$, et en général v_i en $v_i + \Sigma m_1 \omega_{2i}$, Σm_1 étant la somme des valeurs de m_1 relatives aux diverses intégrales $u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^m$.

On voit donc que v_1 par exemple augmente d'une période, pendant que $v_2, v_3, \dots, v_p$ augmentent de la période *correspondante*.

Il est intéressant de distinguer plusieurs cas. Supposons d'abord que la courbe C ne passe pas par le point de contact; alors toutes les fonction u_i^* seront de la forme (2) et on aura:

$$v_i = \psi(y) + \Sigma m_1 \frac{\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

$\psi(y)$ étant holomorphe et Σm_1 étant un entier.

Supposons maintenant que la courbe C passe par le point de contact, elle y touchera alors le plan $\frac{y}{t} = \text{const}$, de sorte que deux des points M_x , (par exemple M_1 et M_2) se confondront avec le point de contact. Alors toutes les intégrales u_i^* seront de la forme (2), à l'exception des intégrales u_1^* et u_2^* pour lesquelles on aura:

$$u_1^* \text{ ou } u_2^* = \psi(y) + \mu \frac{\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

μ étant la moitié d'un entier impair. On aura encore

$$v_i = \psi(y) + K \frac{\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

K étant un entier.

Il peut arriver aussi que la courbe K_y se décompose pour la valeur singulière de y ; les résultats précédents subsisteront.

On observera qu'à chaque valeur singulière est attachée une période qui joue un rôle particulier; toutes les périodes sont des fonctions de y qui augmentent d'un multiple de cette période particulière quand y tourne autour de cette valeur singulière. C'est cette période particulière que nous avons désignée plus haut par ω_{2i} . On peut alors préciser la condition 4° en disant que quand y tourne autour d'une valeur singulière, toutes les fonctions v_i augmentent d'un multiple de la période particulière qui y est attachée.

Tout système de fonctions v_i satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3°, 4° s'appellera un système de *fonctions normales*. A toute courbe C correspond un système de fonctions normales; mais on peut trouver d'autres systèmes de fonctions normales:

1° Les périodes forment un système de fonctions normales.

2° Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ les points d'intersection de S avec la droite $y = t = 0$; ces points appartiennent à toutes les courbes K_y ; si a_i^* est la valeur de l'intégrale u_i au point A_x , les a_i^* forment un système de fonctions normales. En particulier les a_i^1 sont nuls puisque A_1 sert de limite inférieure d'intégration.

3. Formation des Fonctions Normales. Les périodes ω_{2i} satisfont à des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels.

Nous aurons:

$$(1) \quad \Delta_i(\omega) = 0,$$

Δ est une expression différentielle qui est la même pour

$$\omega_{1i}, \omega_{2i}, \dots, \omega_{2p}, i,$$

mais qui dépend de l'indice i . Cette expression est d'ordre $2p$, c'est à dire qu'elle contient des dérivées de ω jusqu'à l'ordre $2p$ inclusivement. Les coefficients sont des polynômes entiers en y ; le coefficient du terme d'ordre le plus élevé ne peut s'annuler que pour les valeurs singulières; de plus une seule des périodes cessant d'être holomorphe en chaque valeur singulière (à savoir celle que nous avons désignée par ω_{1i} au § 1), chacune de ces valeurs est une racine simple de sorte que le coefficient de $\frac{d^{2p}\omega}{dy^{2p}}$ s'écrira:

$$(y - a_1)(y - a_2) \dots (y - a_h)$$

$a_1, a_2, \dots, a_h$ étant les différentes valeurs singulières. C'est donc un polynôme de degré h , h étant le nombre des valeurs singulières. De plus, les intégrales de l'équation (1) devant se comporter régulièrement pour $y = \infty$, les degrés des coefficients de cette équation devront aller en décroissant, de telle façon que le coefficient de $\frac{d^k \omega}{dy^k}$ soit de degré $h - 2p + k$, et le coefficient de ω de degré $h - 2p - 1$ (et non pas $h - 2p$).

Nous avons p équations (1) puisque l'indice i peut prendre p valeurs différentes; mais ces équations sont étroitement apparentées; on passera par exemple de l'équation $\Delta_1(\omega) = 0$ à l'équation $\Delta_i(\omega) = 0$ par une transformation simple; si l'on pose:

$$\omega^* = R_0 \omega + R_1 \frac{d\omega}{dy} + R_2 \frac{d^2\omega}{dy^2} + \dots + R_{2p-1} \frac{d^{2p-1}\omega}{dy^{2p-1}},$$

les R étant des fonctions rationnelles de y convenablement choisies, et que ω satisfasse à $\Delta_i(\omega) = 0$, ω^* satisfera à $\Delta_i(\omega^*) = 0$. L'équation de (1) est ce qu'on appelle l'équation de *Picard*.

Cela posé, considérons dans le plan des y les diverses valeurs singulières a_x ; joignons-les à l'infini par des coupures Q_x ne se recoupant pas mutuellement. A chacune de ces valeurs sera attachée une période jouant un rôle particulier (celle qui avait été désignée par ω_{2i} au § 1). Cette période sera respectivement désignée pour les intégrales $u_1, u_2, \dots, u_p$ par $\overline{\omega}_{x1}, \overline{\omega}_{x2}, \dots, \overline{\omega}_{xp}$.

Il s'agit de construire un système de fonctions normales v_i ; je dois donc supposer que les fonctions v_i restent uniformes tant qu'on ne franchit pas les coupures, et que quand on franchit la coupure Q_x dans le sens direct, v_i se change en

$$v_i + \lambda_x \overline{\omega}_{xi}$$

λ_x étant un entier qui dépend de x mais non de i . Soient alors $b_1, b_2, \dots, b_p$ les valeurs critiques de la 2^{de} sorte. Nous satisferons aux conditions en posant:

$$(2) \quad v_i = \sum \frac{\lambda_x}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{Q_x} \frac{\overline{\omega}'_{xi} dY}{Y - y} + \sum \frac{A_{ji}}{y - b_j} + C_i.$$

Y est la variable par rapport à laquelle on intègre; $\overline{\omega}'_{xi}$ est ce que devient $\overline{\omega}_{xi}$ quand on y remplace y par Y ; les A et C sont des coefficients arbitraires. On voit que l'expression (2) satisfait aux conditions énoncées; comme $\overline{\omega}'_{xi}$ est une fonction holomorphe de Y pour $Y = a_x$, c'est à dire à l'extrémité de la coupure Q_x (rappelons en effet ce que nous avons dit de ω_{2i} au § 1); v_i deviendra logarithmiquement infinie pour $y = a_x$; elle sera infinie du 1^{er} ordre

aux valeurs critiques de 2^{de} sorte et se comportera régulièrement pour toutes les autres valeurs.

Il reste à voir ce qui se passe pour $y = \infty$. Remarquons que les entiers λ ne peuvent pas être choisis arbitrairement; il faut que, quand on décrit un cercle de rayon très grand en franchissant toutes les coupures, v_i revienne à sa valeur primitive. Si les périodes de u_i sont $\omega_{1i}, \omega_{2i}, \dots, \omega_{2p-i}$, on aura:

$$\bar{\omega}_{xi} = \sum \mu_{xj} \omega_{ji}$$

les μ_{xj} étant des entiers. De plus ω_{ji} se changera en $\omega_{ji} + \nu_{xj} \bar{\omega}_{xj}$ quand on franchira la coupure Q_x dans le sens direct les ν_{xj} étant des entiers. Quand on franchira successivement dans le sens direct les coupures $Q_1, Q_2, \dots, Q_p$, ces coupures se succédant dans l'ordre où les rencontre un cercle de rayon très grand, v_i se changera en

$$v_i + \sum \varrho_{1..j} \omega_{ji}$$

les ϱ étant des entiers qu'il s'agit d'étudier; en premier lieu on aura:

$$\varrho_{1j} = \lambda_1 \mu_{1j}.$$

On aura ensuite:

$$\varrho_{xj} - \varrho_{x-1..j} = \mu_{xj} (\lambda_x + \sum \varrho_{x-1..i} \nu_{xi});$$

par ces équations, les ϱ dépendent des entiers indéterminés λ et des entiers déterminés μ et ν ; ce sont des fonctions linéaires et homogènes des entiers λ . Mais comme v_i doit revenir à sa valeur primitive quand on a franchi les h coupures, on devra avoir:

$$(3) \quad \varrho_{h..1} = \varrho_{h..2} = \dots = \varrho_{h..2p} = 0.$$

Ce sont $2p$ équations linéaires auxquelles les λ doivent satisfaire.

Si cette condition est remplie, v_i est fonction uniforme de y dans le voisinage de $y = \infty$; de plus cette fonction reste finie; en effet chacun des termes de (2) reste fini sauf les intégrales, et ces intégrales ne peuvent devenir que logarithmiquement infinies, puisque w'_{xi} reste fini pour $Y = \infty$. Les termes logarithmiques qui seuls pourraient devenir infinis doivent se détruire, puisque v_i est uniforme; donc v_i est fini.

Les conditions (3) ne sont pas les seules que nous devons nous imposer. Soient $c_1, c_2, \dots, c_\mu$ les valeurs critiques de la 1^{ère} sorte, et supposons que pour $y = c_x$ on ait $\sum \alpha_{ix} P_i = 0$ les α_{ix} étant des coefficients constants, on devra avoir pour $y = c_x$

$$(4) \quad \sum \alpha_{ix} v_i = 0.$$

Supposons que les λ soient des entiers satisfaisant aux conditions (3), les relations (4) seront des relations entre les A et C .

