» La première de ces différences n'affecte en rien le phénomène; mais les deux autres ont pour effet d'augmenter beaucoup la portion efficace du *solide de diffraction*, qui détermine l'intensité lumineuse des différents points du plan focal de la lunette dans l'intervalle voisin des limites géométriques du corps obscur et du bord lumineux de l'astre.

» Le ligament noir doit donc être, dans ce cas, bien moins obscur que dans celui d'un passage; et, en effet, le Rapport de M. Gonnessiat contient ces mots : « Cette traînée obscure ne paraît point gêner sensiblement l'observation. » Mais il doit, comme dans un passage de Vénus, être un phénomène graduel; c'est ce que les deux observateurs ont constaté : ils l'ont tous deux noté comme estompé sur les bords.

» Enfin, les dimensions et l'intensité de ce ligament doivent varier avec l'ouverture de l'instrument employé : ceci résulte encore des deux observations que j'analyse, car le ligament a paru au moins aussi foncé à M. Marchand qu'à M. Gonnessiat, et c'est le contraire qui aurait dû avoir lieu si l'ouverture de l'instrument n'avait point d'influence sur les dimensions et l'intensité du ligament, puisque le verre noir dont se servait le premier était beaucoup plus absorbant que celui qu'avait employé le second.

» En résumé, ces observations montrent que l'apparence désignée sous le nom de *ligament noir* n'est point spéciale aux passages des planètes inférieures sur le disque du Soleil, qu'on la rencontre dans des cas où les lois de la diffraction peuvent évidemment seules l'expliquer; et que, en conséquence, lors d'un passage de Vénus ou de Mercure, cette apparence, dite jusqu'ici *singulière*, doit bien être considérée comme résultant de l'interférence des ondes lumineuses qui forment l'image focale et traitée comme telle. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe d'invariants relatifs aux équations linéaires*. Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Considérons deux équations différentielles linéaires

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_1\frac{dy}{dx} + P_0 y = 0,$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P'_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + P'_1\frac{dy}{dx} + P'_0 y = 0.$$

Je suppose que les fonctions P et P' sont rationnelles en x et en z; z étant défini en fonction de x par une relation algébrique

$$f(x, z) = 0.$$

Je dirai que ces deux équations sont de même *famille*, si l'intégrale générale de la seconde peut se mettre sous la forme

$$\Lambda\left(Q_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + Q_{m-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots + Q_1\frac{dy}{dx} + Q_0 y\right),$$

y étant l'intégrale générale de la première, les Q étant des fonctions rationnelles de x et de z, et Λ une fonction quelconque de ces variables. Supposons que les fonctions P et P' soient de degré déterminé, de façon que leurs coefficients soient en nombre limité. Il y aura certaines fonctions de ces coefficients qui auront la même valeur pour toutes les équations d'une même famille. Je les appellerai *invariants de famille*.

» Pour montrer comment on peut déterminer et étudier les invariants de famille, je vais prendre l'exemple simple de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \theta y = 0, \tag{1}$$

θ étant une fonction rationnelle de x seulement. Je suppose que les intégrales de cette équation soient partout régulières et sans logarithmes. Parmi les infinis de θ, je distingue ceux pour lesquels la différence des racines de l'équation déterminante n'est pas un entier et qui sont les *points singuliers* proprement dits, et ceux pour lesquels cette différence est un entier et que j'appellerai points singuliers *apparents*. Je supposerai que le point ∞ est un point singulier, et qu'il y a, en outre, K points singuliers à distance finie. Je dirai que deux équations de la forme (1) appartiennent à la même classe si les points singuliers sont les mêmes et si, pour chacun d'eux, la différence des racines de l'équation déterminante est la même à un entier près. Je supposerai, pour éviter une discussion qui ne présente, d'ailleurs, aucune difficulté, que cette différence est la même dans nos deux équations pour chaque point singulier, et qu'elle est égale à 2 pour chaque point apparent. Cela posé, toute classe se divisera en deux sous-classes, selon que le nombre des points apparents sera pair ou impair.

» Étant données deux équations de la même sous-classe, combien faudra-t-il de conditions pour qu'elles soient de la même famille? En d'autres termes, combien y aura-t-il d'invariants de famille en dehors de ceux qui déterminent la classe? Il y en aura $2K - 4$.

» Soit h le nombre des points apparents; si, outre les K points singuliers, les h points apparents sont donnés, il restera, dans θ, des paramètres arbitraires au nombre de $K-2$. Il résulte de là que si $h \equiv K \pmod 2$, il y aura, dans chaque famille, une équation canonique qui n'aura que $K-2$ points apparents, et si $h \equiv K+1 \pmod 2$, il y en aura une infinité qui auront $K-1$ points apparents.

