1884BuAsI...1..319P

rieurs. Une des conséquences de ses recherches le conduit à émettre l'hypothèse qu'une planète peut donner naissance à un satellite par la séparation d'une portion de la protubérance équatoriale, satellite qui s'éloignerait ensuite progressivement de la planète mère, à mesure du ralentissement de la rotation, dû à la réaction des marées, et finirait par atteindre une position d'équilibre. Bien que cette conception ne paraisse pas pouvoir être étendue à l'explication de l'origine des planètes elles-mêmes, elle peut jouer un rôle important dans les développements d'une hypothèse cosmogonique plus générale, parce qu'elle peut être appelée à expliquer certaines anomalies qui, dans la réalité, troublent l'harmonie générale des mouvements sur laquelle repose toute hypothèse.

En effet, il ne faut pas oublier que les orbites de certaines planètes, comme Mercure, Pallas, ont des inclinaisons très fortes sur le plan de l'équateur solaire; que les équateurs de plusieurs grosses planètes font des angles souvent considérables avec les plans des orbites; qu'enfin certains satellites ont leurs orbites très fortement inclinées sur le plan de l'orbite de la planète. Il semble impossible qu'une même cause originelle, agissant dans sa simplicité primitive, puisse rendre compte de ces anomalies : le système planétaire, né suivant une hypothèse quelconque, présente forcément à l'origine une harmonie de mouvements presque parfaite. C'est par l'action de perturbations ultérieures qu'on pourra expliquer les déviations réelles; et le développement d'une hypothèse ne sera complet que lorsqu'elle sera arrivée à rendre compte de ces anomalies d'une manière mathématique, ou tout au moins à en montrer la possibilité. Mais, en attendant ce couronnement final, il ne me paraîtrait pas sage de faire de ces cas exceptionnels une objection renversante contre une hypothèse, attendu que toutes y sont nécessairement sujettes.

(*A suivre.*)

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. H. POINCARÉ.

Pour qu'une série puisse être utilisée en Astronomie, il n'est pas nécessaire, comme l'a remarqué M. Tchebichef, qu'elle soit convergente, au sens donné à ce mot par les géomètres : il suffit que

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1884BuAsI...1..319P

l'erreur commise, en s'arrêtant à un certain terme de la série, reste pendant quelque temps inférieure à une quantité suffisamment petite. C'est grâce à cette circonstance que les séries habituellement employées en Mécanique céleste, qui presque toutes sont divergentes, représentent très sensiblement le mouvement des astres. Cependant, il est souvent utile, si l'on veut se rendre compte du temps pendant lequel on pourra compter sur une approximation donnée, de rechercher les conditions de convergence des séries qu'on emploie. C'est pourquoi il ne sera peut-être pas sans intérêt d'étudier ici les différentes circonstances que peut présenter la convergence de séries trigonométriques.

Considérons une série de la forme suivante :

$$\Sigma A_n \sin(\alpha_n t + \beta_n) = \varphi(t), \tag{1}$$

que nous supposerons convergente pour certaines valeurs de t. Elle peut être ou bien absolument convergente ou semi-convergente.

Laissons d'abord de côté les cas de semi-convergence et supposons que, toutes les fois que t satisfait aux inégalités

$$-\tau < t < \tau, \tag{2}$$

la série (1) soit absolument convergente, de façon qu'on puisse changer l'ordre des termes sans en altérer la somme.