Si le nombre des valeurs critiques de la 1^{ère} sorte est plus petit que $p(\nu + 1)$, le nombre des relations (4) distinctes sera à fortiori plus petit que $p(\nu + 1)$; (je dis à fortiori parce que les relations (4) peuvent ne pas être toutes distinctes). On peut alors satisfaire à ces conditions d'une infinité de manières, puisque les indéterminées A et C sont au nombre de $p(\nu + 1)$. On obtiendra alors une infinité continue de systèmes de fonctions normales, correspondant comme nous le verrons bientôt à une infinité continue de courbes algébriques ne constituant pas un système linéaire.

Si en particulier nous égalons tous les λ à zéro, les v_i seront des fonctions uniformes de y , ne pouvant devenir infinis que du 1^{er} ordre aux valeurs critiques de la 2^{de} sorte; elles seront donc rationnelles; nous avons donc une *infinité de systèmes de fonctions normales rationnelles*.

Si le nombre de valeurs critiques de la 1^{ère} sorte est égal à $p(\nu + 1)$, les relations (4) seront en général distinctes; le nombre des indéterminées est alors égal à celui des conditions; et nous aurons pour chaque système de valeurs des λ satisfaisant aux conditions (3) un seul système de fonctions normales. Comme nous pouvons faire varier les λ , nous aurons une infinité de systèmes de fonctions normales, mais cette infinité sera discontinue. En particulier, si tous les λ sont nuls, tous les v_i seront nuls.

Il peut se faire ensuite que le nombre des relations (4) étant égal à $p(\nu + 1)$, ces relations ne soient pas toutes distinctes. Examinons en particulier le cas où il n'y a pas de valeur critique de la 2^{de} sorte; cas auquel nous verrons plus loin que tous les autres se ramènent. Si les relations (4) ne sont pas toutes distinctes, il existe pour tout système de valeurs des λ une infinité de systèmes de fonctions normales; en faisant la différence de deux quelconques de ces systèmes, on obtiendra des systèmes de fonctions normales pour lesquels tous les λ seront nuls; on aura alors

$$v_i = \sum \frac{A_{ji}}{y - b_j} + C_i;$$

comme il n'y a pas de valeur critique de la 2^{de} sorte, on aura simplement $v_i = C_i$, c'est à dire que nos fonctions normales se réduiront à des constantes. Les relations (4) s'écriront alors $\sum \alpha_{ix} C_i = 0$ et elles seront par hypothèse au nombre de p puisque $\nu = 0$. Si elles étaient toutes distinctes, tous les C_i seraient nuls; si elles ne sont pas toutes distinctes, quelques-uns des C_i peuvent être choisis arbitrairement; parmi les C_i , il en existe alors qui ne sont pas des combinaisons linéaires des premiers membres des relations (4); les intégrales u_i correspondantes, pour employer la terminologie de la fin du § 1 n'ont pas de valeurs critiques de la 1^{ère} sorte. Il existe également des intégrales qui n'ont pas de valeurs critiques de la 1^{ère} sorte, si le nombre des relations (4) est plus petit que $p(\nu + 1)$. *L'existence d'un système de fonctions normales rationnelles se trouve ainsi rattachée à l'existence d'intégrales dépourvues de valeurs critiques de la 1^{ère} sorte, au sens de la fin du § 1.*

Si enfin le nombre des valeurs critiques de la 1^{ère} sorte est plus grand que $p(\nu + 1)$, il sera en général impossible de satisfaire aux relations (4). Les fonctions normales correspondant à des valeurs données des entiers λ , n'existeront pas en général et on ne pourra les former que pour certaines surfaces particulières satisfaisant pour ainsi dire à des conditions arithmétiques.

Considérons maintenant les expressions $\mathcal{A}_i(v_i)$; je dis que ce sont des fonctions uniformes de y . En effet quand y décrit un contour fermé quelconque, v_i se change en $v_i + \Omega_i$, Ω_i étant une période de u_i ; $\mathcal{A}_i(v_i)$ se change en $\mathcal{A}_i(v_i) + \mathcal{A}_i(\Omega_i)$. Or en vertu de l'équation (1), $\mathcal{A}_i(\Omega_i) = 0$; donc $\mathcal{A}_i(v_i)$ ne change pas. C. Q. F. D.

$\mathcal{A}_i(v_i)$ reste fini pour les valeurs ordinaires de y ainsi que pour les valeurs critiques de la 1^{ère} sorte. Dans le voisinage d'une valeur singulière nous avons:

$$v_i = v_i^* + \sum m_x \omega_{xi}$$

v_i^* étant holomorphe et les m_x étant des entiers. Alors $\mathcal{A}_i(v_i^*)$ est holomorphe, $\mathcal{A}_i(\omega_{xi})$ est nul en vertu des équations (1); donc $\mathcal{A}_i(v_i)$ est holomorphe.

En une valeur critique de la 2^{de} sorte, v_i devient infini d'ordre 1, sa dérivée d'ordre q devient infinie d'ordre $q + 1$, et $\mathcal{A}_i(v_i)$ devient infini d'ordre $2p + 1$.

Pour $y = \infty$, v_i reste fini, sa dérivée d'ordre q devient nulle d'ordre $q + 1$; d'autre part dans $\mathcal{A}_i(v_i)$ le coefficient de v_i devient infini d'ordre $h - 2p - 1$, celui de sa dérivée q^e devient infini d'ordre $h - 2p + q$; nous concluons que $\mathcal{A}_i(v_i)$ devient infini d'ordre $h - 2p - 1$.

En résumé $\mathcal{A}_i(v_i)$ est une fonction rationnelle de y et l'on peut écrire:

$$(5) \quad \mathcal{A}_i(v_i) = \frac{N_i}{Q^{2p+1}}$$

où

$$Q = (y - b_1)(y - b_2) \dots (y - b_r)$$

et où P est un polynôme entier en y d'ordre $h + (2p + 1)(v - 1)$.

Telle est l'équation différentielle à laquelle satisfont les fonctions normales v_i .

4. Introduction des Fonctions Abéliennes. Pour bien faire comprendre la nature du problème que je veux maintenant aborder, je me restreindrai d'abord à un cas particulier, celui où $p = 1$ et où par conséquent les fonctions abéliennes que nous aurons à envisager se réduisent aux fonctions elliptiques. Nous n'avons alors qu'une intégrale u_i ; et un «système» de fonctions normales se réduit à une seule fonction que j'appellerai v en supprimant l'indice devenu inutile. Nous n'aurons plus que deux périodes ω_1 et ω_2 , qui seront des fonctions de y définies par l'équation de Picard

$$(1) \quad \mathcal{A}(\omega) = 0$$

(équation (1) du § précédent) tandis que la fonction normale v satisfera à

$$(2) \quad \mathcal{A}(v) = \frac{N}{Q^{2p+1}}$$

(équation (5) du § précédent).

Cela posé, considérons la fonction $\wp(u)$ de Weierstrass; elle dépend non seulement de l'argument u , mais des deux périodes ω_1 et ω_2 ; si nous y remplaçons l'argument par la fonction normale v définie par l'équation (2) et les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$ définies en fonctions de y par l'équation (1), la fonction de Weierstrass deviendra une fonction de y :

$$\wp(v, \omega_1, \omega_2) = G(y)$$

et c'est cette fonction qu'il s'agit d'étudier.

Quand y tourne autour d'une valeur singulière, les périodes se changent en d'autres périodes, et v augmente d'une période. Dans ces conditions la fonction de Weierstrass ne change pas. Donc G est une fonction uniforme de y .

Pour un point ordinaire et si v n'est pas égal à une période: G est évidemment holomorphe, et de même c'est une fonction holomorphe de $\frac{1}{y}$ dans le voisinage de $y = \infty$.

Si $y = b$ est une valeur critique de la 2^e sorte, nous voyons que v , ω_1 et ω_2 deviennent infinis, mais $v(y - b)$, $\omega_1(y - b)$, $\omega_2(y - b)$ restent holomorphes; d'nc:

$$\wp(v, \omega_1, \omega_2) = (y - b)^2 \wp[v(y - b), \omega_1(y - b), \omega_2(y - b)]$$

est holomorphe pour $y = b$ et même s'annule; rappelons en effet que la fonction de Weierstrass est homogène de degré -2 en v, ω_1, ω_2 .

Si $y = c$ est une valeur critique de la 1^{ère} sorte, il arrive que v, ω_1 et ω_2 s'annulent pour $y = c$, mais $\frac{v}{y - c}, \frac{\omega_1}{y - c}, \frac{\omega_2}{y - c}$ restent finis et comme on a:

$$\wp(v, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(y - c)^2} \wp\left(\frac{v}{y - c}, \frac{\omega_1}{y - c}, \frac{\omega_2}{y - c}\right)$$

G reste une fonction *méromorphe* de y .

Si v était égal à une période, la fonction de Weierstrass ne serait plus une fonction holomorphe de v, ω_1 et ω_2 , mais une fonction méromorphe, devenant infinie d'ordre 2.

Donc G restera encore fonction méromorphe de y , que la valeur envisagée soit d'ailleurs ordinaire ou critique.

