NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

POINCARÉ

Démonstration nouvelle des propriétés de l’indicatrice d’une surface

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 449-456.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__449_0>

DÉMONSTRATION NOUVELLE DES PROPRIÉTÉS DE L'INDICATRICE D'UNE SURFACE;

PAR M. POINCARÉ,
Élève de l'École Polytechnique.

I. — *Variation du rayon de courbure des sections d'une surface menées par un point de cette surface.*

Considérons d'abord les sections normales et cherchons à démontrer le théorème suivant :

Si, sur la trace de chaque section normale sur le plan tangent, on prend à partir du point de contact des longueurs proportionnelles à la racine carrée du rayon de courbure de cette section, le lieu ainsi obtenu est une conique.

Soient, en effet, A le point de contact, AN la normale. Considérons trois sections normales quelconques, et dans chacune de ces sections menons une parabole qui ait pour sommet A, pour axe AN et qui soit osculatrice à cette section ; par ces trois paraboles, je puis faire passer un paraboloïde.

Considérons l'intersection de la surface et du paraboloïde : chacune des trois paraboles, qui rencontre la surface en trois points confondus au point A, rencontrera aussi cette intersection en trois points confondus au point A.

En général, deux surfaces tangentes entre elles ont pour intersection une courbe qui offre un point double au point A ; mais, dans ce cas, les seules courbes qui rencontrent cette intersection en trois points confondus au point A sont celles qui touchent une de ses tangentes au point A. Or les trois paraboles que nous considérons ne se touchent pas; il faut donc admettre que la courbe a un point triple au point A; mais alors toutes les paraboles tracées sur le paraboloïde et ayant pour axe AN rencontreront la courbe en trois points confondus, et par suite seront osculatrices à la section correspondante.

Or le rayon de courbure d'une parabole en son sommet n'est autre que son paramètre. Si, à une distance quelconque du plan tangent, on coupe le paraboloïde par un plan perpendiculaire à l'axe, les rayons vecteurs de la section sont proportionnels à la racine carrée du paramètre de la parabole correspondante, et, par suite, du rayon de courbure de la section correspondante : donc le lieu défini dans l'énoncé est une conique que nous appellerons *indicatrice* de la surface au point A; ce qu'il fallait démontrer.

Au lieu de considérer des paraboles, on pouvait prendre des coniques tangentes à un plan donné P en un point B de AN, et l'on aurait obtenu une surface du second ordre osculatrice, tangente à P en B.

La même méthode est applicable au théorème de Meusnier :

Le rayon de courbure d'une section oblique est la projection sur son plan du rayon de courbure de la section normale qui a même trace sur le plan tangent.

Considérons, en effet, une sphère ayant pour rayon le rayon de courbure de la section normale considérée : son intersection avec la surface présentera un point double au point A. Comme son grand cercle, qui est situé dans le plan de la section normale, rencontre la surface, et, par conséquent, cette intersection en trois points confondus, il touche une des tangentes à la courbe au point A. Or il touche aussi le petit cercle situé dans le plan de la section oblique; donc ce petit cercle est dans les mêmes conditions, et par conséquent est osculateur à cette section oblique. Or le rayon du petit cercle est la projection de celui du grand cercle ; de même le rayon de la section oblique est la projection de celui de la section normale. C. Q. F. D.

Ces deux théorèmes sont des cas particuliers du théorème général suivant :

Les rayons de courbure des différentes sections passant par une droite donnée sont entre eux comme les produits des rayons vecteurs d'une certaine conique située dans un plan perpendiculaire à cette droite par leur projection sur le plan tangent.

En effet, par des raisonnements identiques aux précédents, on démontrerait que les sections de la surface ont mêmes rayons de courbure que celles d'un paraboloïde passant par le point à l'infini sur cette droite.

Or le rayon de courbure d'une parabole en un de ses points est égal au paramètre divisé par le cosinus de l'angle que fait la normale avec l'axe. Cette quantité, si l'on mène un plan CB parallèle au plan tangent, est proportionnelle au carré de CB divisé par ce même cosinus, c'est-à-dire au produit de CB par DB, D étant le point d'un plan DB perpendiculaire à AB, dont la projection sur le plan CB est le point C. Or le lieu des points D est évidemment une conique dont la projection sur le plan CB est l'intersection de ce plan et du paraboloïde ; donc le théorème est démontré.

Pour donner aux démonstrations précédentes tout leur rigueur, il est nécessaire de faire voir clairement pourquoi, si une courbe tracée sur une surface S rencontre en trois points confondus une surface Σ, elle rencontrera de même en trois points confondus l'intersection des deux surfaces, et réciproquement. En effet, on dit qu'une courbe rencontre une surface en trois points confondus lorsqu'elle passe de la région située au-dessous de cette surface à la région située au-dessus, tout en touchant cette surface. Or l'intersection des deux surfaces partage la surface S en deux régions, et il est évident que la courbe considérée doit toucher l'intersection, et de plus passer d'une de ces régions dans l'autre. Il peut se présenter trois cas : ou bien le point A est un point simple de l'intersection, et alors la courbe, pour passer d'une région dans l'autre, doit lui être osculatrice au point A ; ou bien le point A est un point double, et la courbe doit être tangente à l'une des branches de courbe ; ou bien le point A est un point triple, et la condition est remplie d'elle-même.

II. — *Propriétés de l'indicatrice. Théorème des tangentes conjuguées.*

Considérons deux surfaces tangentes entre elles en un point A, leur intersection offre un point double en ce point. Cherchons les tangentes en ce point double : traçons les indicatrices des deux surfaces en ce point, et considérons les deux diamètres communs à ces deux coniques concentriques. Si, par l'un d'eux, on mène une section normale, les deux sections déterminées dans les deux surfaces sont osculatrices ; l'une d'elles rencontre donc l'autre surface, et par suite l'intersection, en trois points confondus ; elle est donc tangente à l'une des branches de courbe, d'où il suit que :

Les tangentes au point double sont les diamètres communs aux deux indicatrices.

