SUR LA THÉORIE

DES

FONCTIONS FUCHSIENNES

Par H. POINCARÉ

Membre titulaire

Dans une série de mémoires présentés à l'Académie des sciences (1er juin 1880, 14 et 21 février, 4 et 18 avril, 23 et 30 mai, 27 juin 1881), j'ai étudié une classe de fonctions dont les transcendantes elliptiques et modulaires ne sont que des cas particuliers et que j'ai appelées fonctions fuchsiennes. Mon intention est de résumer ici quelques-uns de mes résultats et de donner une idée générale des méthodes qui m'y ont fait arriver.

1. J'envisage une infinité de substitutions linéaires.

$$(1)\quad z_k = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}$$

L'indice K varie de o à l'infini de telle sorte que $z = z_o$; mais les substitutions sont rangées dans un ordre d'ailleurs arbitraire. Je recherche s'il existe une fonction F (z) uniforme et telle que

$$\mathrm{F}(z_k) = \mathrm{F}(z)$$

Il est clair que les substitutions linéaires (1) doivent former un groupe et que ce groupe doit être discontinu, c'est-à-dire que la partie du plan où la fonction F existe peut être divisée en régions R_0, R_1, R_k, telles que, lorsque z est intérieur à R_0, z_k soit intérieur à R_k.

A chacune des substitutions (1) correspond de la sorte une des régions R. A l'intérieur de chacune de ces régions se trouve l'un des points z_k. Ces divers points z_k s'appellent *points correspondants* de z. Ils seront aussi correspondants entre eux. Deux régions R seront dites limitrophes, lorsqu'elles seront contiguës tout le long d'un arc de leur périmètre. Si deux points correspondants sont dans deux régions limitrophes, je dirai qu'ils sont *limitrophes*. Les substitutions qui correspondront aux régions limitrophes de R_0 seront les *substitutions fondamentales*. Il est clair d'ailleurs que toutes les substitutions du groupe seront des combinaisons des substitutions fondamentales. Par conséquent, le groupe sera entièrement déterminé quand on connaîtra ces substitutions fondamentales.

2. J'appelle X l'axe des quantités réelles.

Je suis donc amené à chercher tous les groupes discontinus qui sont formés de substitutions linéaires ; et tout d'abord, ceux dont toutes les substitutions ont des coefficients réels et que j'appelle groupes fuchsiens. De pareilles substitutions conservent les angles, elles changent les

cercles en cercles et les cercles ayant leur centre sur X en cercles ayant leur centre sur X. Soient α, β deux quantités imaginaires, α', β' leurs conjugués, je pose :

$$(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'}$$

Envisageons deux arcs de cercle $\alpha\,\beta$ et $\gamma\,\delta$ ayant leurs centres sur X. Si l'on a :

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$$

il existera une substitution à coefficients réels qui changera $\alpha\,\beta$ en $\gamma\,\delta$; je l'appelle la substitution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Le groupe fuchsien étant discontinu, une portion du plan qui est la partie située au-dessus de X sera partagée en régions R_0, —— R_k, ainsi que je l'ai dit plus haut. Mais par un raisonnement très-simple, je montre qu'on peut toujours supposer que ces régions sont des polygones curvilignes situés tout entiers au-dessus de X et dont les côtés sont de deux sortes; ceux de la 1re sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur X, ceux de la 2e sorte sont des segments de l'axe X lui-même.

Deux côtés consécutifs de la 1re sorte seront ainsi séparés par un sommet situé au-dessus de X et que j'appelle sommet de la 1re catégorie, ou par un sommet situé sur X et que j'appelle sommet de la 2e catégorie, ou par un côté de la 2e sorte que j'appelle par extension sommet de la 3e catégorie.

Grâce à cette convention, il est clair que l'on rencontre, en suivant le périmètre du polygone, alternativement un côté de la 1re sorte et un sommet de l'une des trois catégories. Le côté qu'on rencontrera après un sommet donné sera le côté suivant, le sommet qu'on rencontrera ensuite sera le sommet suivant, etc.

Chacune des substitutions fondamentales du groupe changera le polygone curviligne R_0 en un polygone limitrophe, et par conséquent l'un des côtés de la 1re sorte $a\,b$ de R_0 en un autre côté $c\,d$ de ce même polygone. Cela montre que les côtés de la 1re sorte de R_0 sont en nombre pair et se répartissent en paires. Si deux côtés $a\,b$, $c\,d$, appartiennent à la même paire, ils sont dits conjugués et l'on doit avoir

$$(a, b) = (c, d).$$

Je vais maintenant répartir les sommets en cycles de la manière suivante. On partira d'un sommet quelconque, on envisagera le côté suivant, puis son conjugué, puis le sommet suivant, puis le côté suivant, puis son conjugué, puis le sommet suivant, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on revienne au sommet qui a servi de point de départ. Tous les sommets rencontrés de la sorte appartiendront à un même cycle. Il est clair que tous les sommets d'un même cycle devront appartenir à la même catégorie.