Il nous reste à rechercher ce qui se passe aux valeurs singulières. La fonction de Weierstrass ne dépendant pas du choix des périodes, nous pouvons supposer que $2\omega_1$ et $2\omega_2$ sont précisément les périodes qui dans le voisinage de la valeur singulière considérée $y = y_0$ sont de la forme:

$$\psi(y) + \frac{\theta(y)}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0), \quad \theta(y)$$

$\psi(y)$ et $\theta(y)$ restant holomorphes (sans que $\theta(y)$ s'annule); d'autre part v sera de la forme:

$$v^* + \lambda \frac{\theta(y)}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

u^* restant holomorphe et λ étant un entier. Si nous posons avec Weierstrass (cf. Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques):

$$h = e^{\pi\sqrt{-1} \frac{\omega_1}{\omega_2}}, \quad z = e^{\frac{\pi\sqrt{-1} v}{2\omega_2}},$$

nous voyons que $h(y - y_0)^{-\frac{\lambda}{2}}, z(y - y_0)^{-\frac{\lambda}{2}}$ demeurent holomorphes et ne s'annulent pas pour $y = y_0$. Nous voyons d'autre part (loc. cit. édition française p. 41): que

$$\sigma(v) = e^{2\eta_2 \omega_2 v^2} K \wp(v), \quad \wp(v) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum (-1)^m h^{\frac{(2m+1)^2}{4}} z^{2m+1}$$

K étant un facteur constant, d'où:

$$\wp(v) = \frac{\sigma'^2 - \sigma\sigma''}{\sigma^2} = -\frac{\eta_2}{\omega_2} + \frac{\wp'^2 - \wp\wp''}{\wp^2};$$

(j'écris v au lieu de u , pour conserver la notation adoptée jusqu'ici, et je désigne par w le v de Weierstrass, c'est à dire $\frac{v}{2\omega_2}$). D'ailleurs on a :

$$\frac{2\omega_2}{\pi\sqrt{-1}} \wp'(v) = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \sum (-1)^m (2m+1) h^{\frac{(2m+1)^2}{4}} z^{2m+1},$$

$$\left(\frac{2\omega_2}{\pi\sqrt{-1}}\right)^2 \wp''(v) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum (-1)^m (2m+1)^3 h^{\frac{(2m+1)^2}{4}} z^{2m+1}.$$

Je dis que

$$\wp(v) = (y - y_0)^{\frac{1}{8} + \frac{\lambda}{2}} H(y)$$

H étant holomorphe, ou au moins méromorphe. En effet, on a :

$$h^{\frac{(2m+1)^2}{4}} z^{2m+1} = (y - y_0)^{\frac{(2m+1)^2}{8} + \frac{\lambda}{2}(2m+1)} M(y).$$

M étant holomorphe; l'exposant de $y - y_0$ est égal à : $\frac{1}{8} + \frac{\lambda}{2} + \left[\frac{m^2 + m}{2} + \lambda m\right]$, l'expression entre crochets est un entier; et quels que soient le signe et la valeur de λ , cet entier est positif pourvu que m soit suffisamment grand en valeur absolue.

Si donc nous mettons de côté le facteur $(y - y_0)^{\frac{1}{8} + \frac{\lambda}{2}}$ nous voyons que tous les termes de la série $\wp(v)$ sont holomorphes, sauf un nombre fini qui sont méromorphes. Donc $H(y)$ est méromorphe. On démontrerait de même que :

$$\frac{2\omega_2}{\pi\sqrt{-1}} \wp'(v), \quad \left(\frac{2\omega_2}{\pi\sqrt{-1}}\right)^2 \wp''(v)$$

sont de la forme :

$$(y - y_0)^{\frac{1}{8} + \frac{\lambda}{2}} H(y)$$

H étant méromorphe; comme $2\omega_2 = \theta(y)$ est holomorphe et ne s'annule pas, l'expression $\frac{\wp'^2 - \wp\wp''}{\wp^3}$ est méromorphe. D'autre part $\eta_2\omega_2$ d'après Weierstrass (loco cit. page 8, article 6, formule 10) est une fonction holomorphe de h^2 (pour $h = 0$) et par conséquent de y pour $y = y_0$. Nous devons donc conclure que pour cette valeur, $\wp(v)$ est une fonction méromorphe de y .

Ainsi G reste une fonction méromorphe de y même pour les valeurs singulières. Elle est donc méromorphe dans tout le plan et même à l'infini; c'est donc une fonction rationnelle de y .

La dérivée partielle $\frac{d\wp}{dv}$ est aussi une fonction doublement périodique de v qui ne change pas quand on remplace le système des périodes par un système équivalent. On démontrerait de la même manière que c'est une fonction rationnelle de y .

Envisageons maintenant les trois dérivées partielles

$$\frac{d\wp}{dv}, \quad \frac{d\wp}{d\omega_1}, \quad \frac{d\wp}{d\omega_2}.$$

Quand v augmente d'une période, ou que l'on remplace le système des périodes par un système équivalent, ces trois dérivées subiront une transformation linéaire et cela de telle façon que

$$(3) \quad \begin{cases} v \frac{d\varphi}{dv} + \omega_1 \frac{d\varphi}{d\omega_1} + \omega_2 \frac{d\varphi}{d\omega_2} \\ \frac{dv}{dy} \frac{d\varphi}{dv} + \frac{d\omega_1}{dy} \frac{d\varphi}{d\omega_1} + \frac{d\omega_2}{dy} \frac{d\varphi}{d\omega_2} \\ \frac{d^2 v}{dy^2} \frac{d\varphi}{dv} + \frac{d^2 \omega_1}{dy^2} \frac{d\varphi}{d\omega_1} + \frac{d^2 \omega_2}{dy^2} \frac{d\varphi}{d\omega_2} \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

demeurent invariants. On en conclut (par un raisonnement tout semblable au précédent) que toutes ces expressions sont des fonctions rationnelles de y . Pour la seconde d'entre elles cela est d'ailleurs évident puisque c'est la dérivée totale de φ par rapport à y et que φ est une fonction rationnelle de y .

En combinant ces expressions on trouve que

$$\Delta v \frac{d\varphi}{dv} + \Delta \omega_1 \frac{d\varphi}{d\omega_1} + \Delta \omega_2 \frac{d\varphi}{d\omega_2}$$

est une fonction rationnelle de y . Or $\Delta \omega_1$ et $\Delta \omega_2$ sont nuls; en vertu de l'équation (1) cette expression se réduit donc à $\Delta v \cdot \frac{d\varphi}{dv}$.

Nous savions déjà que les deux facteurs Δv (en vertu de l'équation 2) et $\frac{d\varphi}{dv}$ sont des fonctions rationnelles de y .

Passons maintenant au cas général où le genre p des courbes K_y est plus grand que 1.

Nous nous servirons des propriétés des fonctions intermédiaires (fonctions de Frobenius) et nous en utiliserons en particulier quelques-unes que j'ai démontrées dans l'American Journal of Mathematics (tome 8). Soit ω_{xi} la x° période de la i° intégrale. Il existera entre les périodes de deux intégrales quelconques une relation bilinéaire:

$$(4) \quad \Phi(\omega_{xi}, \omega_{xj}) = 0$$

telle que le premier membre Φ linéaire et homogène tant par rapport à

$$\omega_{1i}, \omega_{2i}, \dots, \omega_{2p \cdot i}$$

que par rapport à:

$$\omega_{1j}, \omega_{2j}, \dots, \omega_{2p \cdot j}$$

change de signe quand on permute ω_{xi} avec ω_{xj} . Si l'on prend en particulier les périodes normales, cette fonction Φ prend une forme particulièrement simple. Nous aurons:

$$(4 \text{ bis}) \quad \Phi = \sum_{x=1}^{x=p} (\omega_{xi} \omega_{x+p \cdot j} - \omega_{x \cdot j} \omega_{x+p \cdot i}) = 0.$$

Considérons alors une fonction intermédiaire, c'est une fonction entière H de $v_1, v_2, \dots, v_p$, qui est multipliée par une exponentielle quand les variables augmentent d'une période: de sorte que

$$H(v_i + \omega_{xi}) = e^{P_x} H(v_i); \quad P_x = \sum_i \alpha_{xi} u_i + \gamma_x.$$

Nous poserons d'autre part:

$$\delta_x = \gamma_x - \frac{1}{2} \sum \alpha_{xi} \omega_{xi}.$$

Les quantités γ_x et δ_x ne sont évidemment déterminées qu'à un multiple près de $2\pi\sqrt{-1}$. Nous envisagerons ensuite les combinaisons

$$\Phi(\alpha_{xi}, \omega_{xj}) = \Phi_{ij}.$$

Nous supposons

$$(5) \quad \Phi_{ii} = 2m\pi\sqrt{-1}; \quad \Phi_{ij} = 0 \quad (i \geq j),$$

la fonction intermédiaire sera alors dite d'ordre m ; une fonction intermédiaire du 1^{er} ordre est déterminée à un facteur constant près quand on connaît ses multiplicateurs e^{P_x} . Une fonction intermédiaire du 1^{er} ordre est paire ou impaire quand tous les δ_x sont égaux à 0 ou à $\pi\sqrt{-1}$. Pour des valeurs données des coefficients α_{xi} , il y a donc 2^{2p} fonctions intermédiaires du 1^{er} ordre paires ou impaires.