Supposons, en particulier, que l'une des surfaces se réduise au plan tangent ; alors son indicatrice se réduit à la droite de l'infini et les diamètres communs aux asymptotes. Donc :

Les asymptotes de l'indicatrice sont les tangentes à l'intersection de la surface et du plan tangent.

Supposons maintenant que l'on considère une développable circonscrite à la surface le long d'une courbe donnée. L'indicatrice de la développable se réduit à deux droites parallèles, et, comme les deux tangentes au point double doivent se confondre, les deux indicatrices sont bitangentes, c'est-à-dire que :

La tangente à la courbe de contact est conjuguée de la direction de la génératrice de la développable.

Ce théorème est susceptible d'une démonstration directe dans le cas où la développable se réduit à un cône.

Soient S le sommet du cône, Σ la surface, A un point de la courbe de contact. Considérons une droite quelconque passant par S et qui coupe Σ en B et en C, et considérons la surface T lieu des points M conjugués harmoniques de S par rapport à BC ; elle coupe la surface Σ suivant la courbe de contact, et la tangente à cette courbe n'est autre que l'intersection des deux plans tangents, c'est-à-dire la tangente à la trace de la surface T sur le plan tangent en A à Σ. Considérons une sécante très-voisine de SA. Il est évident que les droites SA, BA, MA, CA forment un faisceau harmonique, et, à la limite, il en sera de même de SA, des tangentes en A à la courbe BAC, c'est-à-dire des asymptotes de l'indicatrice et de la tangente à la courbe de contact ; ce qu'il fallait démontrer.

Il est facile de trouver le plan osculateur en un point de l'intersection de deux surfaces. En effet, l'intersection d'une des surfaces par ce plan osculateur doit être osculatrice à la courbe ; car elle offre évidemment même tangente et, de plus, elle traverse la courbe, puisque le plan la traverse lui-même. Donc les intersections des deux surfaces par le plan osculateur ont même rayon de courbure et, par conséquent, même centre de courbure. Or, le lieu des centres de courbure des sections passant par la tangente étant, pour chaque surface, une circonférence, l'intersection de ces deux lignes donnera le plan osculateur.

III. — *Surfaces osculatrices d'ordre supérieur. Rayon de courbure aux points coniques.*

Une méthode tout à fait identique peut servir à démontrer l'existence des surfaces osculatrices d'ordre quelconque ; appliquons-la en particulier au plan tangent, nous arriverons à démontrer que, si par deux droites qui rencontrent la surface en deux points confondus on mène un plan, toutes les droites de ce plan passant par le point A jouiront de cette propriété. Supposons maintenant qu'il existe en dehors de ce plan une droite qui rencontre la surface en deux points confondus; il est évident qu'il en sera de même de toutes les droites de l'espace passant par le point A. Ce sont ces points que l'on appelle *points coniques*.

Considérons un cône; il est évident qu'une courbe présentant un point simple au sommet ne suffit pas pour partager le cône en deux régions, comme il est aisé de s'en assurer en développant la surface du cône. Pour étudier cette question, considérons une surface ordinaire partageant l'espace en deux régions : son intersection avec le cône offrira un point d'ordre m au sommet, m étant le degré du cône. Il en résulte évidemment que, si toutes les génératrices d'un cône de degré m rencontrent une surface en n points confondus, la courbe d'intersection offre un point d'ordre mn au sommet. Il en est de même si, au lieu d'un cône, on considère une surface tangente à ce cône en son sommet.

Supposons donc que toutes les droites passant par A rencontrent la surface en deux points confondus; cherchons le lieu de celles de ces droites qui la rencontrent en trois points confondus. Considérons cinq de ces droites, elles définissent un cône du second ordre; il est évident que la courbe d'intersection du cône et de la surface a au moins cinq tangentes au sommet, ce qui prouve que chaque génératrice du cône rencontre la surface en trois points confondus, sans quoi la courbe n'aurait qu'un point quadruple au sommet. On a ainsi un point conique du second ordre, et l'on obtiendrait de même des points coniques d'ordre supérieur.

Considérons maintenant les différents plans passant par une même droite AN, et, dans chacun de ces plans, menons les paraboles osculatrices à la surface au point A et passant par le point à l'infini sur AN. Envisageons sept de ces paraboles : elles définissent une surface du quatrième ordre, car leurs traces sur un plan quelconque se composant de quatorze points y définissent une courbe du quatrième degré. Or sept des paraboles génératrices de la surface du quatrième ordre rencontrent la surface donnée en quatre points confondus ; il est clair que la courbe d'intersection présente au sommet un point d'ordre 8, et que, par suite, il en est de même de toutes les paraboles génératrices : donc, la surface donnée est osculatrice à une surface du quatrième ordre.

Maintenant, supposons que, par un point S situé sur AN, on mène un cône parallèle au cône tangent à la surface, il rencontrera la surface du quatrième ordre suivant une courbe du huitième degré ; or il est évident que des points tels que D et B, situés sur une génératrice SB et sur la parabole tangente à cette génératrice, et les autres points de l'intersection, tels que C, engendrent deux courbes distinctes et qui sont forcément chacune du quatrième ordre. Donc le lieu des points B est l'intersection du cône avec une surface du second ordre. Or le rayon de courbure de la parabole ADB est proportionnel au carré de DS, divisé par le sinus de l'angle ASD ; on peut donc représenter facilement la variation du rayon de courbure des sections de la surface.