Un polygone R_0 (et le groupe fuchsien G correspondant) sera de la première famille si tous ses

sommets sont de la première catégorie ; de la deuxième famille s'ils sont tous de la deuxième catégorie ; de la troisième s'ils sont tous de la troisième catégorie ; le polygone R_0 sera de la quatrième famille, s'il a des sommets de la deuxième et de la troisième catégorie ; de la cinquième s'il a des sommets de la première et de la troisième catégorie ; de la sixième s'il en a de la première et de la deuxième catégorie ; et enfin de la septième s'il en a de toutes les catégories.

Quand on connaît le polygone R_0 et la distribution de ses côtés en paires, le groupe fuchsien est entièrement déterminé, car on connaît ses substitutions fondamentalès. Si par exemple ab, cd, sont deux côtés conjugués, l'une des substitutions fondamentales sera la substitution $(a, b, c, d,)$. On saura construire le polygone curviligne R qui sera contigu à R_0 le long de cd ; car ce sera le transformé de R_0 par la substitution $(a, b, c, d,)$. On saura construire de même tous les polygones limitrophes de R_0 le long d'un quelconque de ses côtés ; et tous les polygones limitrophes de ceux-ci, et ainsi de suite. Pour que le groupe soit discontinu, il faut que les polygones ainsi obtenus recouvrent toute la portion du plan située au-dessus de X et ne la recouvrent qu'une fois.

Soit A un point quelconque intérieur à R_0, B un point extérieur à R_0 mais situé au-dessus de X ; je joins A B par une courbe quelconque, A M B ne coupant pas X. Cette courbe sortira de R_0 par un

des côtés C_0 de ce polygone et l'on pourra construire, comme on l'a vu plus haut, le polygone R_1 limitrophe de R_0 le long de C_0; si la courbe sort encore de R_1 par un des côtés C_1 de ce polygone, on construira de même le polygone R_2 limitrophe de R_1 le long de C_1; je dis, qu'après un nombre fini d'opérations, on arrivera à un polygone R_n contenant à son intérieur le point B. Car si cela n'était pas, il y aurait un point de A M B dans le voisinage duquel les polygones R seraient infiniment petits. Or, on démontre qu'un polygone transformé de R_0 par une substitution linéaire à coefficients réels ne peut être infiniment petit que s'il est infiniment voisin de X.

Il reste à examiner si le polygone R_n obtenu est le même quel que soit A M B, ou (ce qui revient au même) s'il se réduit à R_0 quand A M B se réduit à un contour fermé A M A. Soit donc A M A un contour fermé quelconque; décomposons-le en une infinité de contours infiniment petits. Pour qu'en suivant A M A on retombe sur R_0, il suffit, qu'en parcourant un quelconque des contours infinitésimaux, on retombe sur le polygone d'où l'on est parti. Or, cela arrivera évidemment pour tout contour qui n'enveloppera aucun sommet de la première catégorie, et il suffit d'ailleurs d'étudier les contours H qui enveloppent les sommets de R_0; car le contour qui enveloppe un sommet de R_k se comportera comme celui qui enveloppe le sommet correspondant de R_0. Pour qu'en décrivant l'un quelconque des contours H, on retombe sur R_0,

il faut et il suffit que *la somme des angles du polygone de* R_0 *correspondant à des sommets de la 1re catégorie appartenant à un même cycle, soit une partie aliquote de* 2π.

3. Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que R_0 donne naissance à un groupe fuchsien.

Citons quelques exemples de polygones R_0 conduisant à des groupes fuchsiens.

1er Cas. — Je suppose que R_0 soit un polygone de $2n$ côtés dont les sommets se succèdent dans l'ordre suivant $A_1 A_2 \ldots A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \ldots B_2 A_1$; les côtés $A_1 A_2$, $A_1 B_2$; $A_2 A_3$, $B_2 B_3$; $\ldots$; $A_k A_{k+1}$, $B_k B_{k+1}$; $\ldots$; $A_n A_{n+1}$, $B_n A_{n+1}$; seront conjugués, il y aura alors $n+1$ cycles formés respectivement des sommets

$$A_1; A_2, B_2; A_3, B_3; A_4, B_4; \ldots; A_n, B_n; A_{n+1}$$

On devra avoir :

$(A_1, A_2) = (A_1, B_2)$ $(A_k, A_{k+1}) = (B_k, B_{k+1})$ $(A_n, A_{n+1}) = (B_n, A_{n+1})$ et les angles A_1, $A_2 + B_2$, $A_3 + B_3 \ldots$, $A_n + B_n$, A_{n+1} devront être partie aliquotes de 2π.

