M. Émile VILLARET

à Clermont-Ferrand.

SUR LE DODÉCAÈDRE RÉGULIER

— *Séance du 16 avril 1881.* —

M. H. POINCARÉ

Ingénieur des Mines, Professeur à la Faculté de Caen.

SUR LES INVARIANTS ARITHMÉTIQUES

— *Séance du 15 avril 1881.* —

Je vais chercher d'abord à exprimer les fonctions doublement périodiques à l'aide d'intégrales définies. J'envisagerai, à cet effet, la fonction suivante:

$$H_1(x, \alpha, \beta, a, b,) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[\frac{1}{x - \alpha - am - bn} - \frac{1}{x - \beta - am - bn} \right]$$

définie par M. Appell, et qui est aux fonctions elliptiques ce qu'est à cot x la fonction $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

Je dis qu'elle peut s'exprimer à l'aide d'une intégrale définie. Supposons que $x - \alpha - am - bn$ ait sa partie réelle négative. On aura donc identiquement:

$$\frac{1}{x - \alpha - am - bn} = \int_0^\infty e^{z(x - \alpha - am - bx)} dz.$$

Si donc, pour toutes les valeurs de m et de n, $x - \alpha - am - bn$ et $x - \beta - am - bn$ ont leurs parties réelles négatives, on aura:

$$H_1 = \int_0^\infty \sum \sum \left[e^{z(x-\alpha-am-bn)} - e^{z(x-\beta-am-bn)} \right] dz,$$

ou:

$$H_1 = \int \left[e^{z(x-\alpha)} - e^{z(x-\beta)} \right] \sum_{m=o}^{m=\infty} e^{-azm} \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-bzn} dz.$$

ou enfin:

$$H_1 = \int_0^\infty \left[e^{z(x-\alpha)} - e^{z(x-\beta)} \right] \frac{e^{-bz} dz}{\left(1-e^{-az}\right)\left(1-e^{-bz}\right)}.$$

H_1 s'exprime donc à l'aide d'une intégrale définie, pourvu que:

partie réelle $[x - \alpha - am - bn] < 0$

partie réelle $[x - \beta - am - bn] < 0$,

ce qui exige:

partie réelle de $a > 0$ partie réelle de $b > 0$

partie réelle $(x - \alpha - b) < 0$ partie réelle $[x - \beta - b) < 0$.

On aura de même:

$$H_1 = \lambda \int_0^\infty \left[e^{\lambda z(x-\alpha)} - e^{\lambda z(x-\beta)} \right] \frac{e^{-\lambda bz} dz}{\left(1-e^{-\lambda az}\right)\left(1-e^{\lambda bz}\right)},$$

si λ est un nombre tel que:

partie réelle de $\lambda a > 0$ partie réelle de $\lambda b > 0$

partie réelle de $\lambda(x - \alpha - b) < 0$ partie réelle $\lambda(x - \beta - b) < 0$.

Pour qu'on puisse trouver un pareil nombre λ, il faut et il suffit que le polygone convexe circonscrit aux quatre points

$$a, \quad b, \quad b + \alpha - x, \quad b + \beta - x$$

n'enveloppe pas l'origine.

Envisageons la fonction doublement périodique à deux infinis :

$$F(x,\alpha,\beta)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left[\frac{1}{x-\alpha-am-bn}-\frac{1}{x-\beta-am-bn}\right]$$

on aura identiquement :

$$F=\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}+H_1(a,b)+H_1(b,-a)+H_1(-a,-b)+H_1(-b,a)$$

Les quatre fonctions H_1 qui entrent dans l'expression de F s'exprimeront par une intégrale définie, pourvu qu'aucun des quatre quadrilatères convexes :

1°	a	b	$b+\alpha-x$	$b+\beta-x$
2°	b	$-a$	$-a+\alpha-x$	$-a+\beta-x$
3°	$-a$	$-b$	$-b+\alpha-x$	$-b+\beta-x$
4°	$-b$	a	$a+\alpha-x$	$a+\beta-x$

n'enveloppe l'origine ; c'est ce qui arrivera si les points $\alpha-x$ et $\beta-x$ sont intérieurs au parallélogramme Q qui a pour sommets :

$$\frac{a+b}{2}\qquad\frac{a-b}{2}\qquad\frac{-a-b}{2}\qquad\frac{b-a}{2}.$$

Or on ne change pas la fonction F en ajoutant *à* α ou *à* β des multiples des périodes ; on pourra donc toujours disposer de α et de β de telle sorte que $\alpha-x$ et $\beta-x$ soient intérieurs à Q.

La fonction F peut donc toujours être représentée par une intégrale définie.

