quelconques, triplement réfléchis, décrive un fil horizontal réel ou une droite parallèle à ce fil, lorsqu'on fait tourner le grand miroir.

» 2° *Rendre l'axe optique de la lunette parallèle au limbe.* — En agissant sur la vis qui gouverne l'inclinaison de la lunette, amenez les fils horizontaux triplement réfléchis en coïncidence exacte avec les fils horizontaux réels.

» 3° *Mesurer la distance angulaire des deux fils verticaux.* — Lisez sur le limbe l'angle dont le grand miroir doit tourner pour qu'un fil triplement réfléchi, et d'abord en coïncidence avec un fil vertical réel, vienne à coïncider avec l'autre fil vertical réel.

» Ces trois opérations se font, dans notre méthode, en tenant le sextant à la main, aussi bien en mer que sur le continent. Il n'en est pas de même avec les méthodes anciennes.

» Si la lunette ou l'un des miroirs vient à se déranger, on en sera averti aussitôt par une simple inspection du réticule triplement réfléchi. On verra même si le dérangement est assez fort pour exiger une rectification nouvelle.

» Remarquons enfin que la coïncidence des deux réticules se produit *symétriquement*. Lorsqu'elle a lieu, le fil horizontal supérieur est recouvert par l'image triplement réfléchie du fil horizontal inférieur, et réciproquement; la même symétrie ou inversion a lieu pour les fils verticaux. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les groupes kleinéens.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Dans mes précédentes Communications, j'ai montré comment on pouvait former tous les groupes fuchsiens, c'est-à-dire tous les groupes discontinus formés de substitutions de la forme

$$\left(t, \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right) \tag{1}$$

(*ces substitutions étant assujetties à ne pas altérer un cercle fixe appelé* cercle fondamental). Une remarque de M. Klein, que j'ai citée dans ma dernière Note, m'a amené à rechercher tous les groupes discontinus formés par des substitutions de la forme (1) (sans condition relative à un cercle fondamental), groupes que je propose d'appeler *kleinéens*. Je vais montrer comment la pseudogéométrie de Lobatchewski, qui m'a servi à trouver les groupes fuchsiens, peut me donner la solution du problème plus général que j'aborde aujourd'hui.

» 1. J'écrirai, pour abréger, *ps* et *pst* pour pseudogéométrique et pseudogéométriquement. J'appelle *plan ps* toute sphère ayant son centre dans le plan des xy, *droite ps* l'intersection de deux plans *ps*; l'angle *ps* de deux courbes est égal à leur angle géométrique. Si l'on considère deux points quelconques a et b, on pourra par ces deux points mener une droite *ps* qui coupera le plan des xy en deux points c et d; le demi-logarithme du rapport anharmonique de a et b par rapport à c et d sera alors leur distance *ps*. J'appelle *polygone ps* une portion de plan *ps* limitée par des droites *ps*, *polyèdre ps* une portion de l'espace située tout entière au-dessus du plan des xy et limitée par des plans *ps* ou par le plan des xy. Deux figures sont *pst* égales quand on peut établir entre elles une correspondance point par point et de telle sorte que les distances *ps* soient conservées. Grâce à ces définitions, les théorèmes de Lobatchewski trouvent leur application concrète (voir les travaux de M. Klein sur ce sujet dans les *Mathematische Annalen*).

» 2. Considérons une substitution de la forme (1). Soit

$$t = x + y\sqrt{-1},$$

et considérons x et y comme les coordonnées d'un point dans un plan. La substitution (1) transformera tous les cercles en cercles. Prenons maintenant dans l'espace un point A; par ce point, je puis faire passer une infinité de plans *ps* qui viendront couper le plan des xy suivant différents cercles C. Ces cercles seront changés par la substitution (1) en d'autres cercles C′. Toutes les sphères qui ont même centre et même rayon que ces cercles C′ viendront se couper en un même point B. A la substitution (1) correspondra dans l'espace une transformation (A, B) qui changera toute figure de l'espace en une figure *pst* égale. A un groupe discontinu de substitutions (1) va donc correspondre un groupe discontinu de transformations (A, B).

» 3. Pour construire tous les groupes discontinus de transformations (A, B), il faut diviser l'espace en polyèdres *ps*, *pst* égaux entre eux. Envisageons un de ces polyèdres *ps*; je distinguerai parmi ses faces celles de la première sorte, qui sont formées de plans *ps*, et celles de la seconde sorte, formées de portions du plan xy; les faces de la première sorte pourront être distribuées en paires, comme cela a lieu pour les polygones curvilignes envisagés dans la théorie des groupes fuchsiens; deux faces appartenant à la même paire seront dites *conjuguées* et devront être *pst* égales entre elles. Les arêtes pourront être distribuées en cycles de la façon suivante. Partant d'une arête quelconque, on considère l'une des faces passant par cette arête, puis la face conjuguée, et dans cette face conjuguée l'arête homologue de celle qui a servi de point de départ, puis une autre face passant par cette arête, puis la face conjuguée, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on retombe sur l'arête qui a servi de point de départ. Cela posé, on trouve une condition nécessaire et suffisante pour que le polyèdre *ps* considéré donne naissance à un groupe discontinu. Il faut que la somme des dièdres correspondant aux diverses arêtes d'un même cycle soit une partie aliquote de 2π.

» 4. Les considérations qui précèdent permettent d'obtenir tous les groupes discontinus de transformations (A, B). Pour que le polyèdre *ps* que nous venons d'envisager donne naissance à un groupe discontinu de substitutions (1), il faut, en outre, que l'une au moins des faces de ce polyèdre soit une portion du plan des xy.

» 5. Appliquons ces principes à un exemple simple. Je suppose un polygone curviligne dont les côtés sont des arcs de cercles, et je me demande à quelle condition ce polygone engendrera un groupe discontinu par l'opération que M. Klein appelle la *Vervielfältigung durch Symmetrie*. Je prolonge les arcs de cercles de façon à former des cercles complets, puis j'envisage les sphères qui ont même centre et même rayon que ces cercles. Ces sphères limiteront un certain polyèdre *ps* dont tous les dièdres devront être des parties aliquotes de π. Les principes qui ont permis de déduire de l'existence des groupes fuchsiens celle des fonctions fuchsiennes, thétafuchsiennes et zétafuchsiennes sont applicables aux nouveaux groupes kleinéens. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur un moyen général de déterminer les relations entre les constantes contenues dans une solution particulière et celles que contiennent les coefficients rationnels de l'équation différentielle correspondante.* Note de M. G. **Dillner** [1].

» En appliquant cette propriété d'une identité rationnelle à chacune des identités (3), on aura, dans les conditions (6) et (7) et dans celles qui

[1] Voir *Comptes rendus*, t. XCII, p. 1498.

COMPTES RENDUS

HEBDOMADAIRES

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PUBLIÉS,

CONFORMÉMENT A UNE DÉCISION DE L'ACADÉMIE

En date du 13 Juillet 1835,

PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME QUATRE-VINGT-TREIZIÈME.

JUILLET — DÉCEMBRE **1881**.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1881