2e Cas. — Je fais les mêmes hypothèses que dans le 1er cas, mais je suppose de plus que tous les sommets $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \ldots B_2, A_1$ sont sur X et que tous les angles sont nuls.

3e Cas.— Je fais les mêmes hypothèses que dans le 1er cas, je suppose de plus que le polygone est symétrique par rapport à $A_1\ A_{n+1}$ et que cette droite est perpendiculaire à X. M. Klein m'a fait l'honneur de m'écrire que ce cas particulier lui était connu depuis quelque temps, et que, sans avoir rien fait imprimer sur ce sujet, il y a fait une fois une allusion dans son cours.

4e Cas. — Je fais les mêmes hypothèses que dans le 3e cas et je suppose de plus $n=2$. Je retombe ainsi sur le cas étudié par M. Schwarz dans le tome LXXV du *Journal de Crelle.*

5e Cas. — Je suppose que les sommets du polygone R_0 sont successivement $A_1\ A_2 \ldots\ldots A_{2n}$; et que les côtés opposés soient conjugués. On devra avoir alors :

$$(A_k,\ A_{k+1}) = (A_{n+k+1},\ A_{n+k})$$

Si n est pair, tous les sommets appartiennent au même cycle et la somme de tous les angles doit être aliquote de 2π.

Si n est impair, il y a deux cycles, formés, l'un de tous les sommets de rang pair, l'autre de tous les sommets de rang impair. La somme de tous les angles de rang pair comme celle de tous les angles de rang impair devra être partie aliquote de 2π.

6e Cas. — L'un des cas particuliers les plus remarquables des groupes fuchsiens, c'est celui où les coefficients des substitutions (1) sont entiers ;

c'est ce cas qui a fait l'objet des intéressantes recherches de M. Klein sur les fonctions modulaires.

4. J'appelle points singuliers d'un groupe fuchsien les points dans le voisinage desquels les polygones R sont infiniment petits ; pour les groupes des 1re, 2e et 6e familles, tout l'axe X est une ligne singulière ; pour ceux des autres familles les points singuliers sont isolés sur X, quoique en nombre infini.

Si G est de la 1re, de la 3e ou de la 5e famille ; je dirai qu'une fonction uniforme ne présente d'autres singularités que celles de G, si tous ses points singuliers sont ceux de ce groupe.

Supposons maintenant que G est de la 2e, de la 4e, de la 6e ou de la 7e famille, de la 2e par exemple pour fixer les idées. Il pourra toujours être regardé comme un cas particulier d'un groupe variable G′ satisfaisant aux conditions suivantes. Tous les groupes G′ seront isomorphes entre eux et dérivés d'un même nombre de substitutions fondamentales ; les coefficients de ces substitutions seront des fonctions rationnelles d'un paramètre u. Pour $u > o$, le groupe G′ sera de la 3e famille ; pour $u = o$, il se réduira à G et sera de la 2e famille. Je dirai alors qu'une fonction F (z) n'a d'autres singularités que celles de G quand elle pourra être regardée comme la limite d'une fonction F′ (z) n'ayant d'autre singularité que celle de G′.

5. Outre les groupes fuchsiens, j'ai étudié dans

mes communications des 27 juin et 11 juillet les groupes discontinus formés de substitutions telles que (1), mais où α_k, β_k, γ_k, δ_k sont imaginaires. M. Klein ayant le premier donné un exemple remarquable de pareils groupes, je les ai appelés groupes kleinéens. Ne pouvant donner ici, faute d'espace, la manière de les former, je renverrai aux communications citées.

6. Envisageons le groupe fuchsien G et la décomposition correspondante de la portion du plan située au-dessus de X en polygones curvilignes R_0, R_1, ... Décomposons de même la partie du plan située au-dessous de X, en polygones curvilignes R'_0, R'_1, ... symétriques de R_0, R_1, ...

Soit :

$$t_k = \frac{z_k - \sqrt{-1}}{z_k + \sqrt{-1}} \qquad t = \frac{z - \sqrt{-1}}{z + \sqrt{-1}}$$

J'appelle respectivement fonction fuchsienne et fonction thétafuchsienne deux fonctions $F(z)$ et $\Theta(z)$ uniformes, telles que :

$$F(z_k) = F(z) \quad \Theta(z_k) = \Theta(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}$$

(m étant un entier), et ne présentant d'autres singularités que celles de G.

Je dis d'abord qu'il existe de pareilles fonctions. Envisageons en effet la série :

$$(2)\quad \Sigma_k H\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right)(\gamma_k z + \delta_k)^{-2m}(z_k + \sqrt{-1})^{-2m} = \Theta(z)$$

où m est un entier plus grand que 1, et où $H(z)$ est une fonction rationnelle de z n'ayant pas d'infini réel.