Il en sera de même de $\frac{d^m F}{d\alpha^m}$ et on en obtiendra l'expression par voie de différentiation sous le signe $\int$.

Or toute fonction doublement périodique s'exprime linéairement à l'aide de fonctions telles que F et de fonctions telles que $\frac{d^m F}{d\alpha^m}$.

Donc toute fonction doublement périodique s'exprime par une intégrale définie. Les limites d'intégration sont 0 et ∞. *La fonction sous le signe* $\int$ *est rationnelle, par rapport à diverses puissances entières de* z *et à diverses exponentielles de la forme* e^{zx} *et* $e^{\lambda\xi}$.

Considérons, en particulier, la fonction :

$$f(x)=\sum \frac{1}{(x-am-bn)^2}.$$

En posant :

$$\frac{a}{b}=q \qquad \sum \frac{1}{(qm+n)^{2k}}=\varphi_k(q),$$

on aura :

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{b^2}\varphi_1(q)+\frac{x^2}{b^4}\varphi^2(q)-\frac{x^4}{b^6}\varphi_3(q)+$$

d'où il suit que la fonction $\varphi_k(q)$ peut être représentée par une intégrale définie de la forme :

$$\int_0^\infty z^{2k-1}\mathrm{F}\,dz$$

où F est une fonction rationnelle de diverses exponentielles de la forme $e^{\lambda z}$ et $e^{\lambda q z}$.

La fonction $\varphi_k(q)$ est holomorphe, toutes les fois que q n'est pas réel. Elle jouit des deux propriétés suivantes :

1° Si l'on change q en

$$\frac{\alpha q+\beta}{\gamma q+\delta},$$

où α, β, γ, δ sont des entiers tels que $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, $\varphi_k(q)$ se change en

$$(\gamma q+\delta)^{2k}\varphi_k(q).$$

2° Quand la partie imaginaire de q est positive $\varphi_k(q)$ peut se développer en série et on a :

$$\varphi_k(q)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{2k}}+\frac{(2i\pi)^{2k}}{1.2\ldots(2k-1)}\sum_{m=1}^{m=\infty}u_m e^{2miq}$$

Dans cette formule, u_m représente la somme des puissances $(2k-1)^{es}$ des diviseurs de m.

Voyons maintenant quel peut être le rôle arithmétique de ces fonctions $\varphi_k(q)$ dont nous venons de donner deux expressions, l'une par une intégrale définie, l'autre par une série convergente.

On appelle invariant algébrique de la forme $F(x, y)$ toute fonction des coefficients de cette forme qui ne change pas quand on fait :

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \alpha x' + \delta y'$$

où α, β, γ, δ sont des nombres *quelconques* tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

De même, on appellera invariant arithmétique de F toute fonction des coefficients de cette forme qui ne changera pas quand on fait :

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

où α, β, γ, δ sont des nombres *entiers* tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Une forme linéaire $a x + b y$ n'aura pas d'invariant algébrique ; elle aura, au contraire, des invariants arithmétiques ; par exemple, les séries convergentes :

$$\sum \frac{1}{(am+bn)^{2k}} = \frac{1}{b^{2k}} \varphi^k \left(\frac{a}{b}\right).$$

Les invariants arithmétiques peuvent servir à reconnaître si deux formes quadratiques définies F et F' de même déterminant sont équivalentes.

Soit :

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2 = mod\left[x\sqrt{a} + y\,\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{a}}\right]$$

$$F' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 = mod\left[x'\sqrt{a'} + y'\,\frac{b'+\sqrt{b'^2-a'c'}}{\sqrt{a'}}\right]$$

On aura : $b^2 - ac = b'^2 - a'c' = D$.

Si les deux formes sont équivalentes, on aura pour des valeurs entières de α, β, γ, δ telles que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$:

(1) $a(\alpha x' + \beta y')^2 + 2b(\alpha x' + \beta y')(\gamma x' + \delta y') + c(\gamma x' + \delta y')_2 = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$.

ou bien :

(1 *bis*) $$(\alpha x' + \beta y')\sqrt{a} + (\gamma x' + \delta y')\,\frac{b+\sqrt{b_2-ac}}{\sqrt{a}} =$$

$$= \lambda\left[x'\sqrt{a'} + y'\,\frac{b'+\sqrt{b'^2-a'c'}}{\sqrt{a'}}\right].$$

On en conclut:

$$\frac{1}{a}\varphi_1\left(\frac{b+i\sqrt{D}}{a}\right)=\frac{1}{a'\lambda^2}\varphi_1\left(\frac{b'+i\sqrt{D}}{a'}\right).$$

On en tire:

$$(2)\qquad \lambda=\sqrt{\frac{a\ \varphi_1\left(\frac{b'+i\sqrt{D}}{a'}\right)}{a'\ \varphi_1\left(\frac{b+i\sqrt{D}}{a}\right)}}.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires des coefficients de x' et de y' dans les deux membres de (1 *bis*), on trouve en posant:

partie réelle de $\lambda=\mu$ partie imaginaire de $\lambda=\nu$.

