les notations étant les mêmes que dans une Note précédente du 13 mars 1882.

» III. La démonstration de ces théorèmes, leur extension au cas où la courbe C serait formée de plusieurs arcs de cercle et leur application aux fonctions doublement périodiques seront données dans un Mémoire qui paraîtra prochainement. Je me borne à faire remarquer ici que les propositions sur les fonctions uniformes doublement périodiques contenues dans le premier paragraphe de ma Note du 3 avril 1882 sont des cas particuliers des théorèmes que je viens d'indiquer. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions fuchsiennes*. Note de M. H. Poincaré, présentée par M. Hermite.

« Dans l'étude des fonctions fuchsiennes, j'ai envisagé des séries de la forme suivante :

$$(1) \qquad \sum \mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} = \Theta(z),$$

où $\mathrm{H}(z)$ est l'algorithme d'une fonction rationnelle, où $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ sont les différentes substitutions du groupe fuchsien envisagé, et où m est un entier plus grand que 1.

» J'ai démontré que (pour une même valeur de m) le quotient de deux de ces séries est une fonction fuchsienne. Réciproquement, on peut se demander si toute fonction fuchsienne peut s'exprimer par un pareil quotient. Cette question se ramène à la suivante. J'ai dit déjà que toutes les fonctions fuchsiennes ayant même groupe peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de deux d'entre elles, que j'appelle x et y, et entre lesquelles il y a une relation algébrique, de sorte que toute série de la forme (1) peut être égalée à une expression telle que

$$(2) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \mathrm{F}(x, y),$$

où $\mathrm{F}(x, y)$ est l'algorithme d'une fonction rationnelle.

» Réciproquement, toute fonction telle que (2) peut-elle être mise sous la forme (1)? Pour fixer les idées, je supposerai qu'il s'agit d'une de ces familles de fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Nous trouvons d'abord aisément que, pour pouvoir être mise sous la forme (1), l'expression (2) doit s'annuler quand z vient en un des sommets de la deuxième catégorie du polygone R_0.

» *Supposons une fois pour toutes cette condition remplie.*

» Les fonctions telles que (2) peuvent ou bien admettre des infinis (nous dirons alors qu'elles sont de la première espèce), ou bien n'en pas admettre, auquel cas elles seront de la deuxième espèce. De même, les séries telles que (1) seront (sauf des cas exceptionnels que nous laisserons de côté) de la première espèce, et auront des infinis si $H(z)$ a des pôles à l'intérieur du cercle fondamental. Dans le cas contraire, elle sera de la deuxième espèce et n'aura pas d'infini.

» Je dis d'abord que toute expression de la forme (2) et de la deuxième espèce peut être égalée à une série de la forme (1) et de la deuxième espèce. En effet, on démontre que toutes les expressions de la forme (2) de la deuxième espèce peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de p d'entre elles, p étant un nombre entier facile à déterminer. Le théorème énoncé sera donc démontré si j'établis qu'il est possible de mettre sous la forme (1) p expressions telles que (2) *linéairement indépendantes entre elles.* Or, dire que cela est impossible, ce serait dire que toutes les séries (1) de la deuxième espèce peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $p-1$ d'entre elles. Mais je dis qu'il n'en est pas ainsi.

» En effet, supposons que toutes les séries (1) de la deuxième espèce s'expriment linéairement à l'aide de $p-1$ d'entre elles, que j'appellerai Θ_1, Θ_2, ..., Θ_{p-1}. Soient z_1, z_2, ..., z_p p points choisis *au hasard* à l'intérieur du cercle fondamental. On pourra toujours trouver p nombres A_1, A_2, ..., A_p tels que l'on ait

$$\begin{aligned}
&A_1\Theta_1(z_1) + A_2\Theta_1(z_2) + \ldots + A_p\Theta_1(z_p) = 0,\\
&A_1\Theta_2(z_1) + A_2\Theta_2(z_2) + \ldots + A_p\Theta_2(z_p) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&A_1\Theta_{p-1}(z_1) + A_2\Theta_{p-1}(z_2) + \ldots + A_p\Theta_{p-1}(z_p) = 0.
\end{aligned}$$

On aura alors

$$A_1\Theta(z_1) + A_2\Theta(z_2) + \ldots + A_p\Theta(z_p) = 0,$$

$\Theta(z)$ désignant une série quelconque de la forme (1) et de la deuxième espèce.

» Cela posé, considérons la fonction suivante :

$$\Phi(z, a) = \sum_i \frac{(\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}}{\frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}}.$$

» Soit $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ une quelconque des substitutions de notre groupe fuchsien, et posons

$$H(a) = \frac{(\gamma z + \delta)^{2m-1} - (\gamma a + \delta)^{2m-1}}{(z-a)(\gamma z + \delta)^{2m-2}(\gamma a + \delta)^{2m-1}}.$$

On aura identiquement

$$\Phi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right) - (\gamma z + \delta)^{2-2m}\Phi(z, a) = \sum_i H\left(\frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}\right)(\gamma_i a + \delta_i)^{-2m} = \Theta(a),$$

$\Theta(a)$ désignant une série (1) de la deuxième espèce, où a est regardée comme la variable indépendante. Si donc on pose

$$A(z) = A_1\Phi(z, z_1) + A_2\Phi(z, z_2) + \ldots + A_p\Phi(z, z_p),$$

on aura

$$A\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \gamma}\right) = (\gamma z + \delta)^{2-2m} A(z);$$

on en conclut que $A(z)$ est de la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y), \tag{3}$$

F étant rationnel. D'ailleurs l'expression (3) s'annule comme l'expression (2) quand z vient en un des sommets de la deuxième catégorie. Il serait donc possible de construire une fonction telle que (3), admettant p infinis, $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *choisis arbitrairement* et n'en admettant pas d'autre. Or on démontre que cela ne se peut pas. Donc l'hypothèse faite au début est absurde. Donc toute expression (2) de la deuxième espèce peut se mettre sous la forme (1).

» Je dis maintenant que toute expression (2) de la première espèce peut se mettre sous la forme (1) (en supposant toujours qu'elle s'annule quand z vient en un sommet de la deuxième catégorie). En effet, on pourra toujours construire une série (1) ayant les mêmes infinis que l'expression (2), donnée avec les mêmes résidus. La différence de l'expression (2) donnée et de la série (1) ainsi formée sera une expression (2) de la deuxième espèce qui pourra se mettre sous la forme (1). Il en sera donc de même de l'expression (2) donnée.

» Il résulte de ce qui précède que toute fonction fuchsienne n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental peut s'exprimer d'une infinité de manières par le quotient de deux séries de la forme (1). Des principes analogues sont applicables aux fonctions fuchsiennes qui existent dans tout le plan. »