une série d'observations faites au passage inférieur, entre deux séries faites au passage supérieur, ou inversement.

» Nous avons l'intention, dans une Communication ultérieure, de discuter les résultats fournis par l'équation (2) et d'examiner quelles sont les limites des erreurs que l'on peut craindre dans l'application de la méthode. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les résidus des intégrales doubles.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Il y a le plus grand intérêt à tenter de généraliser les théories de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires et les résidus des fonctions d'une variable : c'est l'objet des considérations suivantes :

» Soient

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = z + it$$

deux variables imaginaires et

$$F(\xi, \eta) = P + iQ$$

une fonction de ces variables. Posons maintenant, pour définir le contour d'intégration,

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v), \qquad t = \varphi_4(u, v),$$

u et v étant deux paramètres arbitraires réels. Soient maintenant $[X, Y]$, $[X, Z]$, ... diverses fonctions de x, y, z et t; nous supposerons

$$[X, Y] = -[Y, X], \qquad [X, X] = 0.$$

Soit

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}$$

le déterminant fonctionnel de x et y par rapport à u et à v. Considérons l'intégrale

$$\begin{aligned}\int\!\!\int \Big\{ & [X, Y]\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + [X, Z]\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} + [X, T]\frac{\partial(x, t)}{\partial(u, v)} \\ & + [Y, Z]\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + [Y, T]\frac{\partial(y, t)}{\partial(u, v)} + [Z, T]\frac{\partial(z, t)}{\partial(u, v)} \Big\} du\, dv.\end{aligned}$$

Quand on permutera u et v, l'intégrale changera de signe; je dirai alors qu'on change le sens de l'intégration. Considérons trois fonctions entières quelconques de x, y, z et t et envisageons-les comme les coordonnées d'un point M dans l'espace. Faisons varier ensuite u et v : si, quelles que soient les fonctions entières considérées, le point M décrit une surface fermée, je dirai que le contour d'intégration est fermé.

» Les conditions d'intégrabilité, c'est-à-dire les conditions pour que l'intégrale soit nulle, toutes les fois que le contour d'intégration est fermé, sont au nombre de quatre. L'une d'elles est

$$\frac{d[X, Y]}{dz} + \frac{d[Y, Z]}{dx} + \frac{d[Z, X]}{dy} = 0,$$

et les autres s'en déduisent par permutation de lettres.

» Nous poserons alors

$$\int\!\!\int F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \int\!\!\int \left[(P + iQ) \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} + (iP - Q) \frac{\partial(x, t)}{\partial(u, v)} \right.$$
$$\left. + (iP - Q) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - (P + iQ) \frac{\partial(y, t)}{\partial(u, v)} \right] du\, dv.$$

Il est aisé de voir que les conditions d'intégrabilité sont remplies.

» J'envisagerai le cas où la fonction $F(\xi, \eta)$ est rationnelle et je l'écrirai sous la forme

$$F(\xi, \eta) = \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\psi(\xi, \eta)\, \theta(\xi, \eta)},$$

en décomposant le dénominateur en ses facteurs.

» Il ne faut pas que la fonction F devienne infinie en un point du contour d'intégration. En exprimant que ψ ou θ s'annule en un point de ce contour, on obtient quatre équations algébriques à quatre inconnues. On doit s'arranger pour que ces quatre équations n'aient aucune solution réelle.

» Je ne puis exposer ici le mode de représentation, grâce auquel on peut s'affranchir de l'hypergéométrie et reconnaître, à l'aide de la Géométrie ordinaire, si l'intégrale, prise le long d'un contour fermé, est réellement nulle. Je me bornerai à indiquer quelles sont les différentes périodes de l'intégrale double, c'est-à-dire les valeurs qu'on obtient en prenant l'intégrale le long d'un contour fermé. Ces périodes sont de trois sortes :

» 1° Les périodes de la première sorte sont égales à $2\pi i H$, H étant une période de première espèce de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi}{\psi(\xi, \eta)\dfrac{d\theta}{d\eta}},$$

relative à la courbe algébrique

$$\theta(\xi, \eta) = 0.$$

De même pour la seconde courbe algébrique,

$$\psi(\xi, \eta) = 0.$$

» 2° Les périodes de la seconde sorte se rapportent aux points d'intersection des deux courbes

$$\psi(\xi, \eta) = 0, \qquad \theta(\xi, \eta) = 0.$$

Elles ont pour valeur

$$\pm 4\pi^2 \frac{i\varphi(\xi, \eta)}{\dfrac{d\psi}{d\xi}\dfrac{d\theta}{d\eta} - \dfrac{d\psi}{d\eta}\dfrac{d\theta}{d\xi}},$$

ξ et η étant les coordonnées du point d'intersection.

» 3° Les périodes de la troisième sorte se rapportent aux points doubles de la courbe

$$\theta(\xi, \eta) = 0.$$

Elles ont pour valeur

$$\pm 4\pi^2 \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\psi(\xi, \eta)\sqrt{\left(\dfrac{d^2\theta}{d\xi\, d\eta}\right)^2 - \dfrac{d^2\theta}{d\xi^2}\dfrac{d^2\theta}{d\eta^2}}},$$

ξ et η étant les coordonnées du point double.

» Ainsi se trouve confirmé, et en même temps complété et précisé, un beau résultat obtenu dernièrement par M. Stieltjes au sujet d'une généralisation des formules de Cauchy et de Lagrange. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des équations linéaires.* Note de M. **E. Goursat**, présentée par M. Hermite.

« On sait comment Riemann a défini les fonctions hypergéométriques au moyen de leurs points de ramification et de leurs exposants de disconti-