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\alpha\, a+\gamma\, b=\mu\sqrt{a\,a'}\\ &\sqrt{a'}\,(\beta\, a+\delta\, b)=(\mu\, b'-\nu\sqrt{D})\sqrt{a}\\ &\gamma\sqrt{D}=\nu\sqrt{a'\,a}\\ &\delta\sqrt{Da'}=(\nu\, b'+\mu\sqrt{D})\sqrt{a}\,. \end{aligned}$$

Les équations (2) et (3) donnent les valeurs de α, β, γ, δ, si l'on *suppose* que F et F′ sont équivalentes.

Pour reconnaître si F et F′ sont équivalentes, on opèrera donc de la façon suivante:

On calculera:

$$\varphi_1\left(\frac{b+i\sqrt{D}}{a}\right)\quad \text{et}\quad \varphi_1\left(\frac{b'+i\sqrt{D}}{a'}\right)$$

avec une approximation suffisante pour que les équations (2) et (3) donnent α, β, γ, δ à moins de $\frac{1}{2}$ près. Comme ces nombres doivent être entiers, on connaîtra alors *exactement* les valeurs qu'ils doivent avoir dans l'hypothèse de l'équivalence.

Si en donnant à α, β, γ, δ les valeurs ainsi calculées, l'identité (1) est vérifiée, les deux formes sont équivalentes ; si l'identité n'est pas vérifiée, on est certain que les deux formes ne sont pas équivalentes.

De même que les formes linéaires, les formes de degré plus élevé et les systèmes de formes ont des invariants arithmétiques. Considérons la forme quadratique :

$$ax^2 + 2\,bxy + cy^2 \tag{4}$$

où

$$b^2 - ac = \mathrm{D}.$$

Si $\mathrm{D} < 0$, elle aura pour invariant arithmétique la série :

$$\sum \frac{1}{(am^2 + 2\,bmn + cn^2)^{\mathrm{k}}}. \tag{5}$$

k est un entier quelconque et l'on donne à m et à n sous le signe $\sum$ tous les systèmes de valeurs entières, sauf le système

$$m = n = 0.$$

Soit maintenant $\mathrm{D} > 0$; soient t et u les deux plus petits nombres entiers tels que :

$$t^2 - \mathrm{D}\,u^2 = 1.$$

Soit

$$\lambda = \mathrm{L}\left(t + u\sqrt{\mathrm{D}}\right) \qquad -\lambda = \mathrm{L}\left(t - u\sqrt{\mathrm{D}}\right).$$

La forme (4) aura pour invariant arithmétique la série :

$$\sum \frac{1}{(am^2 + 2\,bmn + cn^2)^{\mathrm{k}}}. \tag{6}$$

k est un entier quelconque et l'on donne à m et à n sous le signe $\sum$ tous les systèmes de valeurs entières tels que :

$$m > 0 \qquad n > \text{ou} = 0 \qquad \frac{m}{n} < \frac{u}{t}.$$

Le système des deux formes linéaires :

$$\left(\alpha + \alpha'\sqrt{\mathrm{D}}\right)x + \left(\beta + \beta'\sqrt{\mathrm{D}}\right)y$$

$$\left(\alpha - \alpha'\sqrt{\mathrm{D}}\right)x + \left(\beta - \beta'\sqrt{\mathrm{D}}\right)y$$

a pour invariant arithmétique la série:

$$(7)\qquad \Theta(\alpha, \alpha', \beta, \beta') = \frac{1}{\sum\left[\left(\alpha, + \alpha'\sqrt{D}\right)m + \left(\beta + \beta'\sqrt{D}\right)n\right]^{k+\frac{\lambda}{2i\pi}}\left[\left(\alpha - \alpha'\sqrt{D}\right)m + \left(\beta - \beta'\sqrt{D}\right)n\right]^{k-\frac{\lambda}{2i}}}$$

k est un nombre entier quelconque et l'on donne à m et à n les mêmes valeurs que dans la série (6). Remarquons que l'expression de Θ, dans laquelle entrent des exposants imaginaires, pourrait offrir quelque ambiguité ; nous l'éviterons de la façon suivante :

Soit

$$M = \left(\alpha + \alpha'\sqrt{D}\right)m + \left(\beta + \beta'\sqrt{D}\right)n$$

$$N = \left(\alpha - \alpha'\sqrt{D}\right)m + \left(\beta - \beta'\sqrt{D}\right)n.$$