Si nous multiplions la fonction intermédiaire H par une exponentielle e^Q , où Q est un polynôme homogène du 2^d degré par rapport aux v_i , nous aurons une nouvelle fonction intermédiaire H' pour laquelle les Φ_{ij} et les δ_x seront les mêmes. On pourra disposer du polynôme Q de telle façon que les α_{xi} s'annulent pour toutes les périodes de la 1^{ère} série, c'est à dire pour $x \leq p$. La fonction H' est alors une fonction Θ , mais nous nous bornerons aux fonctions paires ou impaires qui sont au nombre de 2^{2p} . Parmi ces fonctions Θ , il y en a une qui est la fonction Θ proprement dite et que nous désignerons par Θ_0 pour la distinguer des autres; c'est celle pour laquelle tous les δ_x sont nuls.

Nous envisagerons maintenant les fonctions Π qui sont les dérivées partielles du 3^e ordre (par rapport aux v) du logarithme de l'une des fonctions Θ du 1^{er} ordre paires ou impaires. Ces fonctions Π sont donc au nombre de $\frac{p(p+1)(p+2)}{6} 2^{2p}$ puisqu'il y a 2^{2p} fonctions $L \Theta$ et que chacune d'elles a $\frac{p(p+1)(p+2)}{6}$ dérivées du 3^e ordre.

1^o Une dérivée partielle du 3^e ordre du logarithme d'une fonction intermédiaire du 1^{er} ordre H paire ou impaire est égale à l'une des fonctions Π . On a en effet

$$\log \Theta = \log H - Q$$

Q étant un polynôme du 2^d degré et toute dérivée 3^e de Q est nulle.

2^o Quand on augmente les v d'une période, les Π ne changent pas; car $\log \Theta$ augmente de P_x dont les dérivées 3^{es} sont nulles.

3^o Qu'arrive-t-il maintenant quand on remplace les périodes par un système de périodes normales équivalent? D'abord les Φ_{ij} ne changent pas (loc. cit. page 323); de plus si la fonction intermédiaire était paire ou impaire, elle conservera ce caractère; si les anciens δ_x étaient tous égaux à zéro ou à $\pi\sqrt{-1}$, il en sera de même des nouveaux δ_x ; mais il n'y a aucune nécessité à ce que chaque nouveau δ_x soit égal à l'ancien δ_x correspondant. Nous en concluons que les différentes fonctions Π s'échangent simplement entre elles, une dérivée du 3^e ordre du logarithme de Θ se changeant dans la dérivée partielle correspondante du logarithme d'un autre Θ .

4° Si nous faisons subir aux v_i une substitution linéaire, et en même temps aux périodes ω_{xi} la substitution linéaire correspondante, et aux α_{xi} la substitution contragrédiente de telle sorte que $\sum \alpha_{xi} v_i$ ne change pas, la fonction intermédiaire H définie par les v , les ω , les α et les δ ne changera pas; il en sera de même de son logarithme; les dérivées partielles de ce logarithme (et en particulier les Π correspondants) subiront une transformation linéaire (contragrédiente de celle que subissent les produits de trois facteurs égaux à des v_i distincts ou non).

Si par exemple v_1 est multiplié par c , les ω_{x1} multipliés par c , les α_{x1} divisés par c , les fonctions Π représentées par:

$$\frac{d^3}{dv_1^3} \log \Theta, \quad \frac{d^3}{dv_1^2 dv_2} \log \Theta, \quad \frac{d^3}{dv_1 dv_2^2} \log \Theta, \quad \frac{d^3}{dv_2^3} \log \Theta, \quad \text{etc.}$$

seront respectivement multipliées par

$$\frac{1}{c^3}, \quad \frac{1}{c^2}, \quad \frac{1}{c}, \quad 1, \quad \text{etc.}$$

Cela posé, je suppose que l'on remplace les ω_{xi} par leurs valeurs en fonction de y et les v_i par un système de fonctions normales de y , une fonction Π va devenir une fonction $G(y)$ qu'il s'agit d'étudier.

1° Lorsque y décrit un contour fermé, les v augmentent d'une période, le système de périodes est remplacé par un système équivalent. Dans ces conditions, les fonctions G peuvent seulement s'échanger entre elles. Je précise; convenons pour abréger le langage, de dire que deux fonctions $G = \Pi$ appartiennent au même système quand elles dérivent de plusieurs $\log \Theta$ différents par le même mode de différentiation; et qu'elles appartiennent au même groupe quand elles sont les diverses dérivées partielles d'un même $\log \Theta$. Alors les fonctions G d'un même système s'échangeront entre elles. Donc toute fonction symétrique des diverses fonctions G d'un même système est une fonction uniforme de y .

Pour une valeur ordinaire de y , les G sont des fonctions méromorphes de y .

Pour une valeur critique de la 2° sorte $y = b$, les produits $v_i(y - b)$, $\omega_{xi}(y - b)$ restent holomorphes; donc:

$$\Pi(v_i, \omega_{xi}) = (y - b)^3 \Pi[v_i(y - b), \omega_{xi}(y - b)]$$

reste méromorphe.

Pour une valeur critique de la 1ère sorte $y = c$, telle que $\sum \alpha_i v_i = 0$, on fera un changement linéaire de variables, de telle sorte que $v'_1 = \sum \alpha_i v_i$ et que les autres v'_i soient des fonctions linéaires quelconques des v . Nous ferons, bien entendu, le même changement de variables sur les ω_{xi} , de telle sorte que par exemple $\omega'_{x1} = \sum \alpha_i \omega_{xi}$.

Alors les $\Pi(v'_i, \omega'_{xi})$ seront des fonctions linéaires des $\Pi(v_i, \omega_{xi})$ et inversement. Je mettrai en évidence v'_1 et ω'_{x1} en écrivant:

$$\Pi(v'_1, v'_i; \omega'_{x1}, \omega'_{xi})$$

l'indice i prenant les valeurs 2, 3, ..., p ; dans ce cas v'_1 et ω'_{x1} s'annulent pour $y = c$, mais $\frac{v'_i}{y - c}$ et $\frac{\omega'_{xi}}{y - c}$ restent finis. Alors:

$$\Pi(v'_1, v'_i; \omega'_{x1}, \omega'_{xi}) = \frac{1}{(y - c)^2} \Pi\left(\frac{v'_1}{y - c}, v'_i, \frac{\omega'_{x1}}{y - c}, \omega'_{xi}\right)$$

(où $\lambda = 0, 1, 2, 3$ selon le «groupe» de fonctions Π que l'on considère) reste encore méromorphe. Il est donc de même des Π .

Il nous reste à examiner le cas des valeurs singulières. Soit $y = y_0$ une de ces valeurs; dans le voisinage de cette valeur on a:

$$v_i = \psi_i(y) + \frac{\lambda \bar{\omega}_i}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0), \quad \omega_{xi} = \psi_{xi}(y) + \frac{\lambda_x \bar{\omega}_i}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

les ψ étant holomorphes, $\bar{\omega}_i$ étant la période qui est attachée à la valeur singulière au sens du § 2, et qui est une fonction holomorphe de y , les λ et les λ_x étant des entiers. Comme nous avons vu que nos fonctions G d'un même système se permutent simplement entre elles quand on remplace les périodes par un système équivalent de périodes normales, nous pourrions adopter un quelconque de ces systèmes équivalents et il sera toujours possible de le choisir de telle façon que $\bar{\omega} = \omega_{1i}$; dans ces conditions tous les λ_x sont nuls à l'exception de λ_{p+1} qui est égal à 1. En effet la forme:

$$\sum_x (\omega_{xi} \omega_{x+p, j} - \omega_{x+p, i} \omega_{xj})$$

ne doit pas être altérée quand ω_{xi} se change en $\omega_{xi} + \lambda_x \omega_{1i}$, et ω_{xj} en $\omega_{xj} + \lambda_x \omega_{1j}$, ce qui arrive quand y tourne autour de y_0 ; et cela exige que tous les λ_x soient nuls à l'exception de λ_{p+1} . Nous voyons ensuite que quand la valeur singulière y_0 correspond à un plan tangent ordinaire, ce que nous supposons, il existe toujours une période (combinaison linéaire des ω_{xi}) qui augmente de $\bar{\omega}_i$, ce qui exige $\lambda_{p+1} = \pm 1$. Enfin nous supposons $\lambda_{p+1} = 1$; car si λ_{p+1} était négatif, il suffirait de changer $\bar{\omega}_i$ en $-\bar{\omega}_i$.

Nous allons maintenant effectuer un changement linéaire de variables en posant:

$$(6) \quad v'_i = \sum \alpha_{ij} v_j, \quad \omega'_{xi} = \sum \alpha_{ij} \omega_{xj}.$$

Dans ces conditions les $\Pi' = \Pi(v'_i, \omega'_{xi})$ seront des fonctions linéaires des $\Pi(v_i, \omega_{xi})$ et les coefficients de ces fonctions linéaires seront des fonctions méromorphes de y , si les coefficients α_{ij} sont eux-mêmes des fonctions méromorphes de y .

