point $x = a$, $y = b$ qu'elle admet comme pôle d'ordre $h + 1$, que les modules de périodicité relatifs aux coupures a sont nuls. Le module de périodicité relatif à la coupure b_i sera égal à $\varphi_i^{(h)}(a, b)$, en supposant qu'on ait, dans les environs du point $x = a$, $y = b$,

$$\varphi_i(x, y) = (\xi - a)^{-\frac{n-1}{n}} \left[\varphi_i(a, b) + \frac{(\xi - a)^{\frac{1}{n}}}{1} \varphi_i^{(1)}(a, b) + \dots \right.$$
$$\left. + (\xi - a)^{\frac{h}{n}} \frac{\varphi_i^{(h)}(a, b)}{1.2\dots h} + \dots \right],$$

$\varphi_i(x, y)$ désignant la dérivée de l'intégrale normale de première espèce $u^{(i)}(x, y)$. On le voit en prenant l'intégrale définie $\int Z^{(h)}(a, b)\varphi_i(x, y)\,dx$ le long du contour complet de la surface.

» Les intégrales $Z^{(h)}(\alpha, b)$ jouent absolument le même rôle que les intégrales normales de seconde espèce où le pôle est un point ordinaire, soit dans le théorème de Riemann-Roch, soit dans la théorie générale des fonctions uniformes d'un point analytique (x, y). Elles interviennent en particulier dans l'expression des fonctions rationnelles qui sont les dérivées des intégrales de première espèce; on sait, en effet, que ces dérivées ne peuvent devenir infinies qu'aux points critiques. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur un théorème de Riemann relatif aux fonctions de n variables indépendantes admettant $2n$ systèmes de périodes.* Note de MM. **H. Poincaré** et **E. Picard**, présentée par M. Hermite.

« Les fonctions Θ de n variables indépendantes permettent, comme on sait, de former des fonctions uniformes de n variables avec $2n$ systèmes de périodes. Ces périodes ne sont pas arbitraires, car elles satisfont à $\frac{n(n-1)}{2}$ relations bien connues. Dans une conversation avec M. Hermite, lors de son voyage à Paris, en 1860, Riemann avait affirmé que ces relations devaient nécessairement exister entre les $2n$ systèmes de périodes de fonction uniforme de n variables, $2n$ fois périodique [1], tout au moins après une transformation de degré convenable effectuée sur ces périodes, mais il n'a

[1] M. Hermite a énoncé, d'après Riemann, ce théorème dans une Note faisant suite à la sixième édition du Traité de Lacroix.

jamais indiqué la marche qui l'a conduit à cette importante proposition. M. Weierstrass aurait depuis annoncé à quelques-uns de ses élèves qu'il possédait une démonstration du théorème précédent, mais l'illustre géomètre de Berlin n'a jamais, à notre connaissance, publié ni indiqué la méthode dont il a fait usage.

» La proposition énoncée peut se démontrer aisément à l'aide des considérations suivantes. Soit

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{array}{l} \omega_{11}\,\omega_{12}\ldots\omega_{1,2n},\\ \omega_{21}\,\omega_{22}\ldots\omega_{2,2n},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \omega_{n1}\,\omega_{n2}\ldots\omega_{n,2n} \end{array}\right.$$

un système irréductible de $2n$ périodes simultanées des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On sait, d'après M. Weierstrass (*Monatsbericht*, 1862), qu'entre $(n+1)$ fonctions $2n$ fois périodiques de n variables, existe une relation algébrique; soit, en désignant ces fonctions par u_1, $u_2, \ldots, u_{n+1}$,

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = 0,$$

et l'on peut choisir $(n+1)$ fonctions, de telle sorte que toute autre fonction admettant les mêmes périodes s'exprime rationnellement à l'aide de $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$.

» Cela posé, on établit que les fonctions $u_1, u_2, \ldots, n_n$ satisfont au système d'équations aux différentielles totales

$$\begin{aligned} dx_1 &= \mathrm{P}_{11}\,du_1 + \mathrm{P}_{12}\,du_2 + \ldots + \mathrm{P}_{1n}\,du_n,\\ dx_2 &= \mathrm{P}_{21}\,du_1 + \mathrm{P}_{22}\,du_2 + \ldots + \mathrm{P}_{2n}\,du_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ dx_n &= \mathrm{P}_{n1}\,du_1 + \mathrm{P}_{n2}\,du_2 + \ldots + \mathrm{P}_{nn}\,du_n, \end{aligned}$$

où les P sont fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$.

