viens de donner une solution particulière, assez étendue pour se prêter aux conditions les plus ordinaires des applications, et la solution d'un problème analogue, dans lequel on suppose données les valeurs de la fonction et d'un certain nombre de ses premières dérivées, pour une valeur particulière de la variable. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une généralisation des fractions continues.* Note de M. H. POINCARÉ, présentée par M. Hermite.

« Il existe, pour l'approximation simultanée de plusieurs quantités, des procédés dont Lejeune-Dirichlet et M. Kronecker ont donné une théorie très générale. Toutefois il peut y avoir encore quelque intérêt à étudier spécialement et en détail quelques-uns de ces procédés. C'est ce qui m'engage à signaler un mode particulier d'approximation, qui, à côté de certains inconvénients, présente l'avantage d'une grande simplicité et d'une interprétation géométrique facile.

» Rappelons d'abord l'interprétation géométrique des fractions continues que j'ai donnée dans le XLVII^e Cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*. Soit α la quantité dont il s'agit d'approcher. Construisons le réseau à la Bravais, à maille carrée, dont tous les sommets ont pour coordonnées des nombres entiers. Il s'agit de trouver sur ce réseau des points qui se rapprochent beaucoup de la droite $y = \alpha x$. Le réseau peut être engendré par une infinité de parallélogrammes, de surface 1, qui peuvent lui servir de maille. Choisissons un d'entre eux OABC, qui soit tout entier dans le premier quadrant et qui soit traversé par la droite $y = \alpha x$. Cette droite sortira du parallélogramme par le côté AB ou par le côté BC; supposons que ce soit par le côté AB, soit D le point symétrique de O, par rapport au milieu de AB. Le parallélogramme OADB jouira des mêmes propriétés que le parallélogramme OABC. On obtiendra ainsi une suite indéfinie de parallélogrammes jouissant de ces propriétés. Ce sont les côtés communs à deux ou à plusieurs de ces parallélogrammes qui correspondent aux réduites.

» Soit maintenant à approcher simultanément de deux quantités positives α et β. Construisons la droite $y = \alpha x$, $z = \beta x$. Envisageons l'assemblage à la Bravais dont tous les sommets ont leurs trois coordonnées entières. Il y aura une infinité de parallélépipèdes, de volume 1, qui pourront servir de maille à cet assemblage. Soient A, B, C trois sommets du réseau, tels que le tétraèdre OABC ait pour volume $\frac{1}{6}$. Complétons les parallélogrammes

OADB, OBEC, OCFA, puis le parallélépipède OABCDEFG. Ce dernier pourra servir de maille à l'assemblage. Nous supposerons que la droite $y = \alpha x$, $z = \beta x$ est à l'intérieur du trièdre OABC. Nous diviserons ensuite ce trièdre en six autres : OADG, OAGF, OCFG, OEGC, OGEB, OBDG. Nous conserverons celui de ces trièdres qui contient la droite $y = \alpha x$, $z = \beta x$ et sur lequel nous opérerons comme sur le trièdre OABC. On sera ainsi conduit à une suite indéfinie de trièdres de plus en plus petits et contenant tous la droite $y = \alpha x$, $z = \beta x$.

» Pour traduire ce qui précède dans le langage analytique, appelons m, n, p; m', n', p'; m'', n'', p'' les coordonnées des points A, B, C. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} m & m' & m'' \\ n & n' & n'' \\ p & p' & p'' \end{vmatrix} = 1$$

et les trois déterminants

$$A = \begin{vmatrix} 1 & m' & m'' \\ \alpha & n' & n'' \\ \beta & p' & p'' \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} m & 1 & m'' \\ n & \alpha & n'' \\ p & \beta & p'' \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} m & m' & 1 \\ n & n' & \alpha \\ p & p' & \beta \end{vmatrix}$$

seront positifs. En supposant que ces trois déterminants soient rangés par ordre de grandeur décroissante, les coordonnées des trois points A_1, B_1, C_1 qui joueront le même rôle que les trois sommets A, B, C dans le trièdre suivant seront

$$\begin{vmatrix} m & m + m' & m + m' + m'' \\ n & n + n' & n + n' + n'' \\ p & p + p' & p + p' + p'' \end{vmatrix}.$$

Les déterminants qui joueront le même rôle que les trois déterminants A, B et C auront pour valeurs

$$A - B, \quad B - C, \quad C,$$

d'où la règle analytique suivante : on range les trois déterminants A, B, C par ordre de grandeur décroissante, puis on retranche le second du premier et le troisième du second, puis on opère de même sur les trois nouveaux déterminants obtenus, et ainsi de suite.

» Cette règle s'étend immédiatement à l'approximation simultanée de

n quantités. Il est aisé d'évaluer l'ordre de l'approximation. Supposons que les coordonnées $m, n, p, \ldots$ soient de l'ordre d'une quantité très grande t, les déterminants A, B, C seront de l'ordre de $\frac{1}{t}$.

» Remarquons, en terminant, qu'on pourrait partager le trièdre OABC d'après d'autres lois moins simples, mais qui pourraient être plus appropriées à certains buts spéciaux. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles*. Note de M. G. **Kœnigs**, présentée par M. Darboux.

« L'équation fonctionnelle $f[\varphi(z)] = 1 + f(z)$ a été étudiée par Abel : elle a occupé en 1882 M. Korkine; on lui ramène aisément l'équation fonctionnelle $f[\varphi(z)] = a f(z)$ rencontrée par M. Schrœder, et qui a été l'objet d'un travail récent de M. Farkas.

» Je me suis attaché à réduire au nombre strictement nécessaire les hypothèses faites par mes prédécesseurs. Dans un premier travail paru au *Bulletin des Sciences mathématiques* en 1883, comme dans les recherches que j'ai l'honneur de soumettre à l'Académie, j'ai tâché de montrer que l'holomorphisme de la fonction $\varphi(z)$ dans le domaine d'un point limite suffisait pour établir les résultats antérieurement obtenus, ainsi que ceux que je vais mentionner.

» Si $\varphi_p(z)$ représente l'opération $\varphi(z)$ effectuée p fois, et x un point limite, le rapport $\frac{\varphi_p(z) - x}{[\varphi'(x)]^p}$ a pour limite une fonction $B(z)$ *holomorphe dans tout l'intérieur d'un cercle* c_x de centre x. *La fonction* $B(z)$ *est une solution de l'équation de M. Schrœder,* dans laquelle $a = \varphi'(x)$. Les *solutions de cette équation fonctionnelle qui sont homolorphes ou méromorphes au point* x *coïncident, dans le cercle* c_x, *avec une puissance entière de* $B(z)$, à un facteur constant près.

» L'équation d'Abel n'admet aucune solution holomorphe ou méromorphe au point x; mais elle en possède une, *et une seule*, à une constante additive près, qui présente en x une singularité logarithmique, c'est $b(z) = \frac{\log B(z)}{\log \varphi'(x)}$.

» La fonction $b(z)$ permet alors de former, à l'aide d'une fonction périodique arbitraire, la solution générale des équations d'Abel et de M. Schrœder dans le cercle c_x.