Si M est positif, on posera:

$$\mu = \text{valeur arithmétique de } \log M.$$

Si M est négatif, on posera:

$$\mu = \text{valeur arithmétique de } \log(-M) + i\pi.$$

On aura de même, suivant les cas:

$$\nu = \text{valeur arithmétique de } \log N,$$

$$\text{où}\quad \nu = \text{valeur arithmétique de } \log(-N) + i\pi.$$

On posera alors:

$$\Theta = \sum \frac{1}{e^{\mu\left(k + \frac{\lambda}{2i\pi}\right) + \nu\left(k - \frac{2i\pi}{\lambda}\right)}}.$$

Les séries (5), (6), (7), sont susceptibles d'être représentées par des intégrales doubles de la forme:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty F\, dz\, dt.$$

où F est une fonction rationnelle de diverses puissances (entières ou fractionnaires, réelles ou imaginaires) de z, de t, de e^z et de e^t.

De même que la fonction φ_1 pouvait servir à reconnaître l'équivalence de deux formes quadratiques définies, de même la fonction Θ $(b, 1, a, 0)$ pourra servir, par le même moyen, à reconnaître l'équivalence de deux formes indéfinies.

M. OLTRAMARE

Professeur à Genève.

NOTE SUR LA SÉRIE QUI RÉSULTE DU DÉVELOPPEMENT DE $\frac{x}{e^x - 1}$ SUIVANT LES PUISSANCES DE x

---

— *Séance du 16 avril 1881.* —

Nous avons été conduit, dans nos recherches sur les séries infinies, à considérer tout particulièrement le développement de l'expression $\frac{x}{e^x - 1}$ suivant les puissances de sa variable.

L'importance de cette question d'analyse, par les conséquences qu'on en peut déduire, nous engage à faire connaître les résultats auxquels nous sommes parvenu.

§ 1. Soit e la base des logarithmes népériens et posons :

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + A_2 x^2 - A_4 x^4 + \dots + A_{4n-2} x^{4n-2} - A_{4n} x^{4n} + \dots \qquad (1)$$

nous aurons généralement :

$$A_{2m} = \frac{a_m}{1.2.3\dots 2m}$$

en désignant par a_1, a_2, a_3, ... la suite des nombres de Bernoulli, donnés analytiquement par l'intégrale : (2)

$$a_m = \frac{m}{2^{2m-1}\pi^{2m}} \int_0^\infty \frac{z^{2m-1} \alpha z}{e^z - 1}$$

et représentés en valeurs numériques par :

$$a_1 = \frac{1}{6} \qquad a_9 = \frac{43867}{798}$$

$$a_2 = \frac{1}{30} \qquad a_{10} = \frac{174611}{330}$$

$$a_3 = \frac{1}{42} \qquad a_{11} = \frac{854513}{138}$$

$$a_4 = \frac{1}{30} \qquad a_{12} = \frac{236364091}{2730}$$

$$a_5 = \frac{5}{66} \qquad a_{13} = \frac{8553103}{6}$$

$$a_6 = \frac{691}{2730} \qquad a^{14} = \frac{23749461029}{870}$$

$$a_7 = \frac{7}{6} \qquad a_{15} = \frac{8615841276005}{14322}$$

$$a_8 = \frac{3617}{510} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cela posé, nous énoncerons les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *La série représentée par le second membre de l'égalité* (1) *est une série convergente pour toute valeur de* x, *positive ou négative, inférieure à* 2π.

THÉORÈME II. — *Cette série est une série mixtopériodique pour la valeur de* $x = 2\pi$.

THÉORÈME III. — *Si nous considérons seulement les* $2n+1$ *premiers termes du second membre de l'égalité* (1), *nous aurons pour toute valeur de* x :

$$\frac{x}{e^x-1} < 1 - \frac{2}{x} + A_2 x^2 - \ldots + A_{4n-2} x^{4n-2} \tag{3}$$

THÉORÈME IV. — *Si nous ne considérons que les* $2n$ *premiers termes du second membre de l'égalité* (1), *nous aurons pour toute valeur de* x :

$$\frac{x}{e^x-1} > 1 - \frac{x}{2} + A_2 x^2 - \ldots - A_{4n-4} x^{4n-4} \tag{4}$$

§ 2. Nous pouvons d'abord faire remarquer que, si ces inégalités (3) et (4) ont lieu pour toutes les valeurs réelles et positives de x, elles auront également lieu pour toutes les valeurs réelles et négatives.