Je dis que cette série est convergente. Considérons d'abord la série :

$$(3)\quad \Sigma \text{ mod. } \left(\frac{dt_k}{dt}\right)^m$$

Envisageons une aire C_0 intérieure à R_0; quand z reste intérieur à C_0, z_k reste intérieur à une aire C_k, intérieure elle-même à R_k. Si z reste intérieur à C_0, t restera intérieur à une aire C'_0 et t_k à une certaine aire C'_k; et il est clair que les aires C' seront intérieures au cercle k, qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité, et n'empiéteront pas les unes sur les autres. La somme des aires C' est donc finie; c'est-à-dire que la série :

$$(4)\quad \Sigma\, C'_k$$

est convergente. Si C'_0 était infiniment petite, on aurait :

$$\frac{C'_k}{C'_0} = \text{mod. } \left(\frac{dt_k}{dt}\right)^2$$

C'_0 étant fini, $\frac{C'_k}{C'_0}$ sera compris entre la plus grande et la plus petite valeur que puisse prendre mod. $\left(\frac{dt_k}{dt}\right)^2$, quand t reste intérieur à C'_0. Mais on démontre que le rapport de cette plus grande et de cette plus petite valeur reste fini, quel que soit k. La série :

Σ la plus grande valeur de mod. $\left(\frac{dt_k}{dt}\right)^2$

est donc convergente, et par conséquent il en est de même de Σ mod. $\left(\frac{dt_k}{dt}\right)^2$ et de la série (3).

Mais on a identiquement :

$$(z_k+\sqrt{-1})^{-2m}\,\mathrm{H}(z_k)\,(\gamma_k z+\delta_k)^{-2m}=\mathrm{H}(z_k)\left(\frac{dt_k}{dt}\right)^m(z+\sqrt{-1})^{-2m}$$

et le module de $(z+\sqrt{-1})^{-2m}\,\mathrm{H}(z_k)$ n'augmente pas indéfiniment avec k. La série (2) est donc convergente et sa somme est indépendante de l'ordre de ses termes. J'ai supposé que z était intérieur à R_0, mais le même raisonnement s'appliquerait dans tous les cas possibles, pourvu que z ne soit ni un infini de H, ni un point singulier de G.

La fonction définie par la série (2) est donc uniforme et n'a d'autres points singuliers essentiels que ceux de G. Si G est de la 1re, de la 2e ou de la 6e famille, elle n'existe qu'au-dessus de X, et toute cette droite est pour elle une ligne singulière essentielle. Si G est d'une autre famille, elle existe dans tout le plan, et ses points singuliers sont isolés, quoique en nombre infini.

Si G est de la 1re, de la 3e ou de la 5e familles, $\Theta(z)$ n'aura d'après la définition du § 4 d'autres singularités que celles de G. Si G est d'une autre autre famille, de la 2e par exemple, on l'envisagera comme un cas particulier d'un groupe variable G′,

ainsi qu'il est dit au § 4; la fonction $\Theta(z)$ sera alors un cas particulier d'une fonction $\Theta'(z)$ formée avec G', comme elle l'est avec G; on démontre que $\Theta'(z)$ est une fonction continue de u pour $u = o$ et pour $u > o$; d'où :

$$\Theta(z) = \lim. \Theta'(z).$$

Mais $\Theta'(z)$ n'a d'autres singularités que celles de G'; donc $\Theta(z)$ n'a, d'après la définition du § 4 d'autres singularités que celles de G.

Elle jouit d'ailleurs de la propriété

$$\Theta(z_k) = \Theta(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}.$$

C'est une fonction thétafuchsienne.

7. Il est facile de trouver le nombre des zéros et des infinis de $\Theta(z)$ intérieurs à R_0. Les infinis de $\Theta(z)$ sont en effet ceux des fonctions rationnelles $H(z_k)$. Considérons un quelconque des infinis de $H(z)$ situé au-dessus de X, et par conséquent dans l'un des polygones de R. A cet infini correspondra un infini de chacune des fonctions $H(z_k)$, et chacun de ces infinis sera dans un polygone R différent; l'un d'eux sera intérieur à R_0; il résulte de là que le nombre des infinis de $\Theta(z)$ intérieurs à R_0 est égal à celui des infinis de $H(z)$ supérieurs à X. Ce nombre est donc fini.

Pour avoir celui des zéros, on prendra l'intégrale :

$$\int \frac{\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)}$$

le long du périmètre de R_0. Si G est de la 1re, de la 3e ou de la 5e familles, ce calcul ne présente aucune difficulté, car la somme des intégrales prises le long de deux côtés conjugués de R_0 a une valeur très-simple.

Si G est d'une autre famille, on considérera $\Theta(z)$ de même qu'au § 4 comme un cas particulier de $\Theta'(z)$; la fonction Θ' étant continue pour $u \geqq o$, le nombre des zéros de Θ sera égal au nombre constant des zéros de Θ'. Dans tous les cas, on trouve que le nombre des zéros est fini.