Il en résultera que les deux séries

$$\Sigma A_n \cos\beta_n \sin\alpha_n t = \tfrac{1}{2}[\Sigma A_n \sin(\alpha_n t + \beta_n) + \Sigma A_n \sin(-\alpha_n t + \beta_n)], \tag{3}$$

$$\Sigma A_n \sin\beta_n \cos\alpha_n t = \tfrac{1}{2}[\Sigma A_n \sin(\alpha_n t + \beta_n) + \Sigma A_n \sin(-\alpha_n t + \beta_n)] \tag{4}$$

seront séparément convergentes et que l'on pourra écrire

$$\Sigma A_n \sin(\alpha_n t + \beta_n) = \Sigma A_n \cos\beta_n \sin\alpha_n t + \Sigma A_n \sin\beta_n \cos\alpha_n t.$$

Si dans la série (4) on fait $t = 0$, on voit que la série $\Sigma A_n \sin\beta_n$ est absolument convergente, ce qui entraîne la convergence de la série (4) elle-même pour toutes les valeurs de t.

Considérons maintenant la série (3). Si nous multiplions le $n^{\text{ième}}$ terme de cette série par le facteur $2\cos\alpha_n t$, qui est plus petit que 2 en valeur absolue, nous obtiendrons la série

$$2\Sigma A_n \cos\beta_n \sin\alpha_n t \cos\alpha_n t = \Sigma A_n \cos\beta_n \sin 2\alpha_n t,$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1884BuAsI...1..319P

qui sera forcément convergente; ce qui montre que la série (3) converge toutes les fois que

$$-2\pi < t < 2\pi.$$

Si donc la série (3) converge pendant un certain intervalle de temps, elle convergera également pendant un intervalle double. En répétant indéfiniment ce raisonnement, on verrait qu'elle doit converger pour toutes les valeurs du temps.

Ainsi, *si la série* (1) *est absolument convergente dans un intervalle de temps si petit qu'il soit, elle le sera pour toutes les valeurs du temps.*

Mais il y a encore une distinction à faire. La convergence peut être *uniforme*, si l'erreur commise, lorsqu'on s'arrête au $n^{\text{ième}}$ terme de la série, reste pour toutes les valeurs du temps inférieure à une certaine quantité ρ_n ne dépendant que de n et tendant vers zéro quand n croît indéfiniment. Il peut arriver aussi que la série converge absolument sans converger uniformément.

Si la série (4) converge absolument, il en est de même de la série $\Sigma A_n \sin \beta_n$, et par conséquent de la série

$$\Sigma |A_n \sin \beta_n|, \tag{5}$$

où j'ai adopté la notation habituelle $|X|$ pour représenter la valeur absolue de X.

Le reste de la série (4) est évidemment plus petit en valeur absolue que le reste ρ_n de la série (5), lequel tend lui-même vers 0, puisque nous venons d'en démontrer la convergence. La série (4) ne peut donc converger qu'uniformément.

Il n'en est pas de même de la série (3) où je poserai, pour abréger,

$$A_n \cos \beta_n = C_n, \quad A_n \sin \beta_n = B_n.$$

On voit aisément en effet que la série

$$2 \sin \frac{t}{3} + 4 \sin \frac{t}{9} + \ldots + 2^n \sin \frac{t}{3^n} + \ldots \tag{6}$$

converge absolument pour toutes les valeurs de t, mais ne converge pas uniformément.

Voici d'ailleurs quelles sont les conditions nécessaires et suffi-

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1884BuAsI...1..319P

santes de la convergence d'une série de la forme (3). Écrivons-la sous la forme

$$\Sigma\, C_n \sin\alpha_n t = \Sigma\, C_p \sin\alpha_p t + \Sigma\, C_q \sin\alpha_q t,$$

la première des séries partielles du second membre comprenant tous les termes pour lesquels le coefficient α_p est supérieur à une quantité donnée λ et la seconde tous les termes pour lesquels le coefficient α_q est inférieur à cette même quantité. Il faut alors et il suffit que les deux séries

$$\Sigma\,|C_p| \quad \text{et} \quad \Sigma\,|C_q \alpha_q|$$

soient convergentes.