En effet, si nous posons pour abréger

$$\beta(x) = 1 + A_2 x^2 - A_4 x^4 + \ldots \quad A_{4n-1} x^{4n-1}$$

$$\Psi(x) = 1 + A_2 x^2 - A_4 x^4 + \ldots \quad - A_{4n-4} x^{4n-4},$$

nous aurons, par hypothèse :

$$\frac{x}{e^x - 1} < \beta(x) - \frac{x}{2} \tag{5}$$

$$\frac{x}{e^x - 1} > \Psi(x) - \frac{x}{2} \tag{6}$$

et en changeant x en $-x$, nous obtiendrons, en remarquant que $\beta(x) = \beta(-x)$ et $\Psi(x) = \Psi(-x)$, les relations :

$$\frac{-x}{e^{-x} - 1} > \beta(x) + \frac{x}{2} \tag{7}$$

$$\frac{x}{e^{-x} - 1} < \Psi(x) + \frac{x}{2} \tag{8}$$

selon que l'inégalité (3) ou l'inégalité (4) n'est pas satisfaite pour une valeur négative de x.

Les relations (5) et (7) nous donnent :

$$\beta(x) < \frac{x(e^x+1)}{2(e^x-1)} \qquad \beta(x) > \frac{x(e^x+1)}{2(e^x-1)}$$

inégalités qui ne peuvent subsister simultanément.

On obtiendra le même résultat, pour la fonction $\Psi(x)$, à l'aide des formules (6) et (8).

Nous pouvons donc nous borner à reconnaître l'exactitude de nos théorèmes dans le cas où x a une valeur réelle et positive.

§ 3. Considérons la valeur de S_m donnée par la formule

$$S_m = \frac{1 + \frac{1}{2^{2m+2}} + \frac{1}{3^{2m+2}} + \cdots}{1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \cdots}$$

Il est facile de reconnaître que cette quantité restera toujours inférieure à l'unité, dont elle diffère d'autant moins que m sera plus grand.

En effet, si nous remarquons que

$$1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\dots=\frac{2^{2m-1}}{1.2.3\ldots 2m}a^m\pi^{2m},$$

nous pourrons en déduire la relation :

$$S_m=\frac{(2\pi)^2}{(2m+1)(2m+2)}\,\frac{a^{m+1}}{a_m}; \tag{9}$$

et en faisant dans cette formule $m=1, 2, 3, \dots$ nous obtiendrons les valeurs numériques suivantes, qui convergent rapidement vers l'unité :

$$S_1=\frac{\pi^2}{15}=0{,}6579736$$

$$S_2=\frac{2\pi^2}{21}=0{,}9399621$$

$$S_3=\frac{\pi^2}{10}=0{,}9869602$$

$$S_4=\frac{10\pi^2}{99}=0{,}9969299$$

$$S_5=\frac{691\pi^2}{6825}=0{,}9992519$$

$$S_6=\frac{70\pi^2}{691}=0{,}9998150$$

$$S_7=\frac{3617\pi^2}{35700}=0{,}9999539$$

$$S_8=\frac{438670\pi^2}{4329549}=0{,}9999874$$

$$S_9=\frac{1222277\pi^2}{12063425}=0{,}9999932$$

$$S_{10}=\frac{8545130\pi^2}{84337113}=0{,}9999991.$$

L'égalité (9), combinée avec la relation (2), donne :

$$A_{2m+2}=\frac{S_m}{(2\pi)^2}A_{2m}$$

et, par conséquent, nous aurons :

$$A_{4p-2}=\frac{S_1S_2S_3\ldots S_{2p-2}}{(2\pi)^{4p-4}}A_2;$$

à l'aide de cette valeur, nous pourrons écrire l'égalité (1) sous la forme :

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+A_2x^2\left\{1=S_1\left(\frac{x}{2\omega}\right)^2+S_1S_2\left(\frac{x}{2\omega}\right)^4-+S_1S_2..S_{2n-2}\left(\frac{x}{2\omega}\right)^{4p-4}-..\right\} \quad (12)$$

Nous pouvons conclure de cette identité que le second membre de l'égalité (1) est une série convergente lorsque x a une valeur inférieure à 2π, puisque, dans ce cas, les termes alternativement positifs et négatifs vont en décroissant et ont 0 pour limite.

Nous reconnaissons également, en supposant qu'on donne à x une valeur inférieure à 2π, que :

$$\frac{x}{e^x-1}<1-\frac{x}{2}+A_2x^2-A_4x^4+.. \quad +A_{4n-2}x^{4n-2}$$

en prenant les $2n+1$, premiers termes de la série; et que

$$\frac{x}{e^x-1}>1-\frac{x}{2}+A_2x^2-A_4x^4+.. \quad -A_{4n-4}x^{4n-4}$$

en prenant les $2n$ premiers termes de la série (n étant supérieur à l'unité lorsque x est négatif).