8. Comme le quotient de deux fonctions théta-fuchsiennes correspondant à un même groupe G et à une même valeur de m est une fonction fuchsienne, l'existence des fonctions fuchsiennes se trouve démontrée. Ces fonctions ne pourront prendre à l'intérieur de chacune des régions R un nombre infini de fois la même valeur.

Soient deux fonctions fuchsiennes F et F_1 correspondant à un même groupe G; à chacune des valeurs de F correspondra un nombre fini de valeurs de F_1 et réciproquement, de telle sorte que F et F_1 seront liées par une relation algébrique. Toutes les fonctions fuchsiennes correspondant à un même groupe seront donc fonctions algébriques les unes des autres. Elles s'exprimeront

donc rationnellement en fonctions de deux d'entre elles que j'appelle x et y et entre lesquelles il y a une relation :

$$f(x, y) = 0. \tag{5}$$

Le genre de cette relation est le genre du groupe G et des fonctions correspondantes.

Soit :

$$\upsilon = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

la fonction $\frac{1}{\upsilon}\frac{d^2\upsilon}{dx^2}$ sera une fonction fuchsienne et par conséquent une fonction rationnelle $\varphi(x, y)$ de x et de y. La fonction v est donc l'intégrale de l'équation linéaire :

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = \upsilon\,\varphi(x, y). \tag{6}$$

9. Si G est de la 1re, de la 2e ou de la 3e familles, et si H (z) n'a pas d'infini supérieur à X, la fonction $\Theta(z)$ n'a pas d'infini et est holomorphe dans toute la région située au-dessus de X, c'est-à-dire dans toute la région où elle existe. Elle peut donc toujours être représentée par une série ordonnée suivant les puissances de t.

Lorsque G est de la 1re famille, et si le nombre entier m reste constant, toutes les fonctions $\Theta(z)$ sans infini s'expriment linéairement par un nombre fini d'entre elles.

10. La première question qui se présente est la détermination du genre p de la relation (5). On

l'obtiendra en cherchant le nombre des cycles distincts que l'on peut faire décrire au point analytique (x, y) dans son plan multiple. Ce nombre est égal à 2 p. Je remarque d'abord que quand x, y décrit un cycle dans son plan, z décrit dans le sien un arc de courbe dont les extrémités sont des points correspondants α, α_1. On obtiendra donc tous les cycles en joignant un point α à chacun des points correspondants par tous les arcs de courbe possibles.

J'appellerai un pareil arc, arc cyclique. Un cycle évanouissant est un cycle qui n'enveloppe aucun point singulier ; l'arc cyclique correspondant sera dit aussi évanouissant.

Je suppose, pour fixer les idées, que G soit de la 1re, de la 2e ou de la 5e famille. Il est clair qu'il faut rejeter d'abord tous les arcs de courbe dont les extrémités se confondent et qui se réduisent à un contour fermé ; car on peut décomposer un pareil contour en contours infinitésimaux, et si z décrit un contour infinitésimal, (x, y) ne peut décrire qu'un cycle évanouissant. De même deux arcs de courbe $\alpha\, m\, \alpha_1$, $\alpha\, n\, \alpha_1$ ayant mêmes extrémités ne donneront pas naissance à deux cycles distincts, car le premier est équivalent au second, plus le contour fermé $\alpha_1\ n\ \alpha\, m\, \alpha_1$. J'obtiendrai donc tous les cycles distincts en joignant le point α à chacun des points correspondants par un seul arc de courbe.

Je dis de plus qu'il suffira de le joindre aux points correspondants limitrophes. En effet soit

α_i un point correspondant de α non limitrophe de α ; on pourra trouver une série de points correspondants :

$$\alpha\ \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ldots\ \alpha_{i-1}\ \alpha_i$$

de telle façon que deux points consécutifs soient limitrophes. L'arc cyclique $\alpha\,\alpha_i$ sera alors la réunion des arcs cycliques $\alpha\ \alpha_1$, $\alpha_1\,\alpha_2$, $\ldots\ldots$ $\alpha_k\,\alpha_{k+1}$, $\ldots\ldots$ $\alpha_{i-1}\alpha_i$. Or les points $\alpha_k\,\alpha_{k+1}$ étant limitrophes, l'arc cyclique $\alpha_k\ \alpha_{k+1}$ sera équivalent à un arc $\alpha\ \alpha_r$, α_r étant limitrophe de α. Un cycle quelconque peut donc s'obtenir par une combinaison d'arcs cycliques tels que $\alpha\ \alpha_r$.

Soit maintenant R_1 le polygone dans lequel se trouve α_r ; $a\,b$ le côté de R_0 qui le sépare de R_1 ; $a'\,b'$ son conjugué. Il est évident que les arcs cycliques $a\,a'$, $\alpha\ \alpha_r$, $b\,b'$ sont équivalents.