On voit, par l'énoncé de ces conditions, que la série (3) peut converger, bien que la série $\Sigma\,|C_q|$ diverge ou même bien que le coefficient C_q puisse croître au delà de toute limite; c'est ce qui arrive en particulier dans les circonstances suivantes; soit α un élément quelconque du mouvement elliptique d'un astre; on est conduit à l'équation différentielle

$$\frac{d\alpha}{dt} = F,$$

F étant une série trigonométrique du temps dont les coefficients dépendent des divers éléments du mouvement. On trouvera alors comme première approximation pour la variation $\delta\alpha$ de l'élément α, en négligeant les carrés des masses,

$$\delta\alpha = \int_0^t F\,dt.$$

Le second membre se compose, en général, d'un terme séculaire et d'une série trigonométrique. Pour certaines valeurs *incommensurables* du rapport des moyens mouvements, cette série présente une convergence qui n'est pas uniforme. On peut toujours trouver dans un intervalle quelconque, si petit qu'il soit, une infinité de valeurs de ce rapport qui donnent une convergence non uniforme et une infinité de valeurs qui donnent une convergence uniforme.

Lorsqu'une fonction $\varphi(t)$ peut être représentée par une série trigonométrique *uniformément* convergente, en est certain que sa valeur absolue $|\varphi|$ restera finie quand le temps croîtra indéfiniment.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1884BuAsI...1..319P

Il n'en est plus de même lorsque la convergence n'est pas uniforme. On peut démontrer seulement que, quand t croît indéfiniment, le rapport $\frac{|\varphi|}{t}$ tend vers o.

Si une série $\varphi(t)$ n'est pas uniformément convergente, mais que la série obtenue en la différentiant terme à terme converge uniformément, cette série représentera la dérivée $\frac{d\varphi}{dt}$ et le rapport $\frac{\varphi}{t}$ tendra vers zéro quant t croîtra indéfiniment.

Nous pourrons écrire en effet

$$\varphi = \sigma_q + \rho_q,$$

σ_q désignant la somme des q premiers termes de cette série φ. On aura

$$|\sigma_q| < s_q, \quad \left|\frac{d\rho_q}{dt}\right| < r_q,$$

s_q et r_q étant des constantes ne dépendant que de q. De plus, par hypothèse, on peut prendre q assez grand pour que r_q soit aussi petit que l'on veut. On aura alors

$$|\varphi| < s_q + r_q t,$$

ce qui montre que la limite du rapport $\frac{|\varphi|}{t}$ pour t infini est certainement plus petite que r_q et par conséquent qu'elle est nulle, puisque r_q peut être pris aussi petit que l'on veut.

Il en sera encore de même si la série $\varphi(t)$ est la somme de deux autres dont l'une est uniformément convergente et dont l'autre a sa dérivée uniformément convergente. Comme exemple de pareilles séries, je puis citer la série (1) elle-même, que je puis écrire

$$\varphi(t) = \Sigma \mathrm{B}_n \cos\alpha_n t + \Sigma \mathrm{C}_p \sin\alpha_p t + \Sigma \mathrm{C}_q \sin\alpha_q t, \tag{7}$$

en supposant que les coefficients α_p sont tous plus grands qu'une quantité λ et les coefficients α_p tous plus petits que λ. Il arrive alors que les deux premières séries du second membre de l'identité (7) convergent uniformément ainsi que la dérivée de la troisième.

Comme second exemple citons la série

$$\varphi_1(t) = \Sigma \mathrm{C}_q \sin^2\alpha_q t,$$

en supposant que $\Sigma|\mathrm{C}_q|$ diverge et que $\Sigma|\mathrm{C}_q\alpha_q|$ converge.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1884BuAsI...1..319P

La dérivée $\frac{d\varphi_1}{dt} = \Sigma C_q \alpha_q \sin 2\alpha_q t$ convergera uniformément.

Dans l'un et dans l'autre cas, le rapport $\frac{\varphi}{t}$ et $\frac{\varphi_1}{t}$ tend vers zéro pour t infini.