La série précédente présente une circonstance remarquable : c'est que, lorsqu'on y fait $x=2\pi$, le second membre n'est plus une série convergente proprement dite; elle se transforme en une série mixtopériodique.

Nous avons en effet :

$$S_1S_2S_3...S_m=\frac{1+\frac{1}{2^{2m+2}}+\frac{1}{3^{2n+2}}+..}{1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+..}=\frac{6}{\pi^2}\left\{1+\frac{1}{2^{2m+2}}+\frac{1}{3^{2m+2}}+..\right\}$$

formule qui montre que, en donnant à m des valeurs de plus en plus grandes, le produit $S_1S_2..S_m$ converge rapidement vers la limite $\frac{6}{\pi^2}$; par suite, la série :

$$1-S_1+S_1S_2-S_1S_2S_3+ .. +S_1S_2..S_{2n-2}- ...$$

sera une série mixtopériodique dont la valeur est exprimée par l'une ou l'autre des deux expressions :

$$\frac{3}{\pi^2}+1-S_1+S_1S_2(1-S_3)+S_1S_2S_3S_4(1-S_5)+..$$

$$-\frac{3}{\pi^2}+1-S_1(1-S_2)-S_1S_2S_3(1-S_4)-..$$

qui donnent l'une et l'autre une valeur peu différente de

$$0,654535 = \left(\frac{2\pi}{e^2-1} + \omega - 1\right)\frac{3}{\pi^2}.$$

Il nous reste, pour démontrer les théorèmes que nous avons en vue, à reconnaître que les inégalités (3) et (4) ont encore lieu pour toute valeur de x positive et supérieure à 2π.

§ 4. Comme l'inégalité

$$\frac{x}{e^x-1} < 1 - \frac{x}{2} + A_2x^2 - A_4x^4 + \ldots + A_{4n-2}x^{4n-2}$$

est satisfaite pour des valeurs de x suffisamment grandes, s'il existe une valeur de x pour laquelle nous ayons cette inégalité en sens inverse, il devra, nécessairement, exister une valeur positive de x satisfaisant à l'équation

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + A_2x^2 - \ldots + A_{4n-2}x^{4n-2} \tag{13}$$

Si nous remarquons que l'égalité (1) peut s'écrire :

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + A_2x^2 - \ldots + A_{4n-2}x^{4n-2} - \ldots} = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \ldots$$

nous aurons, en posant pour abréger :

$$\beta(m) = \frac{1}{1.2..(m+1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{1.2..m} + A_2\frac{1}{1.2...(m-1)} - \ldots + A_{m-2}\frac{1}{1.2.3},$$

la suite d'équations :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2}\frac{1}{1.2} + A_2 = 0\\
&\frac{1}{1.2.3.4} - \frac{1}{2}\frac{1}{1.2.3} + A_2\frac{1}{1.2} = 0\\
&\frac{1}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{2}\frac{1}{1.2.3.4} + A_2\frac{1}{1.2.3} - A_4 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}(a)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\beta(4n)-A_{4n}=0\\
&\beta(4n+1)-A_{4n}\frac{1}{1.2}+A_{4n+2}=0\\
&\beta(4n+2)-A_{4n}\frac{1}{1.2.3}+A_{4n+2}\frac{1}{1.2}=0\\
&\beta(4n+3)-A_{4n}\frac{1}{1.2.3.4}+A_{4n+2}\frac{1}{1.2.3}-A_{4n+4}=0\\
&\beta(4n+4)-A_{4n}\frac{1}{1.2.3.4.5}+A_{4n+2}\frac{1}{1.2.3.4}-A_{4n+4}\frac{1}{1.2}=0\\
&\beta(4n+5)-A_{4n}\frac{1}{1.2.3.4.5.6}+A_{4n+2}\frac{1}{1.2.3.4.5}-A_{4n+4}\frac{1}{1.2.3}+A_{4n+6}=0
\end{aligned}\right\}(a)
$$

Cela posé, si, au lieu de l'égalité (1), nous considérons l'équation (13), nous pourrons l'écrire sous la forme :

$$
\beta(4n)x^{4n}+\beta(4n+1)x^{4n+1}+\beta(4n+2)x^{4n+2}+\ldots=0, \tag{15}
$$

équation qui n'admet pas d'autre racine positive que $x=0$, ainsi que nous allons le reconnaître.