Cela posé, nous pouvons choisir le changement de variables (6) de telle sorte que:

$$\omega'_{xi} = 0 \quad (x \leq p, x \geq i), \quad \omega'_{xx} = 2\pi\sqrt{-1} \quad (x \leq p),$$

les coefficients α_{ij} seront des fonctions méromorphes de y , puisque tous les ω_{xi} où $x \leq p$, et même généralement tous les ω_{xi} sauf $\omega_{p+1, i}$ sont des fonctions holomorphes de y . Nous écrirons alors:

$$\Theta = \sum e^{P_1 + P_2 + P_3}$$

où

$$P_1 = \sum m_i v'_i, \quad P_2 = \sum m_i \varepsilon_i, \quad P_3 = \frac{1}{2} \sum m_i m_x a_{ix}$$

et où:

1° $2m_1, 2m_2, \dots, 2m_p$ sont des entiers: $2m_x$ étant soit toujours pair, soit toujours impair, suivant la valeur des δ_x , c'est à dire suivant celle des 2^{2p} fonctions Θ que l'on envisage;

2° les ε_i sont égaux à 0 ou à $\pi\sqrt{-1}$ suivant celle des 2^{2p} fonctions Θ que l'on envisage.

3° On a

$$a_{ix} = a_{xi} = \omega'_{x+p,i} = \omega'_{i+p,x}.$$

Tous les ω'_{xi} sont des fonctions holomorphes de y sauf peut-être les $\omega'_{p+1,i}$; de plus $\omega'_{p+1,i}$ est égal à une fonction holomorphe de y , plus:

$$\frac{\omega'_{1,i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0).$$

Mais $\omega'_{1,i} = 0$ pour $i \geq 1$; donc tous les a_{ix} sont fonctions holomorphes de y sauf a_{11} , mais $e^{a_{11}}$ est une fonction holomorphe de y qui s'annule pour $y = y_0$.

De même

$$v'_i = \psi'_i(y) + \frac{\lambda \omega'_{1,i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

est holomorphe en y si $i \geq 1$; et l'exponentielle $e^{v'_i}$ est holomorphe ou méromorphe en y , divisible par $(y - y_0)^{\lambda}$. Chacun des termes de Θ est donc égal au produit d'une fonction holomorphe de y , ne s'annulant pour $y = y_0$, par le facteur

$$(y - y_0)^{m_1\lambda + \frac{1}{2}m_1^2}.$$

L'exposant $m_1\lambda + \frac{1}{2}m_1^2$ ne peut être négatif que pour un nombre fini de valeurs de m_1 ; de plus, si l'on change m_1 en $m_1 + 1$, il augmente de $\lambda + m_1 + \frac{1}{2}$.

Si donc $2m_1$ est pair, il augmente d'un entier plus $\frac{1}{2}$; si $2m_1$ est impair, il augmente d'un entier. Si $2m_1$ est impair, tous les termes sont donc égaux à une fonction holomorphe ou méromorphe multipliée par $(y - y_0)^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{8}}$. Si $2m_1$ est pair, ils sont égaux à une fonction holomorphe ou méromorphe multipliée par $(y - y_0)^{\lambda + \frac{1}{2}}$ ou $(y - y_0)^{\lambda}$. Donc quand y tourne autour de y_0 , dans le 1^{er} cas la fonction Θ est simplement multipliée par un facteur constant, dans le 2^d cas, deux des fonctions Θ s'échangent entre elles, à savoir celles qui diffèrent l'une de l'autre par le changement de valeur de ε_1 . Ce sont en tous cas des fonctions algébroides.

Les mêmes raisonnements s'appliqueraient aux dérivées partielles des différents ordres des fonctions Θ prises par rapport aux v'_i ; chaque terme se déduit en effet du terme correspondant de la fonction Θ en le multipliant par un facteur constant ne dépendant que des entiers m . Il résulte de là que les II' sont des fonctions algébroides de y pour $y = y_0$ et que quand y tourne autour de y_0 , les fonctions d'un même système s'échangent simplement entre elles. Cela est donc encore vrai pour les II , qui sont des fonctions linéaires des II' à coefficients méromorphes. En résumé, nous voyons que pour toute valeur de y , les II sont des fonctions algébroides de y , susceptibles seulement de s'échanger entre fonctions d'un même système. Toute fonction symétrique des fonctions $II = G$ d'un même système est donc une fonction méromorphe pour toutes les valeurs finies ou infinies de y . C'est donc une fonction rationnelle de y . Une quelconque des fonctions G est donc une fonction algébrique de y .

Nous pouvons étendre ce résultat au cas où l'on remplace v_i non plus par une fonction normale de y , mais par la moitié d'une fonction normale. Il n'y aura en effet rien de changé dans l'analyse précédente, sauf que λ au lieu d'être un entier, pourra être la moitié d'un entier. Si alors m_1 se change

4*

en $m_1 + 1$, l'exposant $m_1 \lambda + \frac{1}{2} m_1^2$ augmente de $\lambda + m_1 + \frac{1}{2}$; si alors λ est la moitié d'un nombre impair, c'est quand $2m_1$ est pair que notre exposant augmente d'un entier et que la fonction Θ se reproduit à un facteur constant près; et c'est quand $2m_1$ est impair que cet exposant augmente d'un entier plus $\frac{1}{2}$ et que la fonction Θ s'échange avec une autre.

Il peut se faire qu'une fonction G soit non-seulement algébrique, mais rationnelle en y ; c'est ce qui arrive par exemple si v_i est la moitié d'une fonction normale pour laquelle tous les λ soient impairs et si G dérive d'une fonction Θ pour laquelle tous les $2m_i$ soient pairs.

On remarquera que le fait que le système de fonctions normales v_i satisfait à la condition $\sum \alpha_i v_i = 0$ pour une valeur critique de la 1^{ère} sorte joue un rôle essentiel. Le théorème ne serait plus vrai si on remplaçait dans les Π , les v_i par un système de fonctions satisfaisant aux mêmes conditions qu'un système de fonctions normales, *celle-là exceptée*.

§ 5. Classification des Courbes. Considérons un système de fonctions normales v_i , formées par les procédés du § 3. A ce système correspondra-t-il toujours des courbes algébriques? Il existera toujours sur chaque courbe K_y un groupe de p points et un seul: $M_1, M_2, \dots, M_p$, tels que l'on ait:

$$v_i = u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^p,$$

v_i étant la fonction normale considérée, et u_i^x la valeur de l'intégrale u_i au point M_x . Quand on fera varier y , l'ensemble de ces points engendrera une courbe C ; reprenons les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ d'intersection de S avec la droite $y = t = 0$ et soit a_i^x la valeur de u_i au point A_x . Rappelons que d'après nos conventions a_i^1 est nul:

Je me propose de rechercher combien de fois la courbe C passe en A_x , c'est à dire pour combien de valeurs de y , l'un des points M_x vient en A_x . A cet effet je rappelle le théorème de Riemann; d'après ce théorème on a

$$(1) \quad \Theta_0(u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^{p-1} - h_i) = 0$$

Θ_0 étant la fonction Θ dont tous les δ sont nuls, les u_i^x étant les valeurs de u_i en $p - 1$ points quelconques de K_y et les h_i des constantes (ne pouvant dépendre que de y). De plus on a:

$$(2) \quad u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^{2p-2} = 2h_i$$

les u_i^x représentant cette fois les valeurs de u_i aux $2p - 2$ points d'intersection de K_y avec une adjointe quelconque d'ordre $n - 3$, les points doubles étant laissés de côté.

En chacun des points doubles, on a deux valeurs de u_i , correspondant aux deux branches de K_y qui se coupent au point double. Je désignerai par d_i la somme de toutes ces valeurs de u_i dont le nombre est double de celui des points doubles. Nous remarquerons que les d_i forment un système de fonctions normales. En effet nous avons vu au § 2 qu'à toute courbe algébrique tracée sur la surface correspond un système de fonctions normales; il suffit d'appliquer ce résultat à la courbe double de la surface S .

En vertu du théorème d'Abel, la somme des u_i^x est une constante pour les points d'intersection de K_y avec une courbe d'ordre m quelconque. Appli-

quons à deux courbes d'ordre $n - 3$ à savoir une adjointe d'une part, et d'autre part $n - 3$ fois la droite $y = t = 0$. Cela va nous donner:

$$u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^{p-2} + d_i = (n - 3)(a_i^1 + a_i^2 + \dots + a_i^p)$$

les u_i^x étant ceux qui figurent dans le 1^{er} membre de (2); on aura donc:

$$2h_i = (n - 3)\Sigma a_i^x - d_i.$$

Comme les a_i^x et les d_i sont des fonctions normales, il en sera de même des $2h_i$.

Pour que le point M_p par exemple vienne en A_x , il faut que

$$v_i - a_i^x = u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^{p-1}$$

d'où:

$$\Theta_0(v_i - a_i^x - h_i) = 0.$$

Or $v_i - a_i^x - h_i$ est la moitié d'une fonction normale. Or la fonction Θ_0 ne peut s'annuler, sans que son logarithme devienne infini, ni par conséquent sans que l'une au moins des dérivées partielles du 3^e ordre de ce logarithme devienne infinie. Il faut donc que l'une des fonctions G devienne infinie; or les G sont des fonctions algébriques de y ; elles ne pourront donc devenir infinies qu'un nombre fini de fois. La courbe C ne pourra donc passer par A_x qu'un nombre fini de fois, soit q_x fois. Elle sera alors une courbe algébrique de degré

$$p + q_1 + q_2 + \dots + q_n.$$

La courbe algébrique C existe toujours; elle peut dans certains cas se réduire à un certain nombre de fois les points A_x , ou encore à des périodes. Je renvoie au mémoire cité des Annales de l'Ecole Normale pour l'étude du cas exceptionnel où la courbe C ne rencontre le plan $\frac{y}{t} = \text{const}$ qu'en $p - 1$ points mobiles (loc. cit. page 83).