D'où la règle suivante pour former tous les cycles distincts :

On considère un sommet quelconque a, le côté suivant, son conjugué, le sommet suivant a' et on joint $a\,a'$.

Mais ce nombre de cycles distincts peut encore être réduit si l'on remarque :

1° Que si $a\,b$, $a'\,b'$ sont deux côtés conjugués, les arcs cycliques $a\,a'$ et $b\,b'$ sont équivalents ;

2° Que tout contour fermé est un arc cyclique *évanouissant ;*

3° Que si les points a et a' se confondent l'arc $a\ a'$ est évanouissant.

11. Appliquons ces principes à quelques exemples :

1° Supposons-nous placés dans le 1er cas du § 3 qui comprend le 2e, le 3e, et le 4e. En appliquant la règle précédente on trouve les arcs cycliques :

$$A_1A_1,\ A_2B_2,\ A_3B_3,\ \ldots\ldots,\ A_n B_n\ ,\ A_{n+1}\ A_{n+1}.$$

Tous ces arcs sont équivalents, car $A_k\ A_{k+1}$, $B_k\ B_{k+1}$ étant conjugués, les cycles $A_k\ B_k$ et A_{k+1} B_{k+1} sont équivalents. Mais l'arc $A_1\ A_1$ est évanouissant. Le nombre des cycles distincts est donc nul; la relation (5) est de genre 0.

Dans ce cas, toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement au moyen de l'une d'entre elles que j'appelle x; et dans l'équation (6) φ devient une fonction rationnelle de x devenant infinie pour $n+1$ valeurs de x :

$$a_1 = F(A_1),\ a_2 = F(A_2) = F(B_2),\ a_3 = F(A_3) = F(B_3.)\ \ldots\ldots,\ a_{n+1} = F(A_{n+1})$$

Les points singuliers de l'équation (6) sont a_1, $a_2 \ldots\ldots a_{n+1}$. Si l'on n'est pas placé dans le 2e cas, les intégrales sont régulières dans le voisinage de chacun de ces points singuliers, et la différence des racines de l'équation déterminante est une partie aliquote de l'unité.

Dans le 2e cas, il peut arriver, ou bien que les intégrales soient irrégulières, ou bien qu'elles soient régulières et que les racines de l'équation déterminante soient égales. De plus, il est évident que, dans ce 2e cas, la fonction fuchsienne x ne

peut prendre aucune des valeurs $a_1, a_2, \ldots . a_{n+1}$.

Le nombre des paramètres arbitraires dont on dispose est égal au nombre des conditions qu'on s'imposerait en assujettissant $a_1, a_2 \ldots . a_{n+1}$ à avoir des valeurs déterminées. Mais une discussion spéciale est nécessaire pour savoir si on peut effectivement disposer de ces paramètres pour satisfaire à ces conditions. J'ai fait cette discussion dans quelques cas particuliers, et j'ai reconnu qu'on peut toujours obtenir pour $a_1, a_2, \ldots . a_{n+1}$ des valeurs réelles données quelconques et que si $n = 4$, on peut obtenir pour a_1, a_2, a_3, a_4, des valeurs réelles ou imaginaires quelconques.

On peut donc toujours construire une fonction fuchsienne F (z) ne pouvant devenir égale à aucune des quantités

$$a_1, a_2 \ldots . a_{n+1}$$

quelles que soient les valeurs réelles de ces quantités ; ou bien encore ne pouvant devenir égale à aucune des quantités

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires de ces quantités.

2° Supposons-nous placés dans le 5e cas ;

Je dis que le genre de (5) sera $\frac{n}{2}$ si n est pair et $\frac{n-1}{2}$ si n est impair.

En effet, supposons d'abord pour fixer les idées $n = 4$. En appliquant la règle, on trouve les arcs cycliques

$$\begin{array}{cccc} A_1A_6 & A_3A_8 & A_2A_7 & A_1A_4 \\ A_2A_5 & A_4A_7 & A_3A_6 & A_8A_5 \end{array}.$$

Comme chaque arc de la première ligne est équivalent à celui qui est au-dessous de lui dans la 2e ligne, on peut s'en tenir aux 4 arcs de la 2e ligne, qui sont tous distincts. Le genre est donc égal à 2. C.Q.F.D.

Soit maintenant $n = 3$; en appliquant la règle on trouve les arcs cycliques :

$$\begin{array}{ccc} A_1A_5 & A_3A_1 & A_5A_3 \\ A_2A_4 & A_4A_6 & A_6A_2 \end{array}$$

les arcs de la 2e ligne ne sont pas distincts de ceux de la 1re. Ceux de la 1re, eux-mêmes, ne sont pas distincts entre eux ; car, placés bout à bout dans l'ordre suivant,

$$A_1A_5, \quad A_5A_3, \quad A_3A_1$$

ils forment un contour fermé.