Posons maintenant

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(t) \sin \alpha_m t \, dt, \quad \theta(t) = \int_0^t \varphi(t) \cos \alpha_m t \, dt.$$

Nous supposerons que la série $\varphi(t)$ contient des termes en $\sin \alpha_m t$ et en $\cos \alpha_m t$ et que α_m soit plus grand que λ, de telle sorte que ce coefficient se trouve parmi ceux que nous avons appelés plus haut α_p. Il viendra

$$\begin{aligned} 2\psi(t) = {} & 2\sum \frac{B_n}{\alpha_n \pm \alpha_m} \sin^2 \frac{\alpha_n \pm \alpha_m}{2} t \\ & + \sum \frac{C_p}{\alpha_m \pm \alpha_p} \sin(\alpha_m \pm \alpha_p) t + C_m t + \frac{\cos \alpha_m t}{\alpha_m} \Sigma C_q \sin \alpha_q t \\ & + \sum \frac{C_q \alpha_q}{\alpha_m (\alpha_q \pm \alpha_m)} \sin(\alpha_m \pm \alpha_q) t. \end{aligned}$$

Toutes les séries qui entrent dans le second membre de cette relation sont des séries trigonométriques dont les dérivées sont uniformément convergentes. Si donc on divise par t un quelconque des termes de ce second membre (à l'exception du terme séculaire $C_m t$), la limite du quotient est nulle pour t infini. On déduit de là l'égalité

$$\lim \frac{|\psi|}{t} = \frac{|C_m|}{2}, \quad \text{pour } t = \infty.$$

On trouverait de même

$$\lim \frac{|\theta|}{t} = \frac{|B_m|}{2};$$

d'où la conséquence suivante :

Il est impossible que la valeur absolue $|\varphi|$ de la série $\varphi(t)$ reste constamment inférieure à $\frac{|C_m|}{2}$ ou à $\frac{|B_m|}{2}$.

On peut tirer de là quelques conclusions importantes. Parmi les séries de la forme (3), il peut y en avoir qui, quoique con-

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1884BuAsI...1..319P

vergentes, ont des coefficients plus grands que toute quantité donnée.

Telle est par exemple la série (6) dont le $n^{\text{ième}}$ coefficient est égal à 2^n. Il en résulte que la somme de ces séries peut croître avec le temps *au delà de toute limite*. Ainsi, pour démontrer qu'un système de k corps est *stable*, il ne suffit pas de faire voir que les distances mutuelles de ces corps peuvent être représentées par des séries trigonométriques convergentes, il faut encore que la convergence soit *uniforme*.

Une autre conséquence, c'est que la somme d'une série trigonométrique ne peut être constamment nulle, sans que tous les coefficients soient nuls, puisque cette somme ne peut rester constamment inférieure en valeur absolue à la moitié d'un quelconque des coefficients. Il en résulte encore qu'une même fonction ne peut être représentée par deux séries trigonométriques différentes, sans quoi la différence de ces deux séries aurait une somme nulle sans que tous les coefficients soient nuls.

Il peut se faire qu'une série trigonométrique, après avoir représenté une fonction dans un intervalle donné, représente une fonction toute différente dans un autre intervalle. C'est ce qui arrive, par exemple, aux séries que M. Callandreau a employées pour le calcul du mouvement de (103) Héra; mais une pareille difficulté n'est pas à craindre avec les séries habituellement employées, qui sont généralement choisies de façon à satisfaire formellement aux équations différentielles du mouvement. C'est ainsi que les séries de M. Lindstedt, en les supposant absolument convergentes, représenteraient les distances mutuelles des astres pour toutes les valeurs du temps.

Jusqu'ici nous avons supposé que les séries que nous considérions étaient absolument convergentes. Il reste à examiner le cas de la semi-convergence qui peut se présenter dans des circonstances trop variées pour que je les énumère toutes ici. Je me bornerai au cas suivant qui me paraît être le seul qu'on puisse rencontrer dans les applications. Soit

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots$$

une série *absolument* convergente dont chaque terme est lui-même la somme d'une série trigonométrique absolument convergente. Il

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1884BuAsI...1..319P

peut arriver que, lorsqu'on a affaire à une série de cette forme, il soit impossible de changer l'ordre des termes sans altérer la convergence; il y a alors semi-convergence.