Nous avons, en effet, à l'aide des relations (a) :

$$
\begin{aligned}
&\beta(4n)=A_{4n}\\
&\beta(4n+1)=A_{4n}\left(\frac{1}{2}-\frac{S_{2n}}{(2\pi)^2}\right)\\
&\beta(4n+2)=\frac{A_{4n}}{1.2}\left(\frac{1}{3}-\frac{S_{2n}}{(2\pi)^2}\right)\\
&\beta(4n+3)=\frac{A_{4n}}{1.2.3}\left(\frac{1}{4}-\frac{S_{2n}}{(2\pi)^2}\right)+A_{4n+4}\\
&\beta(4n+4)=\frac{A_{4n}}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{5}-\frac{S_{2n}}{(2\pi)^2}\right)+\frac{1}{2}A_{4n+4}\\
&\beta(4n+5)=\frac{A_{4n}}{1.2.3.4.5}\left(\frac{1}{6}-\frac{S_{2n}}{(2\pi)^2}\right)+A_{4n+4}\left(\frac{1}{6}-\frac{S_{2n+2}}{(2\pi)^2}\right);
\end{aligned}
$$

formules qui permettent de conclure que les coefficients $\beta(4n)$, $\beta(4n+1)$, $\beta(4n+2)$, $\beta(4n+3)$, $\beta(4n+4)$, $\beta(4n+5)$ ont des valeurs positives, car, quelle que soit n, S_{2n} est plus petit que 1 et π est plus grand que 3.

Si nous posons :

$$
1.2.3\ldots(m+1)\beta(m)=\Psi(m),
$$

nous verrons, en posant :

$$\Psi(m)=1-\frac{m+1}{2}+a_2\frac{m(m+1)}{1.2}-a_2\frac{(m-2)(m-1)m(m+1)}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$\ldots+a_{2n-1}\frac{(m-4n+4)(m-4n+5)}{1.2.3..\ (4n-2)},$$

que l'équation (15) peut se mettre sous la forme :

$$\Psi(4n)x^{4n}+\Psi(4n+1)x^{4n+1}+\ldots\quad=0.$$

Il résulte de là que, si nous reconnaissons que cette fonction $\Psi(m)$ est positive pour toute valeur de m supérieure à $4n+5$, il en sera de même de la fonction $\beta(m)$, et, par suite, l'équation (15) aura tous ses coefficients positifs et ne pourra être satisfaite qu'en posant $x=0$.

Si nous admettons d'abord que $n=1$, nous aurons :

$$\Psi(m)=1-\frac{m+1}{2}+a_1\frac{m(m+1)}{1.2},$$

expression qui est positive pour toute valeur de $m>9=4n+5$.

L'inégalité (3) est donc démontrée lorsqu'on ne considère que trois termes dans le second membre.

Si nous supposons $n=2$, nous aurons, en admettant que l'on représente par M la somme des termes qui précèdent les deux derniers,

$$\Psi(m)=\text{M}+\frac{(m-2)(m-1)m(m+1)}{1.2.3.4}a_2\left\{\frac{a_2}{a_1}\frac{(m-4)(m-3)}{5.6}-1\right\}.$$

Mais nous avons, à l'aide de la formule (9) :

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{5.6.\text{S}_2}{(2\pi)^2}$$

et, par suite :

$$\Psi(m)=\text{M}+\frac{(m-2)(m-1)m(m+1)}{1.2.3.4}a^2\left\{\frac{\text{S}_3(m-4)(m-3)}{(2\pi)^2}-1\right\}.$$

Or, comme nous avons reconnu que

$$\text{M}=1-\frac{m+1}{2}+a_2\frac{m(m+1)}{1.2}$$

conserve une valeur positive pour toute valeur de $m>9$, il suffira de reconnaître que le facteur

$$\frac{S_2(m-4)(m-3)}{(2\pi)^2}-1$$

est positif pour toute valeur de $m>13=4n+5$; or cela est facile à constater en remplaçant S_2 par sa valeur $\frac{2\pi^2}{21}$.

Si nous supposons $n=3$, nous aurons :

$$\Psi(m)=\mathrm{M}+\frac{(m-6)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots 8}\left\{\frac{S_4(m-8)(m-7)}{(2\pi)^2}-1\right\}.$$

Or, comme nous avons reconnu que la première partie M de cette fonction $\Psi(m)$ est positive pour toute valeur de $m>13$, il suffira de reconnaître que le facteur

$$\frac{S_4(m-8)(m-7)}{(2\pi)^2}-1$$

est positif pour toute valeur de $m>17$, ce qui est évident, puisque

$$S_4=\frac{10\pi^2}{99}.$$

Généralement, si nous supposons $n>3$ et si nous écrivons la valeur $\Psi(m)$ sous la forme :

$$\Psi(m)=\mathrm{M}+\frac{(m-4n+2)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots(4n-4)}a_{2n-2}\left\{\frac{S_{2n-2}(m-4n+4)(m-4n+5)}{(2\pi)^2}-1\right\},$$

il suffira de montrer que le facteur

$$\frac{S_{2n-2}(m-4n+4)(m-4n+5)}{(2\pi)^2}-1$$

est positif pour toute valeur de $m>4n+5$.