» $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont donc des intégrales de différentielles totales algébriques admettant le système des périodes (I). Posons maintenant

$$u_1 = \varphi_1(t),\;\; u_2 = \varphi_2(t),\;\; \ldots,\;\; u_n = \varphi_n(t),$$

les φ étant des fonctions rationnelles, absolument arbitraires, d'une variable t; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deviendront des fonctions $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ de la seule variable t, et ce seront des intégrales abéliennes de première espèce correspondant à la relation algébrique entre t et u_{n+1},

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, u_{n+1}) = 0.$$

On remarquera d'abord que ces n intégrales seront linéairement indépendantes, si les φ sont pris d'une manière arbitraire; on voit ensuite que chaque système de périodes correspondantes des intégrales $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sera nécessairement de la forme

$$\begin{array}{l} m_1\omega_{11} + m_2\omega_{12} + \ldots + m_{2n}\omega_{1,2n}, \\ m_1\omega_{21} + m_2\omega_{22} + \ldots + m_{2n}\omega_{2,2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_n\omega_{n1} + m_n\omega_{n,2} + \ldots + m_n\omega_{n,2n}, \end{array}$$

où les m sont des entiers. En écrivant la relation entre les périodes de deux intégrales quelconques X_α et X_β, on aura donc

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{i=2n}\sum_{k=1}^{k=2n} c_{ik}\,\omega_{\alpha i}\,\omega_{\beta k} = 0,$$

les c étant des entiers indépendants de α et β, et l'on a de plus $c_{ii} = 0$, $c_{ik} = -c_{ki}$.

» Le déterminant $|c_{ik}|$ d'ordre $2n$, qui est un déterminant gauche, sera un carré parfait m^2.

» Admettons pour un instant que m ne soit pas nul; on établira sans peine qu'en effectuant sur les périodes ω une transformation d'ordre m, c'est-à-dire en remplaçant les périodes ω par des périodes Ω qui en soient des fonctions linéaires à coefficients entiers de déterminant égal à m, la relation entre les périodes de X_α et X_β devient, quels que soient α et β,

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha,1}\Omega_{\beta,2} - \Omega_{\alpha,2}\Omega_{\beta,1} + \Omega_{\alpha,3}\Omega_{\beta,4} - \Omega_{\alpha,4}\Omega_{\beta,3} + \ldots \\ + \Omega_{\alpha,2n-1}\Omega_{\beta,2n} - \Omega_{\alpha,2n}\Omega_{\beta,2n-1} = 0, \end{aligned}$$

et cette égalité établit le théorème de Riemann.

» Nous avons maintenant à montrer que m ne peut être nul; nous nous appuierons pour cela sur la remarque suivante, qui résulte immédiatement d'un théorème fondamental de Riemann. Si l'on pose

$$\omega_{\alpha i} = A_{\alpha i} + B_{\alpha i}\sqrt{-1},$$

la somme

$$\sum_{i=1}^{i=2n}\sum_{k=1}^{k=2n} c_{ik}\,A_{\alpha i}\,B_{\alpha k}$$

est certainement différente de zéro. Cela admis, nous démontrons que, si le déterminant $|c_{ik}| = 0$, on peut, par une transformation de degré convenable, remplacer le système des ω par un système de Ω, la relation (2)

$$\Omega_{\alpha 1}\Omega_{\beta,2} - \Omega_{\alpha,2}\Omega_{\beta,1} + \ldots + \Omega_{\alpha,2r-1}\Omega_{\beta,2r} - \Omega_{\alpha,2r}\Omega_{\beta,2r-1} = 0,$$

où r est moindre que n. De plus, puisque r est moindre que n, on peut, en considérant une combinaison linéaire convenable de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (laquelle ne peut être identiquement nulle, puisque les X sont linéairement indépendants), supposer, en gardant les mêmes notations, que

$$\Omega_{\alpha,1} = \Omega_{\alpha,3} = \ldots = \Omega_{\alpha,2r-1} = 0;$$

mais, d'après la remarque précédente, si l'on pose

$$\Omega_{\alpha,i} = A_i + B_i\sqrt{-1},$$

la somme

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 + A_3 B_4 - A_4 B_3 + \ldots + A_{2r-1} B_{2r} - A_{2r} B_{2r-1}$$

n'est pas nulle, ce qui nous amène à une contradiction, puisque, ici,

$$A_1 = B_1 = 0, \quad A_3 = B_3 = 0, \quad \ldots, \quad A_{2r-1} = B_{2r-1} = 0.$$

Le déterminant ne peut donc être nul, et la démonstration est complète.

» On déduit immédiatement du théorème qui vient d'être établi cette conséquence bien digne d'intérêt : *toute fonction $2n$ fois périodique de n variables indépendantes peut être exprimée au moyen des fonctions Θ.* »

GÉOMÉTRIE. — *Sur la courbe du quatrième degré à deux points doubles.* Note de M. **Humbert**, présentée par M. Jordan.

« Les coordonnées des points d'une courbe S du quatrième degré, de genre un, peuvent se mettre sous la forme

$$(1) \qquad X_i = A_i P_1(t) + B_i P_2(t) + C_i P_3(t) + D_i P_4(t) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

étant posé

$$(2)\ P_{j+1}(t) = \theta_3\left(t + j\frac{\omega}{n}, \omega, \omega'\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{m^2 i\pi\frac{\omega'}{\omega} + 2mi\frac{\pi t}{\omega}} e^{\frac{mi\pi}{2}} \qquad (j = 0, 1, 2, 3).$$

» On peut écrire, x_1, x_2, x_3 étant fonctions linéaires de X_1, X_2, X_3 :

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = P_1 - P_3 + \lambda(P_1 + P_3), \\ x_2 = P_2 + P_4 + \mu(P_1 + P_3), \\ x_3 = P_2 - P_4 + \nu(P_1 + P_3), \end{cases}$$

λ, μ, ν étant des constantes.