Il reste donc deux cycles distincts et le genre est égal à 1. C.Q.F.D.

12. Je dis que n fonctions

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots\ldots \varphi_n(z)$$

sont des fonctions zétafuchsiennes, si elles sont uniformes, si elles jouissent de la propriété :

$$\varphi_\lambda(z_k) = A^{(k)}_{1,\lambda}\varphi_1(z) + A^{(k)}_{2,\lambda}\varphi_2(z) + \ldots\ldots + A^{(k)}_{n,\lambda}\varphi_n(z)$$

(les A étant des constantes, dont le déterminant soit égal à 1) et enfin si elles ne présentent d'autres singularités que celles de G.

Les substitutions linéaires :

$$y'_\lambda = A^{(k)}_{1,\lambda}y_1 + A^{(k)}_{2,\lambda}y_2 + \ldots\ldots + A^{(k)}_{n,\lambda}y_n$$

devront évidemment former un groupe H isomorphe à G.

J'appellerai :

$$a^{(k)}_{1,\lambda},\ a^{(k}_{2,\lambda},\ \ldots\ldots\ a^{(k)}_{n,\lambda}$$

les mineurs du déterminant des $A^{(k)}$.

Cela posé, je considère les groupes G et H comme donnés, et j'envisage n fonctions rationnelles de z, $H_1(z)$, $H_2(z)$ . . . . . $H_n(z)$ convenablement choisies.

Je forme les n séries :

$$(7)\quad \Phi_\lambda(z) = \Sigma_k \Big[a^{(k)}_{\lambda,1}H_1(z_k) + a^{(k)}_{\lambda,2}H_2(z_k) + \ldots\ldots + a^{(k)}_{\lambda,n}H_n(z_k)\Big]\left(\gamma_k z + \delta_k\right)^{-2m}$$

Ces séries sont convergentes pourvu que m soit assez grand.

Elles jouissent de la propriété :

$$\Phi_\lambda(z_k) = \Big[A^{(k)}_{1,\lambda}\Phi_1(z) + A^{(k)}_{2,\lambda}\Phi_2(z) + \ldots\ldots + A^{(k)}_{n,\lambda}\Phi_n(z)\Big]\left(\gamma_k z + \delta_k\right)^{2m}$$

On démontre dans tous les cas possibles (comme pour les fonctions thétafuchsiennes) que ces fonctions n'ont d'autres singularités que celles de G. Les fonctions

$$\varphi_\lambda(z) = \frac{\Phi_\lambda(z)}{\Theta(z)}$$

où $\Theta(z)$ est une fonction thétafuchsienne quelconque, sont alors des fonctions zétafuchsiennes.

Il est clair que tout déterminant à n lignes, où chaque ligne sera formée d'un système de n fonctions zétafuchsiennes, sera lui-même une fonction fuchsienne. D'autre part, si x est la fonction fuchsienne définie au § 8, les dérivées d'ordre m des $\varphi_\lambda(z)$ par rapport à x formeront un système de n fonctions zétafuchsiennes.

Il résulte de là qu'un système de n fonctions zétafuchsiennes

$$\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_n$$

satisfait à une équation linéaire de la forme :

$$\frac{d_n \varphi}{dx^n} + P_2 \frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}} + P_3 \frac{d^{n-3}\varphi}{dx^{n-3}} + \ldots\ldots + P_{n-1}\frac{d\varphi}{dx} + P_n \varphi = 0$$

où les P sont rationnels en x et y.

13. Comment peut-on reconnaître quelles sont les équations linéaires qui sont intégrales par les fonctions zétafuchsiennes? Je ne puis examiner cette question dans toute sa généralité sans dépas-

ser les bornes que je m'impose dans ce résumé. Je me bornerai à quelques exemples.

Considérons l'équation :

$$(8)\quad \frac{d^n v}{d x^n} + P_2 \frac{d^{n-2} v}{d x^{n-2}} + \ldots\ldots + P_n v = 0$$

où les P sont rationnels.

1° Supposons d'abord qu'elle ne présente que des points singuliers réels.

Soient :

$$a_1, a_2 \ldots\ldots a_p$$

Ces points singuliers; d'après ce que nous avons vu plus haut, nous pouvons toujours construire une fonction fuchsienne

$$x = f(z)$$

ne pouvant prendre aucune des valeurs :

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_p$$

Si on substitue $f(z)$ à la place de x dans l'équation (8), il est clair que les intégrales de ces équations seront des fonctions zétafuchsiennes de z. Une remarque importante, c'est que ces fonctions zétafuchsiennes peuvent être représentées par une série ordonnée suivant les puissances de t et *toujours convergente*.