Si nous supposons seulement $m=4n+5$, nous aurons :

$$S_{2n-2}\,9.10>(2\pi)^2,$$

que nous pouvons écrire sous la forme :

$$S_{2n-2}>\frac{4}{9}S_3$$

en remarquant que $S_3=\frac{\pi^2}{10}$; or cette inégalité est manifeste, puisque $S_3<S_{2n-2}$ lorsque n est supérieure à 3.

L'inégalité (3) se trouve ainsi généralement démontrée.

Quant à l'inégalité (4), elle se démontrerait par un procédé analogue à celui que nous venons d'employer.

Nous pouvons conclure de là que, si l'on considère le développement de la fonction $\frac{x}{e^x-1}$ suivant les puissances de x, l'erreur, en s'arrêtant à un certain terme, sera donnée en valeur absolue par l'expression :

$$A_2S_1S_2\ldots S_{2n-2}\frac{x^{4n-2}}{(2\pi)^{4n-2}},$$

valeur qui va en augmentant ou en diminuant avec n, selon que x sera plus grand ou plus petit que 2π.

§ 5. La série (1) est reliée, comme on le sait, au développement $\Sigma\beta(x)$; l'examen de cette suite peut servir à déterminer la convergence ou la divergence de plusieurs séries qui dépendent de la valeur des nombres de Bernoulli.

Ainsi, nous pourrons faire remarquer que, en écrivant la série (1) sous la forme :

$$1+A_2x^2-A_4x^4+\ldots=\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}$$

nous aurons, à l'aide d'une formule connue de Legendre, qui donne le développement de $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ en fraction continue, en remplaçant x^2 par $\frac{n}{m}$ et $A_2, A_4, \ldots$ par leurs valeurs exprimées à l'aide des nombres de Bernoulli :

$$\frac{a_1}{1.2}-\frac{a_2}{1.2.3.4}\left(\frac{n}{m}\right)+\frac{a_3}{1.2.3.4.5.6}\left(\frac{n}{m}\right)^2-\ldots=\cfrac{1}{3.4+\cfrac{n}{5m+\cfrac{n}{7.4+\cfrac{n}{9m+\ldots}}}}$$

Si, en second lieu, nous changeons dans la formule (1) x en $x\sqrt{-1}$, nous obtiendrons :

$$1-\left(\frac{a_1x^2}{1.2}+\frac{a_2x^4}{1.2.3.4}+\frac{a_3x^6}{1.2.3.4.5.6}+\cdots\right)=\frac{x}{2tg\,\frac{x}{2}}$$

série qui sera convergente pour toute valeur de x inférieure à 2π.

M. FIEDLER

Professeur à Zurich.

DE LA GÉOMÉTRIE DES SYSTÈMES DES CERCLES, DÉVELOPPÉE PAR UNE MÉTHODE NOUVELLE DE REPRÉSENTATION

— *Séance du 16 avril 1881.* —

Tous les points de l'espace peuvent être déterminés, par représentation graphique, sur un plan de projection de la même manière que le point de vue de la projection centrale par le cercle de distance (voir mon programme : *Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft*, Chemnitz, 1860), c'est-à-dire par le cercle tracé du point P′, pied de la perpendiculaire abaissée de P sur le plan comme centre, avec PP′ comme rayon. En distinguant le sens de mouvement, on peut séparer les points placés symétriquement par rapport au plan de projection.

Une droite g et la droite g^*, qui lui est symétrique par rapport au plan, donnent un système de cercles — nous dirons une suite linéaire de cercles — avec la projection g' comme centrale commune et avec la trace des droites comme centre de similitude. Deux plans symétriques E, E* sont représentés par un système de cercles avec la trace commune comme axe de similitude. Deux cercles M_1', M_2 — en même temps leurs centres — tracés dans le plan de projection, déterminent deux suites linéaires avec le point de similitude extérieur A_{12}, respectivement intérieur J_{12}; trois cercles M_1, M_2, M_3 déterminent, par les trois couples de points qu'ils représentent, quatre couples de plans symétriques par rapport au plan de projection, dont les traces sont les quatre axes de similitude s_{ik} ; et la considération des lignes d'intersection des plans démontre le théorème : « Les trois couples de droites joignant le centre de chacun des trois cercles aux centres de similitude des deux autres se coupent à trois dans quatre points