La courbe C telle que nous venons de la définir est entièrement déterminée; mais à un même système de fonctions normales, correspondent une infinité de courbes algébriques rencontrant le plan $\frac{y}{t} = \text{const}$ en plus de p points mobiles (tandis que C rencontrait ce plan en p points mobiles seulement).

Nous dirons que toutes ces courbes appartiennent à une même *famille*. Mais cette classification en familles n'est pas une classification naturelle. Supposons en effet que l'on change d'axes de coordonnées de telle façon que la droite $y = t = 0$ soit remplacée par une autre droite D . La fonction v_i est la somme des u_i pour tous les points d'intersection *mobiles* de la courbe C avec un plan passant par $y = t = 0$. Les points d'intersection *immobiles*, c'est à dire les points A_x n'entrent pas en ligne de compte. Mais si l'on remplace la droite $y = t = 0$ qui rencontrait la courbe C un certain nombre de fois q_x en A_x , par une droite quelconque D , cette droite ne rencontrera pas C en général. Soient alors v_i les fonctions normales correspondant à C et à la droite $y = t = 0$; soient v'_i les fonctions normales correspondant à C et à la droite D . Lorsque D sera infiniment voisin de $y = t = 0$, v'_i ne sera pas infiniment voisin de v_i mais bien de $v_i + \Sigma q_x a_i^x$.

D'un autre côté v_i n'est déterminé qu'à une période près, de sorte que les deux systèmes de fonctions normales v_i et $v_i + \omega_{ji}$ correspondent à la même courbe C . Cela nous amène à substituer à la classification en famille une classification en *classes* qui sera cette fois une classification naturelle.

Un système de fonctions normales est caractérisé par l'ensemble des entiers λ_x qui correspondent d'après le § 3 aux différentes valeurs singulières $y = y_x$; parmi les fonctions normales nous distinguerons les périodes ω_{ji} et les fonctions a_i^j qui correspondent aux points A_j , soient alors μ_{jx} et μ'_{jx} les entiers λ_x relatifs respectivement à ω_{ji} et à a_i^j . Soient deux systèmes de fonctions normales caractérisés respectivement par les entiers λ_x et par les entiers λ'_x . Les deux systèmes et les deux courbes C correspondantes appartiendront à la même famille si l'on a

$$\lambda_x = \lambda'_x;$$

ils appartiendront à la même classe si

$$\lambda_x = \lambda'_x + \sum m_j \mu_{jx} + \sum m'_j \mu'_{jx}$$

les m et les m' étant des entiers. Pour les autres détails sur la classification des courbes algébriques, le nombre des courbes primitives et la manière de déduire toutes les courbes des courbes primitives, je renverrai au mémoire cité.

On peut se demander ce qui se passe quand on fait varier la droite D d'une manière continue. Les valeurs singulières correspondent aux plans tangents menés par D à S . Deux de ces valeurs s'échangent quand D tourne autour d'une position où elle est tangente à la surface S . En même temps, deux des points A_j et par conséquent deux des fonctions a_i^j s'échangent également.

Qu'arrive-t-il alors? L'entier λ_x qui d'après le § 3 est attaché à chacune des valeurs singulières y_x dépend de deux choses: 1° de celle des déterminations de v_i que l'on envisage; 2° de la forme ou plutôt de la disposition relative des coupures Q_x que dans le § 3 nous avons menées de y_x à l'infini dans le plan des y . Quand la droite D se déplacera d'une manière continue, le nombre λ_x demeurera constant; mais en même temps nos coupures se déformeront, et leur disposition relative pourra changer. Supposons par exemple que dans la situation initiale les coupures Q_x soient rectilignes, et dirigées suivant le prolongement du rayon vecteur qui va de l'origine à y_x ; dans une position ultérieure, les coupures Q_x auront cessé d'être rectilignes, et si on les remplace par de nouvelles coupures rectilignes Q'_x allant des nouvelles valeurs singulières à l'infini suivant le prolongement du rayon vecteur qui vient de l'origine, il pourra se faire que les nouvelles coupures Q'_x ne soient pas équivalentes aux anciennes coupures Q_x , et que les entiers λ'_x relatifs aux Q'_x ne soient pas égaux aux λ_x .

Soit D_0 une position singulière de la droite D , c'est à dire une position telle que D_0 touche S ; nous supposons que D tourne autour de D_0 en s'en écartant très peu; alors deux valeurs singulières y_1 et y_2 resteront très peu différentes l'une de l'autre et vont s'échanger entre elles. Les coupures Q_1 et Q_2 primitivement rectilignes vont se déformer d'une manière continue et seront remplacées par des coupures curvilignes aboutissant la première à y_2 , la seconde à y_1 puisque ces deux valeurs singulières se sont échangées. L'examen de cette déformation montrerait que les entiers λ_1 et λ_2 se sont échangés et

comme la courbe C n'a pas dû changer, on doit conclure que $\lambda_1 = \lambda_2$. Comme en général, en faisant varier D d'une manière continue de façon à ramener cette droite à sa position initiale, on peut passer d'une valeur singulière à une autre valeur singulière quelconque, on pourrait être tenté de conclure que tous les λ_x sont égaux entre eux. Ce serait une erreur; les entiers λ relatifs à deux coupures rectilignes aboutissant à deux valeurs singulières sur le point de s'échanger, sont égaux; mais en faisant varier D , il arrive que l'une de ces valeurs, y_2 par exemple, soit sur le point de s'échanger avec une troisième valeur singulière y_3 , les coupures Q_x ne seront pas restées rectilignes; et si nous les remplaçons par de nouvelles coupures rectilignes Q'_x , les valeurs des entiers λ se trouveront modifiées. Si alors λ_2 et λ_3 sont les entiers relatifs à Q_2 et à Q_3 , λ'_2 et λ'_3 les entiers relatifs à Q'_2 et Q'_3 , on aura, non pas $\lambda_2 = \lambda_3$, mais $\lambda'_2 = \lambda'_3$. Une étude plus détaillée des variations des ces entiers pourrait présenter quelque intérêt.

6. Équations des courbes C . Pour former l'équation de la courbe C qui correspond à un système donné v_i de fonctions normales et qui coupe K_y en p points variables, on peut employer le procédé suivant.

Soient $P = 0$, $Q = 0$ les équations de deux plans quelconques; soient $M_1, M_2, \dots, M_p$ les p points d'intersection mobiles de C et de K_y ; soit P_i et Q_i le résultat de la substitution des coordonnées de M_i dans P et dans Q ; nous envisagerons le produit suivant:

$$\frac{P_1 P_2 \dots P_p}{Q_1 Q_2 \dots Q_p} = H(y, C).$$

C'est une fonction symétrique des coordonnées de $M_1, M_2, \dots, M_p$, et comme les coefficients des deux polynômes P et Q sont arbitraires, toutes les autres fonctions symétriques peuvent s'en déduire. Ce produit $H(y, C)$ est évidemment une fonction de y , et il dépend aussi de la courbe C .

Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ les points d'intersection de $P = 0$ avec K_y ; soient $C_1, C_2, \dots, C_n$ ceux de $Q = 0$ avec K_y . Soient b_i^x et c_i^x les valeurs de l'intégrale u_i au point B_x et au point C_x , on aura du théorème d'Abel:

$$(3) \quad \Sigma b_i^x = \Sigma c_i^x = \Sigma a_i^x.$$

Considérons l'expression

$$\frac{\Pi \Theta_0(v_i - b_i^x - h_i)}{\Pi \Theta_0(v_i - c_i^x - h_i)} = G(y, C).$$

On a bien entendu $v_i = u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^p$ et le produit indiqué par le signe Π doit être étendu à tous les b_i^x pour le numérateur, à tous les c_i^x pour le dénominateur. Si l'on considère pour un instant y comme donné, et qu'on fasse varier la courbe C , c'est à dire les points $M_1, M_2, \dots, M_p$ sur la courbe K_y , on voit quelle est la condition pour que G s'annule ou devienne infini, il s'annulera quand:

$$v_i - b_i^x = u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^{p-1}$$

c'est à dire quand le point M_p viendra en B_x , c'est à dire quand l'un des points M coïncidera avec l'un des points B , c'est à dire quand l'un des P_i s'annulera. De même G deviendra infini quand l'un des Q_i s'annulera. Donc

G et H deviennent nuls ou infinis en même temps, donc ils ne diffèrent que par un facteur constant. On a donc:

$$\frac{H(y_1 C)}{G(y_1 C)} = \frac{H(y_1 C_0)}{G(y_1 C_0)},$$

C_0 étant une autre courbe; nous prendrons une courbe se réduisant à p fois le point A_1 de sorte qu'on aura pour C_0 :

$$v_i = p a_i^1 = 0,$$

$$G(y, C_0) = \frac{\Pi \Theta_0(-b_i^* - h_i)}{\Pi \Theta_0(-c_i^* - h_i)}, \quad H(y, C_0) = \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)^p$$

P_0 et Q_0 étant le résultat de la substitution des coordonnées de A_1 dans P et Q . Je me propose de montrer que si les v_i sont des fonctions normales, le rapport

$$\frac{H(y, C)}{H(y_0, C)} = \frac{G(y, C)}{G(y_0, C)}$$

est une fonction rationnelle de y ; je dis d'abord que c'est une fonction uniforme de y ; c'est ce que l'on voit immédiatement, en rappelant qu'il est égal à

$$\frac{P_1 P_2 \dots P_p}{Q_1 Q_2 \dots Q_p} \left(\frac{Q_0}{P_0}\right)^p.$$

C'est d'ailleurs une fonction algébroïde de y ; en effet il est égal à

$$\frac{\Pi \Theta_0(v_i - b_i^* - h_i) \Theta_0(-c_i^* - h_i)}{\Pi \Theta_0(v_i - c_i^* - h_i) \Theta_0(-b_i^* - h_i)}.$$

Pour les valeurs ordinaires de y , ainsi que pour les valeurs critiques des deux sortes, on verrait comme au § 3 que c'est une fonction méromorphe; il faut aussi considérer à part les valeurs pour lesquelles deux des b_i^* (ou des c_i^*) s'échangent entre elles; pour ces valeurs les b_i^* sont des fonctions algébroides de y , et comme notre expression est symétrique par rapport aux b_i^* , elle reste méromorphe en y .