Toute fonction algébrique pouvant être regardée comme l'intégrale d'une équation linéaire à coefficients rationnels, le même procédé permet, *si tous les points singuliers sont réels*, d'exprimer

par des fonctions uniformes d'une variable auxiliaire, les coordonnées des points d'une courbe algébrique.

2° Supposons maintenant que tous les points singuliers soient sur différents cercles qui *se coupent en deux points a et b sous des angles commensurables avec* 2π.

Je puis, par un changement de variable très-simple, amener tous les points singuliers à avoir des arguments commensurables.

Soient :

$$a_1, a_2 \ldots\ldots a_p$$

ces points singuliers. Supposons que tous leurs arguments soient multiples de $\frac{2\pi}{n}$; les quantités :

$$a_1^n, a_2^n, \ldots\ldots a_p^n$$

seront réelles. On pourra construire une fonction fuchsienne $f(z)$ ne pouvant prendre aucune des valeurs *réelles*.

$$0, a_1^n, a_2^n, \ldots\ldots a_p^n, \infty$$

Comme $f(z)$ ne peut devenir ni nul, ni infini, $\sqrt[n]{f(z)}$ sera uniforme en z; et comme $f(z)$ ne peut prendre aucune des valeurs :

$$a_1^n, a_2^n, \ldots\ldots a_p^n$$

$\sqrt[n]{f(z)}$ ne pourra prendre aucune des valeurs a_1, $a_2, \ldots\ldots a_p$. Si donc on substitue $\sqrt[n]{f(z)}$ à la place

de x dans l'équation (8), les intégrales de cette équation seront fonctions zétafuchsiennes de z.

3° Nous avons vu plus haut qu'on pouvait toujours construire une fonction fuchsienne ne pouvant devenir égale à aucune des quatre quantités :

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires de ces quantités. On en déduirait, par un raisonnement tout semblable à ceux qui précèdent, que les fonctions zétafuchsiennes permettent d'intégrer toutes les équations linéaires à coefficients rationnels, toutes les fois qu'il n'y a que quatre points singuliers.

14. Tout ce qui est relatif à la convergence des séries (2) et (7) s'applique encore, si le groupe G est un groupe kleinéen quelconque. On peut donc définir des fonctions thétakleinéennes, kleinéennes et zétakleinéennes, analogues aux fonctions thétafuchsiennes, fuchsiennes et zétafuchsiennes, et susceptibles des mêmes applications.

L'intégration d'une équation linéaire pourra, dans un très-grand nombre de cas (1), s'effectuer d'une infinité de manières à l'aide des fonctions zétafuchsiennes et zétakleinéennes; ce qui permet

(1) J'ai démontré dans ma communication du 8 août que les fonctions zétafuchiennes intègrent toutes les équations linéaires à coefficients algébriques.

d'établir entre ces fonctions une infinité de relations que le défaut d'espace ne me permet pas d'étudier dans ce résumé.

15. Une autre application des fonctions fuchsiennes est le calcul des intégrales abéliennes de première espèce. Reprenons, en effet, les deux fonctions fuchsiennes x et y définies au § 8 et liées par la relation (5).

Soit :

$$\int g(x, y)\, dx$$

une intégrale abélienne de première espèce quelconque. Ce sera une fonction de z que j'appellerai $G(z)$. On démontre aisément que si le groupe G est de la 1re, de la 2e ou de la 6e familles, $G(z)$ est une fonction holomorphe de z, toutes les fois que z est au-dessus de X; cette fonction jouit de la propriété

$$G(z_k) - G(z) = \text{constante}.$$

Il est clair d'ailleurs que $G(z)$ peut être représenté par une série ordonnée suivant les puissances de t et toujours convergente.

16. Je ne parlerai pas ici des applications arithmétiques des fonctions fuchsiennes, me bornant à renvoyer à mes notes sur les Invariants arithmétiques et sur l'application de la géométrie non-euclidienne à la théorie des formes quadratiques (Association

française pour l'avancement des sciences, Congrès d'Alger). Les Invariants arithmétiques se ramènent très-aisément aux fonctions thétafuchsiennes, et on peut ramener aussi aux groupes fuchsiens les groupes de substitutions linéaires à coefficients entiers, qui reproduisent une forme quadratique ternaire indéfinie à coefficients entiers (1).

(1) Il existe une expression très-simple du genre p de la relation (5). J'appelle $2n$ le nombre des côtés de la 1re sorte, q celui des côtés de la 2e sorte, a celui des cycles formés de sommets de la 1re ou de la 2e catégorie, b celui des cycles formés d'un nombre impair de sommets de la 3e catégorie, c celui des cycles formés d'un nombre pair de sommets de la 3e catégorie; on trouve :

$$2p = n - a + 1$$

pour les fonctions de la 1re, de la 2e et de la 6e famille, et

$$2p = 2n - 2a - 2c - + q - b$$

pour les fonctions des autres familles.