Bulletin de la S. M. F.

H. Poincaré

Sur les fonctions Θ

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 129-134.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__129_0>

Sur les fonctions Θ; par M. H. Poincaré.

(Séance du 20 juillet 1883).

Considérons une fonction Θ à n variables

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma e^{\varphi + m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n},$$

φ représentant une forme quadratique par rapport aux n nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Considérons ensuite n^2 constantes quelconques

$$\begin{array}{llll} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots, & \ldots, \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}. \end{array}$$

Si nous écrivons, pour abréger,

$$\Theta(x_i - a_{1i}) = \Theta(x_1 - a_{11}, x_2 - a_{12}, \ldots, x_n - a_{1n}),$$

et que nous considérions les n équations simultanées

$$(1) \qquad \Theta(x_i - a_{1i}) = \Theta(x_i - a_{2i}) = \ldots = \Theta(x_i - a_{ni}) = 0,$$

on peut se demander combien ces équations ont de systèmes de solutions communes. Je ne considère pas, bien entendu, comme distinctes les solutions congruentes, c'est-à-dire celles qui ne diffèrent entre elles que par des multiples des périodes.

Le problème est résolu dans le cas de $n = 1$, c'est-à-dire dans le cas particulier des fonctions elliptiques; mais je ne crois pas qu'il le soit encore dans le cas général des fonctions abéliennes.

Dans le cas des fonctions elliptiques, la forme φ se réduit à un seul terme

$$\alpha_1 m_1^2,$$

et la fonction Θ à la série

$$\Sigma e^{\alpha_1 m_1^2 + m_1 x_1}.$$

Les équations (1) se réduisent à l'équation unique

$$(2) \qquad \Theta(x_1 - a_{11}) = 0,$$

et cette équation n'admet qu'une solution.

Pour le démontrer, on se sert de la formule de Cauchy qui sert à calculer le nombre des racines d'une équation qui sont intérieures à un contour donné, et l'on applique cette formule au parallélogramme des périodes.

Depuis, M. Kronecker a généralisé la formule de Cauchy de manière à exprimer sous la forme d'une intégrale multiple définie le nombre des solutions communes à un système de n équations à n inconnues, lorsqu'on assujettit ces solutions à être comprises dans un domaine donné.

Malheureusement cette formule ne se prête pas, comme on pourrait le croire au premier abord, à la généralisation immédiate de l'analyse qui donne le nombre des solutions de l'équation (2).

En revanche, elle peut nous conduire indirectement à la solution du problème qui nous occupe. En effet, le nombre cherché des solutions des équations (1) ne pourrait dépendre que des périodes, c'est-à-dire des coefficients de la forme quadratique φ, et je vais démontrer qu'il en est indépendant. Pour obtenir le nombre des solutions distinctes des équations (1), il faut chercher le nombre des solutions comprises dans le *prismatoïde* des périodes, pour nous servir d'une expression qu'a employée, pour la première fois, l'illustre géomètre de Berlin que nous citons en ce moment (*Comptes rendus: Des unités complexes,* 1883). C'est donc à ce prismatoïde qu'il faut appliquer l'intégrale de M. Kronecker. Je dis que cette intégrale qui nous donne le nombre cherché est indépendante des coefficients de φ.

En effet, considérons d'une manière générale l'intégrale de M. Kronecker, appliquée à un système d'équations quelconque et à un domaine quelconque, et supposons que ces équations dépendent de certains paramètres variables. L'intégrale ne pourra cesser d'être une fonction continue de ces paramètres que si l'expression sous le signe $\int$ devient infinie pour un point de la périphérie du domaine considéré. Or cela ne peut arriver que si une des solutions du système d'équations données se trouve sur cette périphérie. Mais notre intégrale représente un nombre positif essentiellement entier, de sorte que, toutes les fois qu'elle sera une fonction continue des paramètres envisagés, elle sera *constante.* Ainsi l'intégrale ne peut varier que si une solution entre dans le domaine ou si elle en sort.

Mais, dans le cas particulier qui nous occupe, en admettant qu'une solution sorte du prismatoïde des périodes, il faudra, en vertu de la périodicité même, qu'une autre solution y entre au même instant, de sorte que l'intégrale de M. Kronecker ne peut jamais varier.