On peut être conduit à une pareille série dans l'application de la méthode des approximations successives. Supposons qu'en négligeant les carrés des masses on soit conduit à une série trigonométrique s_1. Quand on tiendra compte ensuite des carrés, en négligeant les cubes, on verra qu'il faut ajouter à la série s_1 une autre série trigonométrique s_2, et ainsi de suite. On sera ainsi amené à une série

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots,$$

qui devra converger si la méthode peut donner une approximation indéfinie. C'est ce qui arrive dans la méthode de M. Lindstedt et dans d'autres analogues.

Ces séries peuvent converger dans un petit intervalle de temps sans converger pour toutes les valeurs de t. Je citerai comme exemple la série

$$2 \sin^2 t - 4 \sin^4 t + 8 \sin^6 t - \ldots + (-1)^{n+1} 2^n \sin^{2n} t + \ldots,$$

dont chaque terme peut manifestement s'écrire sous forme de série trigonométrique et qui n'est convergente que si

$$t < \log \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

J'ai lieu de penser que les séries de M. Lindstedt sont semi-convergentes de la façon que je viens de dire, mais non absolument convergentes, d'où il résulterait qu'elles ne représenteraient les distances mutuelles que pendant un intervalle de temps limité.

En résumé :

La convergence d'une série trigonométrique peut être ou ne pas être *absolue*. Si elle est absolue, elle a lieu pour toutes les valeurs du temps. Si, au contraire, la série n'est que semi-convergente, cette semi-convergence ne subsistera en général que pendant un certain intervalle de temps.

Si la convergence est absolue, elle peut être ou ne pas être

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1884BuAsI...1..319P

uniforme. Si elle est uniforme, la fonction représentée par la série restera inférieure à une certaine limite; dans le cas contraire, cette fonction pourra croître indéfiniment.

Enfin une même fonction ne peut être représentée que d'une seule manière par une série trigonométrique absolument convergente.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. A. D'ABBADIE a M. TISSERAND.

On verra bientôt le jour où un réseau géodésique ne sera pas regardé comme achevé sans l'adjonction des latitudes astronomiques pour tous les sommets de ses triangles. Ce travail complémentaire demandera l'aide des volontaires de la Science et il en résultera bien des documents pour l'étude, encore si peu avancée, des attractions locales. Peut-être trouvera-t-on ainsi en France un fait analogue à cette anomalie, unique encore, que les astronomes russes ont signalée autour de Moscou.

Comme les grands cercles divisés ne peuvent guère être transportés sur des sommités souvent peu accessibles, on préférera employer un instrument qui permette de déterminer la latitude par les simples lectures d'un micromètre. La lunette zénithale joint à cet avantage celui d'être à l'abri de toute erreur dans la réfraction, mais les différentes lunettes de ce genre, proposées jusqu'ici, ont le grave inconvénient d'exiger un pilier spécial. C'est donc avec raison qu'on s'est borné à employer une lunette mobile munie d'un niveau à bulle d'air et destinée à observer les différences de déclinaison de deux étoiles qui, s'éloignant peu de la même ascension droite, culminent à des hauteurs à peu près égales, l'une au nord, l'autre au sud du zénith. Comme cette méthode a été employée avec succès par M. Talcott dans le Coast Survey, on lui en a attribué l'invention.

Ayant appris qu'elle était primitivement due à Pierre Horrebow et ne pouvant en retrouver la citation, j'ai invoqué l'aide de M. C.-F. Pechüle, l'astronome danois bien connu. Voici ce qu'il a bien voulu m'écrire à ce sujet de Copenhague :

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System