» Soit, par exemple, $K=3$, $h \equiv 1 \pmod 2$; voyons comment on pourra passer de l'équation (1) à une équation de même famille n'ayant qu'un point apparent. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les points singuliers, $b_1, b_2, \ldots, b_h$ les points apparents. Posons

$$\psi = \frac{\alpha(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_h)(x-d)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2(x-a_3)^2(x-c_1)^2(x-c_2)^2\ldots(x-c_m)^2}.$$

Je suppose $2m = h-3$. On voit que ψ contient $m+2$ paramètres arbitraires, c'est-à-dire $\alpha, d, c_1, c_2, \ldots, c_m$. Considérons la fonction rationnelle $-\theta+\psi$. Elle sera de degré -2, et elle aura $3+m+h$ infinis doubles. Combien faut-il de conditions pour qu'une fonction R de degré -2 et ayant n infinis doubles puisse se mettre sous la forme $\varphi^2 - \frac{d\varphi}{dx}$, φ étant rationnel? Il en faut $n-1$, et ces conditions, ainsi que les coefficients de φ, s'expriment très simplement en fonctions des coefficients de R. Ici nous aurons donc $2+h+m$ conditions, et, comme h d'entre elles sont satisfaites d'elles-mêmes, nous satisferons aux autres à l'aide des $m+2$ paramètres arbitraires qui restent dans ψ. On résoudra donc l'équation

$$\varphi^2 - \frac{d\varphi}{dx} = -\theta + \psi,$$

ce qui se ramène à un problème purement algébrique. Puis on formera l'équation dont l'intégrale générale s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}}\left(\varphi y + \frac{dy}{dx}\right),$$

y étant l'intégrale générale de (1). Cette équation sera de même forme que (1), elle sera de même famille que (1), et elle n'admettra qu'un point apparent qui sera d. Les coefficients de cette équation seront les invariants de famille cherchés.

» La question peut se traiter par la même analyse dans le cas le plus général. Un problème se présente maintenant : je suppose que les K points singuliers de (1) soient donnés; peut-on disposer des $2K-4$ invariants, de telle façon que le groupe de l'équation (1) soit quelconque? Cela n'est pas évident *a priori*, mais la considération des fonctions zétafuchsiennes permet de le démontrer. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions uniformes affectées de coupures.* Note de M. E. **Picard**, présentée par M. Hermite.

« On sait que M. Weierstrass, dans son Mémoire célèbre sur les fonctions uniformes, a donné la forme analytique de toute fonction ayant un nombre fini de points singuliers essentiels et des pôles en nombre quelconque. Je me propose de montrer que toute cette théorie peut, avec des modifications bien simples, être étendue aux fonctions uniformes possédant un nombre fini de coupures que je supposerai rectilignes. Soit donc $f(z)$ une fonction restant uniforme, quand on ne traverse pas certains segments de droite P_1Q_1, P_2Q_2, ..., P_nQ_n (nous nous bornons au cas où ces segments n'ont aucun point commun); tout point du plan en dehors de ces segments sera pour la fonction un point ordinaire ou un pôle, et on ne fait aucune hypothèse sur la nature des points de chacun des segments, qui peuvent même être des lignes de points singuliers essentiels.

» Plaçons-nous d'abord dans le cas où $f(z)$ est continue pour tous les points du plan en dehors des coupures; nous allons voir que $f(z)$ est alors la somme de n fonctions ayant chacune dans tout le plan une seule coupure, ce qui correspond à ce théorème de M. Weierstrass d'après lequel une fonction ayant n points singuliers est la somme de n fonctions ayant chacune un seul point de cette nature. Étudions dans ce but la forme de $f(z)$ dans le voisinage de la coupure P_1Q_1, et supposons, pour simplifier, que l'origine soit le milieu de ce segment de longueur $2c$ et que P_1Q_1 soit l'axe des quantités réelles. On démontrera de suite, en faisant usage de la transformation

$$2z = t + \frac{c^2}{t},$$

que la fonction, dans le voisinage de la coupure, peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n(z+\sqrt{z^2-c^2})^n + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{B_n}{(z+\sqrt{z^2-c^2})^n},$$

qui revient simplement au développement de Laurent; les A et les B sont des constantes, et l'on suppose le radical pris de telle manière que $z+\sqrt{z^2-c^2}$ ait un module supérieur à c. Écrivons maintenant cette expression de la manière suivante :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\mathrm{A}_n\left[\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)^n+\left(z-\sqrt{z^2-c^2}\right)^n\right]+\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\mathrm{C}_n}{\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)^n},$$

en posant

$$\mathrm{C}_n=\mathrm{B}_n-\mathrm{A}_n c^{2n}.$$

» La série $\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\mathrm{C}_n}{\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)^n}$ est convergente pour tous les points du plan en dehors de la coupure $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$. Désignons-la par $\varphi_1(z)$. Quant à la première partie

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\mathrm{A}_n\left[\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)^n+\left(z-\sqrt{z^2-c^2}\right)^n\right],$$

elle n'est convergente qu'à l'intérieur de toute ellipse ayant pour foyers P_1 et Q_1, et ne contenant aucune autre coupure; elle est d'ailleurs uniforme et continue dans cette région, et $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ n'est pas pour elle une coupure. On voit donc que l'on peut trouver une fonction $\varphi_1(z)$ ayant dans tout le plan la seule coupure $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$, et telle que la différence $f(z)-\varphi_1(z)$ n'admet plus cette coupure. En raisonnant sur cette différence, comme nous venons de raisonner sur $f(z)$, nous trouverons une fonction $\varphi_2(z)$ n'ayant dans tout le plan que la seule coupure $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$, et telle que la différence $f(z)-\varphi_1(z)-\varphi_2(z)$ n'admette plus la coupure $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$, et, en continuant de cette manière, on trouve en résumé

$$f(z)=\sum_{k=1}^{k=n}\varphi_k(z),$$

$\varphi_k(z)$ ne possédant dans tout le plan que la coupure $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ et étant continue pour tous les autres points.

» Une seconde proposition nous est nécessaire pour pouvoir arriver à la forme générale d'une fonction ayant n coupures et des pôles en nombre quelconque : c'est le théorème relatif à la décomposition en facteurs primaires. On va voir que cette extension peut se faire encore bien simplement.