Il suffira donc de résoudre le problème dans un cas particulier pour l'avoir résolu dans le cas général. Or cela est aisé, car nous n'avons qu'à supposer

$$\varphi = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$$

et, en posant alors

$$\theta_i(x_i) = \Sigma e^{\alpha_i x_i^2 + m_i x_i},$$

on aura

$$\Theta = \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_n,$$

de sorte que la fonction Θ se réduira à un produit de fonctions Θ elliptiques.

Les équations (1) se ramènent alors à un certain nombre d'équations de la forme (2), et il est aisé de voir qu'elles admettent $n!$ solutions distinctes. Ainsi, si le nombre des variables est égal successivement à 1, 2, 3, 4, ..., le nombre des solutions des équations (1) sera de 1, 2, 6, 24, ...

Une autre application du même principe va maintenant nous permettre de résoudre un problème un peu plus général.

Considérons un système de $n \times p \times k$ constantes que nous désignerons par la notation

$$a_{ijh},$$

l'indice i variant depuis 1 jusqu'à p, l'indice j depuis 1 jusqu'à n, et l'indice h depuis 1 jusqu'à k. Supposons que l'on ait entre ces quantités les relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{i=p} a_{ij1} = \sum_{i=1}^{i=p} a_{ij2} = \sum_{i=1}^{i=p} a_{ij3} = \ldots = \sum_{i=1}^{i=p} a_{ijk},$$

et cela quel que soit l'indice j.

Soient de plus A_1, A_2, ..., A_k k constantes tout à fait quelconques, et posons

$$H = \sum_{h=1}^{h=k} A_h \prod_{i=1}^{i=p} \Theta(x_j - a_{ijh}).$$

Nous dirons que H est une fonction homogène et de degré p. Cela posé, envisageons n fonctions homogènes

$$H_1, \; H_2, \; \ldots, \; H_n$$

respectivement de degré $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Quel est le nombre des systèmes de valeurs des x qui annulent à la fois ces n fonctions? Le même raisonnement que nous venons de faire montre que ce nombre est constant et indépendant, par exemple, des quantités A_h.

Or, dans le cas où les fonctions H se réduisent à des produits de fonctions Θ, ce nombre est égal à

$$n! \times p_1 p_2 \ldots p_n. \tag{3}$$

Tel est donc le nombre cherché.

Il est à remarquer qu'il peut arriver que les n équations

$$H_1 = H_2 = \ldots = H_n = 0$$

ne soient pas distinctes, c'est-à-dire qu'elles aient, outre un nombre de solutions communes *isolées,* toujours inférieures à l'expression (3), une infinité de solutions communes non isolées les unes des autres.

C'est en particulier ce qui arrive dans le problème de l'inversion de Jacobi, tel qu'on le traite ordinairement.

Demandons-nous maintenant combien il y a de fonctions

$$\Theta(x_i - a_i)$$

qui s'annulent pour n systèmes donnés de valeurs de x_i.

Je représenterai ces n systèmes par la notation

$$x_i = b_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous aurons alors à résoudre les n équations

$$(4) \qquad \Theta(b_{i1} - a_i) = \Theta(b_{i2} - a_i) = \ldots = \Theta(b_{in} - a_i) = 0$$

par rapport aux a_i.

Ces équations, d'après ce qui précède, ont $n!$ solutions communes. Il existe donc $n!$ fonctions Θ qui s'annulent pour n systèmes donnés de valeurs des x.

Si $n > 2$, on a

$$n! > n.$$

Il en résulte que les $n!$ solutions communes des équations (1) ne sont pas indépendantes et qu'il y a entre elles $n! - n$ relations. La connaissance de n d'entre elles suffit pour faire connaître les autres.

Mais, pour se rendre compte de la complication des relations envisagées, il suffit de chercher quel est le nombre des systèmes de $n! - n$ solutions complémentaires qui correspondent à un même système de n solutions données.

On pourra construire $n!$ fonctions Θ qui s'annuleront pour les n solutions données; on en choisira n quelconques; ce choix pourra se faire de

$$(5) \qquad N = \frac{(n! - 1)!}{(n! - n)!}$$

manières. A chacune des combinaisons de n fonctions Θ correspondra un système de $n! - n$ solutions complémentaires. Le nombre de ces systèmes sera donc donné par l'expression (5).

Ce nombre croît très rapidement; pour $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$, on aura successivement

$$N = 20, \quad N = 10626, \quad N > 10^8, \quad N > 10^{14}.$$