Restent les valeurs singulières; on a vu que les ω_{α} , les v_i , les b_i^* , les h_i deviennent logarithmiquement infinis pour une valeur singulière, et on en a conclu au § 3 que les Θ_0 restent algébroides. Lorsque y tourne autour d'une valeur singulière, les arguments des Θ_0 peuvent augmenter d'une demi-période et en même temps les périodes peuvent être remplacées par un système équivalent.

Chacun des Θ_0 se change en $e^P \Theta$, P étant un polynôme du second degré, et Θ une des 2^{2p} fonctions Θ ; les exponentielles se détruisent et notre produit devient:

$$\frac{\Pi \Theta(v_i - b_i^* - h_i) \Theta(-c_i^* - h_i)}{\Pi \Theta(v_i - c_i^* - h_i) \Theta(-b_i^* - h_i)}.$$

Comme il doit être une fonction uniforme de y , la fonction Θ ne doit pas différer de Θ_0 . Nous avons vu à la fin du § 3 la condition pour qu'il en soit ainsi. Cela prouve donc que $2h_i$ est une fonction normale pour laquelle tous les entiers λ sont impairs.

En résumé, notre rapport est une fonction de y qui est uniforme et algébroides. Elle est donc méromorphe pour toutes les valeurs finies de y . Elle est donc rationnelle.

Ces procédés peuvent bien montrer que la courbe C est algébrique, mais non pas en faire connaître le degré; je crois donc devoir indiquer aussi une autre analyse, semblable à celle du § 2 du mémoire cité. Soit

$$u_i = \int \frac{P_i dx}{Q F'_z}$$

qui est une intégrale de 1^{ère} espèce; nous poserons:

$$U_i = \frac{\partial u_i}{\partial y} = \int \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P_i}{Q F'_z} \right) F'_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_i}{Q F'_z} \right) F'_y \right] \frac{dx}{F'_z}.$$

J'écris $\frac{\partial u_i}{\partial y}$ avec des ∂ ronds pour exprimer que j'ai différencié par rapport à y , x étant supposé constant et z lié à y et à x par l'équation de la surface (on suppose d'ailleurs $= 1$). On voit que U_i est une intégrale abélienne de 2^{de} espèce. De même la dérivée partielle $\frac{\partial U_i}{\partial y}$ est une intégrale abélienne de 2^{de} espèce; or toute intégrale abélienne de seconde ou de 1^{ère} espèce peuvent s'exprimer par une fonction linéaire de $2p$ d'entre elles, plus une fonction rationnelle; nous aurons donc:

$$\frac{\partial U_i}{\partial y} = \Sigma \varrho_{ix} u_x + \Sigma \varrho'_{ix} U_x + \Pi$$

Π étant une fonction rationnelle de x, y, z et les ϱ et les ϱ' des fonctions rationnelles de y . Supposons maintenant que le point x, y, z , limite supérieure de notre intégrale, au lieu de ce déplacer de façon que $x = \text{const}$, se déplace sur la courbe C , nous aurons:

$$\frac{du_i}{dy} = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{dx}{dy}, \quad \frac{dU_i}{dy} = \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{dx}{dy}.$$

On remarquera que $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial U_i}{\partial x}$ sont des fonctions rationnelles de x, y, z , ce sont les quantités sous le signe f des intégrales abéliennes u_i et U_i . Nous trouvons de même:

$$\frac{d^2 u_i}{dy^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{d^2 x}{dy^2}.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y}$ sont également des fonctions rationnelles de x, y, z . On en déduit:

$$(4) \quad \frac{d^2 u_i}{dy^2} - \Sigma \varrho_{ix} u_x - \Sigma \varrho'_{ix} \frac{du_x}{dy} = \frac{dx}{dy} \left[2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} - \Sigma \varrho'_{ix} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{d^2 x}{dy^2} + \Pi.$$

Le 1^{er} membre de (4) pourra s'appeler $\mathcal{A}_i(u_i)$, le symbole $\mathcal{A}_i$ ayant ainsi un sens différent de celui que nous lui avons attribué jusqu'ici. Quant au 2^d membre que nous écrirons $\Phi_i(x, y, z, \frac{dx}{dy}, \frac{d^2 x}{dy^2})$, c'est une fonction rationnelle des arguments dont elle dépend; z est d'ailleurs lié à x et y par l'équation de la surface.

On aura alors, pour notre courbe C :

$$A_i(v_i) = \Phi_i^1 + \Phi_i^2 + \dots + \Phi_i^p$$

où Φ_i^* est le résultat de la substitution dans Φ des coordonnées du point M_x à la place de x, y, z ainsi que des valeurs correspondantes des dérivées $\frac{dx}{dy}$ et $\frac{d^2x}{dy^2}$.

On a d'ailleurs

$$A_i(\omega_{xi}) = 0$$

et c'est là une forme des équations différentielles qui définissent les périodes. Quand y décrit un contour fermé, v_i augmente d'une période, soit ω_{xi} , alors $A_i(v_i)$ se change en $A_i(v_i) + A_i(\omega_{xi})$, c'est à dire qu'il ne change pas. Donc $A_i(v_i)$ est une fonction uniforme de y ; nous verrions comme au § 3 que c'est une fonction rationnelle de y de degré limité; soit $R_i(y)$ cette fonction rationnelle; nous aurons alors:

$$(5) \quad \Sigma \Phi_i^* = R_i(y).$$

Ce sont des équations différentielles qui définissent les x en fonction de y , c'est à dire qui définissent l'équation de la courbe C . Ces équations sont au nombre de p puisque l'indice i peut prendre p valeurs; et il en est de même des inconnues, $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Sachant que ces équations différentielles ont une intégrale algébrique, il ne serait pas difficile d'en déterminer le degré.

7. Élimination des valeurs critiques de la 2^{de} sorte. L'existence de fonctions normales *rationnelles* entraîne d'une part l'existence d'un système algébrique et non linéaire de courbes algébriques, d'autre part celle d'intégrales abéliennes de différentielles totales de 1^{ère} espèce. C'est là le théorème de Castelnuovo, Enriques et Severi. Je n'ai pas à reproduire ici la démonstration que j'en ai donnée dans le mémoire cité. Je me borne à rappeler le résultat. Dans ce cas, la courbe K_y possède q intégrales abéliennes de 1^{ère} espèce *réductibles*, c'est à dire ne possédant que $2q$ périodes distinctes. Soient $u_1, u_2, \dots, u_q$ ces intégrales; on sait que si une courbe de genre p admet q intégrales réductibles, elle en admettra $p - q$ autres, ne possédant que $2p - 2q$ périodes distinctes. J'appelle ces $p - q$ intégrales: $u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_p$. Cela correspond à un choix particulier des intégrales u_i ; je suppose un autre choix de ces intégrales, sans m'assujettir à aucune condition, et j'appelle alors $u'_1, u'_2, \dots, u'_p$ mes p intégrales de 1^{ère} espèce; s'il existe un système q fois infini de fonctions normales rationnelles, v'_i , nous aurons entre elles $p - q$ relations linéaires de la forme:

$$\Sigma \alpha_{xi} v'_i = 0 \quad (x = q + 1, q + 2, \dots, p)$$

les α_{xi} étant des fonctions rationnelles de y . Alors les intégrales $u_x = \Sigma \alpha_{xi} u'_i$, ($x = q + 1, q + 2, \dots, p$), seront $p - q$ intégrales réductibles. Cela entraîne l'existence d'un système algébrique q fois infini de courbes algébriques correspondant à notre système de fonctions normales rationnelles, et d'autre part l'existence de q autres intégrales réductibles $u_x = \Sigma \alpha_{xi} u'_i$, ($x = 1, 2, \dots, q$), les α_{xi} étant encore des fonctions rationnelles de y . Nous pouvons choisir ces

nouvelles fonctions α_{xi} de telle sorte que les fonctions normales $\Sigma \alpha_{xi} v'_i$ se réduisent à des constantes. Dans ce cas les intégrales u_x sont des intégrales de différentielles de 1^{ère} espèce.

