» Théorème VII. — *Soit* N *un nombre de la forme* $8k+5$; *alors*

$$2\Sigma(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s\mathrm{F}(2\mathrm{N}-s^2) = \Sigma(x^2-y^2).$$

» La sommation, dans le second membre, doit s'étendre à toutes les solutions de l'équation $2\mathrm{N} = x^2+y^2$, x^2 étant un carré de la forme $8k+9$, y^2 un carré de la forme $8k+1$.

» Dans ces formules, le second membre devient égal à zéro toutes les fois qu'il n'y a pas de représentation de 2N ou de N par la forme indiquée. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les équations algébriques.* Note de M. H. Poincaré, présentée par M. Hermite.

« J'ai obtenu, au sujet de la règle des signes de Descartes, un résultat qui présente les plus grandes analogies avec un théorème important de M. Laguerre.

» Soit $\mathrm{F}(x) = 0$ une équation algébrique qui a p racines positives. On peut toujours trouver un polynôme $\Phi(x)$ tel que le produit $\mathrm{F}.\Phi$ n'ait que p variations. Il en résulte, d'ailleurs, que l'équation $\Phi(x) = 0$ n'a pas de racine positive.

» En effet, je puis mettre F sous la forme $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3\mathrm{F}_4$.

» F_1 est un produit de facteurs linéaires $x+a$, où a est réel positif.

» F_2 est un produit de facteurs quadratiques $x^2+2\alpha x+\beta^2$, où α et β sont réels positifs et α plus petit que β. Le produit $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$ n'a évidemment pas de variations.

» F_3 est un produit de facteurs quadratiques $x^2-2\alpha x+\beta^2$, où α et β sont positifs et α plus petit que β. Je pourrai alors poser

$$\alpha = \beta\cos\varphi,$$

φ étant un angle compris dans le premier quadrant et tel, par conséquent, que $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ et $\sin 2\varphi$ soient positifs. Soit n un nombre entier tel que $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$, $\sin 3\varphi$, ..., $\sin(n-1)\varphi$, $\sin n\varphi$ soient positifs et $\sin(n+1)\varphi$ négatif. Posons

$$\theta = \beta^{n-1}\sin\varphi + \beta^{n-2}x\sin 2\varphi + \beta^{n-3}x^2\sin 3\varphi + \ldots + x^{n-1}\sin n\varphi.$$

Le produit

$$\theta(x^2-2\alpha x+\beta^2) = \beta^{n+1}\sin\varphi - \beta x^n\sin(n+1)\varphi + x^{n-1}\sin n\varphi$$

n'a pas de variations. Si donc Φ_3 est le produit de tous les facteurs, tels que θ, le produit $F_1 F_2 F_3 \Phi_3 = \psi$ n'aura pas de variations. Supposons que ψ soit un polynôme d'ordre $q-1$.

» Considérons maintenant le quatrième facteur de F, c'est-à-dire F_4; c'est un produit de facteurs linéaires de la forme $x-a$, a étant positif, et ces facteurs sont par hypothèse au nombre de p,

$$F_4 = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_p).$$

» Posons

$$F_4\Phi_4 = (x^q - a_1^q)(x^q - a_2^q)\ldots(x^q - a_q^p),$$

ce sera un polynôme de degré pq qui aura p variations et où manqueront les termes dont l'exposant n'est pas divisible par q. Le produit $\psi F_4 \Phi_4$ sera alors de degré $(p+1)q-1$, et aura, par conséquent, $(p+1)q$ coefficients. Il est évident qu'on rencontrera successivement q coefficients positifs, puis q coefficients négatifs, puis q coefficients positifs et ainsi de suite, de sorte que le produit en question présentera p variations.

» Mais nous pouvons écrire

$$\psi F_4 \Phi_4 = F.\Phi, \quad \text{où} \quad \Phi = \Phi_3 \Phi_4.$$

» Le résultat énoncé est donc démontré. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce* (1). Note de M. **Appell**, présentée par M. Bouquet.

« Soit $\varphi(z)$ une fonction uniforme de z satisfaisant à deux relations de la forme

$$(1) \qquad \varphi(z+2K) = e^{az+b}\varphi(z), \quad \varphi(z+2iK') = e^{a'z+b'}\varphi(z);$$

on pourra toujours, en posant

$$f(z) = e^{\lambda z^2 + \lambda' z}\varphi(z)$$

déterminer λ et λ', de telle façon que l'on ait

$$(2) \qquad f(z+2K) = f(z), \quad f(z+2iK') = e^{Az+B}f(z),$$

(1) Voir différentes Notes de M. Hermite dans les *Comptes rendus* des années 1861 et 1862. Voir aussi la Thèse d'Analyse présentée à la Faculté des Sciences de Paris par M. Biehler, avril 1879.