C'est un autre point sur lequel je voudrais revenir avec plus de détails. J'ai énoncé à la fin du § 1 et je voudrais maintenant démontrer un théorème d'après lequel il est impossible qu'il existe des intégrales dépourvues de valeurs critiques de la 1^{ère} sorte, au sens de la fin du § 1, tant qu'il existe des valeurs critiques de la 2^{de} sorte. Soient en effet $y_1, y_2, \dots, y_r$ les valeurs critiques de la 2^{de} sorte et

$$Q = (y - y_1)(y - y_2) \cdots (y - y_r).$$

Soient $u_1, u_2, \dots, u_q$ q intégrales dépourvues de valeurs critiques de la 1^{ère} sorte, au sens de la fin du § 1, de telle sorte que pour une valeur critique quelconque de la 1^{ère} sorte on ait une relation linéaire:

$$\alpha_{q+1} v_{q+1} + \alpha_{q+2} v_{q+2} + \cdots + \alpha_p v_p = 0$$

où ne figurent que les fonctions v d'indice supérieur à q . Les fonctions v d'indice inférieur à q ne sont donc assujetties à aucune condition relative aux valeurs critiques de la 1^{ère} sorte. Nous obtiendrons donc un système de fonctions normales en écrivant:

$$v_{q+1} = v_{q+2} = \cdots = v_p = 0, \quad v_i = \frac{X_i}{Q} \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

X_i étant un polynôme arbitraire de degré ν en y ; j'appellerai γ les coefficients de ces polynômes X . Ces coefficients sont au nombre de $q(\nu + 1)$, notre système de fonctions normales est donc $q(\nu + 1)$ fois infini.

Soient maintenant $a_1, a_2, \dots, a_{\nu+1}$, $\nu + 1$ valeurs de y , ordinaires, mais d'ailleurs quelconques. Soit C la courbe correspondant à des valeurs déterminées des coefficients γ ; soient $M_{x1}, M_{x2}, \dots, M_{xp}$ les p points d'intersection mobiles de C avec le plan $y = a_x$. Soient $\xi_{1xi}, \xi_{2xi}, \xi_{3xi}$ les trois coordonnées des points M_{xi} . Les ξ sont au nombre de $3p(\nu + 1)$. Si nous les considérons comme les coordonnées d'un point N dans l'espace à $3p(\nu + 1)$ dimensions, et que nous fassions varier les γ , ce point restera sur une variété algébrique V à $q(\nu + 1)$ dimensions.

Au lieu des ξ nous pourrions considérer un système de fonctions symétriques de

$$\xi_{h \times 1}, \xi_{h \times 2}, \dots, \xi_{h \times p}.$$

Soient η ces fonctions symétriques que je prendrai au nombre de $3p(\nu + 1)$; si nous considérons les η comme les coordonnées d'un point N' dans l'espace à $3p(\nu + 1)$ dimensions, quand les η varieront, ce point décrira une variété algébrique V' à $q(\nu + 1)$ dimensions. A tout point de V' , correspondra un système de valeurs des η et inversement. Quand le point N' décrira une courbe fermée sur V' , les γ se reproduiront à une période près; je précise:

Si l'on se donne le point N' , les points M_{xi} sont déterminés: cela détermine à une période près les valeurs des v_i pour $y = a_1, y = a_2, \dots, y = a_{\nu+1}$; quand on connaît les v_i , on a des équations linéaires, dont le déterminant n'est pas nul et qui déterminent complètement les coefficients γ . Quand le point N' décrit un contour fermé, les valeurs des v_i pour $y = a_j$, par exemple augmentent d'une quantité Ω_{ji} qui est égale à une période de l'intégrale

abélienne u_i pour $y = a_j$. Les γ augmentent de ε , et les fonctions normales $\frac{X_i}{Q}$ se changent en

$$\frac{X_i}{Q} + \frac{X'_i}{Q}$$

où le polynôme X'_i diffère du polynôme X_i par la substitution des coefficients ε aux coefficients γ ; les coefficients ε seront alors déterminés par les équations:

$$\frac{X'_i}{Q} = \Omega_{ji} \quad (\text{pour } y = a_j).$$

Ces ε sont les *périodes* des γ , puisque ce sont les quantités dont les γ augmentent quand N' décrit un contour fermé.

Je dis maintenant que $\frac{X'_i}{Q}$ est, quel que soit y , une période de u_i . En effet le système des courbes C , défini par nos fonctions normales rationnelles, est un système algébrique. Donc ou bien un point N' définit un nombre fini de courbes C , ou bien une infinité *continue* de courbes C , cette dernière hypothèse doit être rejetée; nous avons vu en effet que le point N' définit les γ à une période près; elle définit donc une infinité discrète de systèmes de valeurs des γ ; et par conséquent une multiplicité *discrète*, finie ou infinie de courbes C . Maintenant, on peut changer $\frac{X_i}{Q}$ en $\frac{X_i}{Q} + \lambda \frac{X'_i}{Q}$, λ étant un entier quelconque; nous ne devons trouver ainsi qu'un nombre fini de courbes C , cela n'est possible que si, quel que soit d'ailleurs y , l'expression $\frac{X'_i}{Q}$ est égale à un sous-multiple d'une période, soit à $\frac{h}{h'} \omega_{xi}$, h et h' étant entiers. Quand on fera varier y d'une manière continue, les entiers h et h' qui ne pourraient varier que par sauts brusques, demeureront constants. Or pour $y = a_j$, $\frac{h}{h'}$ est un entier; donc cela est vrai pour toute valeur de y ; donc: $\frac{X'_i}{Q}$ est une période, quelle que soit la valeur de y . C. Q. F. D.

Pour $i = q + 1, q + 2, \dots, p$, on peut encore poser $v_i = \frac{X_i}{Q}$ mais cette fois tous les coefficients de X_i seront assujettis à être nuls. Donc les ε correspondants seront nuls également. Donc à chaque période des γ correspond une période des u_i , qui est une fonction rationnelle de y , pour $i \leq q$ et qui est nulle pour $i > q$.

Si maintenant nous nous donnons les γ , les η seront manifestement déterminés; ce sont donc des fonctions uniformes des γ . D'autre part les v_i et par conséquent les γ sont toujours finis.

Si nous représentons les parties réelles et imaginaires des $q(\nu + 1)$ coefficients γ dans l'espace à $2q(\nu + 1)$ dimensions, nous pourrions construire le *prismatoïde* des périodes. Ce prismatoïde doit être limité puisque les γ ne peuvent devenir infinis; donc il y a $2q(\nu + 1)$ périodes distinctes.

Il y aurait donc $2q(\nu + 1)$ périodes des p intégrales abéliennes u_i qui seraient nulles pour $p - q$ de ces intégrales (celles où $i > q$).

Formons le déterminant des parties réelles et imaginaires des $2p$ périodes de nos p intégrales. Dans les $2p - 2q$ dernières lignes de ce déterminant,

les éléments des $2q(\nu + 1)$ dernières colonnes seront nuls. Le déterminant sera donc nul si

$$(2p - 2q) + 2q(\nu + 1) > 2p$$

c'est à dire si ν n'est pas nul. Or nous savons qu'un semblable déterminant ne peut s'annuler pour une courbe de genre p non dégénérante; il faut donc que $\nu = 0$, c'est à dire qu'il n'y ait pas de valeur critique de la 2^{de} sorte. C'est ce que nous voulions établir.

En appliquant le raisonnement du § 1, on voit donc qu'il sera toujours possible de faire disparaître les valeurs critiques de la 2^{de} sorte.

C'est ce que nous pouvons exprimer en disant qu'on peut toujours par la courbe double faire passer p surfaces distinctes d'ordre $n - 2$, en ne considérant pas comme distinctes les surfaces $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ..., $f_n = 0$ s'il y a entre les 1^{ers} membres une relation linéaire identique dont les coefficients sont des polynômes entiers homogènes en y et t .

Über die zweimalige Integration von Funktionen zweier reeller Veränderlichen.

Von Leon Lichtenstein in Berlin.

1. In den folgenden Zeilen sollen einige Sätze über die Integration eines bestimmten Integrals in bezug auf einen Parameter, die ich vor kurzem an einer anderen Stelle veröffentlicht habe, ergänzt und erweitert werden.¹⁾

Es sei (P) irgendeine im Endlichen gelegene lineare meßbare Menge von Punkten. Ich bezeichne im folgenden mit

$$\int_L^{(P)} \varphi(x) dx \text{ und } \int_{x_1 L}^{x_2} \varphi(x) dx$$

die über die Menge (P) oder das Intervall

$$(1) \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

erstreckten Lebesgue'schen Integrale. Es sei (N) irgendeine in dem Intervalle (1) gelegene Menge vom Maße (measure) Null, $C(N)$ die zu (1) gehörige Komplementärmenge von (N) . Da die Punkte von (N) in eine abzählbar unendlich große Anzahl von Intervallen von beliebig kleiner Gesamtlänge eingeschlossen werden können, so liegen in jedem noch so kleinen Teilintervalle von (1) unendlich viele Punkte von $C(N)$.

Es sei $\varphi(x)$ eine in $C(N)$ erklärte beschränkte Funktion. Wir wählen im Innern des Intervalles (1) eine beliebige Folge wachsender Größen

$$x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n-1)}$$

und setzen der Gleichförmigkeit der Bezeichnung wegen

$$x^{(1)} = x_1, \quad x^{(n)} = x_2.$$

1) Vgl. Über die Integration eines bestimmten Integrals in bezug auf einen Parameter, Göttinger Nachrichten. 1910.