a et a' étant deux constantes, C et C' étant arbitraires, et $\varphi(u, v)$ représentant une fonction quadruplement périodique de u et v. Nous avons fait dans la Communication rappelée l'étude complète de ce cas. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les transformations des surfaces en elles-mêmes*. Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« M. Picard a démontré que, si une surface admet une double infinité de transformations birationnelles en elles-mêmes, les coordonnées d'un point de la surface peuvent s'exprimer par des fonctions abéliennes de deux paramètres. Dans certains cas, toutefois, ces fonctions abéliennes peuvent dégénérer en fonctions triplement périodiques, en fonctions elliptiques ou même en fonctions rationnelles.

» J'ai retrouvé le même résultat par une autre voie, et ma démonstration, quoique moins simple et moins directe que celle de M. Picard, me semble néanmoins digne de quelque intérêt, parce qu'elle nous fournit un exemple d'un type de raisonnement qui peut être utile dans d'autres circonstances.

» 1. Les transformations de la surface S en elle-même forment un groupe continu, et ce sont les propriétés les plus connues de ces groupes qui seront mon point de départ. Considérons une des substitutions infinitésimales de ce groupe et les diverses puissances de cette substitution. Ces puissances formeront un sous-groupe dépendant d'un seul paramètre arbitraire t, de sorte que l'une quelconque d'entre elles pourra s'écrire

$$(1)\quad x' = \varphi_1(x, y, z, t), \qquad y' = \varphi_2(x, y, z, t), \qquad z' = \varphi_3(x, y, z, t),$$

φ_1, φ_2 et φ_3 étant rationnels par rapport à x, y, z, mais non par rapport à t. Soient S_1 et S_2 les deux substitutions obtenues en faisant successivement $t = t_1$ et $t = t_2$, *ces deux substitutions seront permutables*. Mais il y a plus, on peut choisir le paramètre t de telle façon que la résultante de S_1 et de S_2 s'obtienne en faisant $t = t_1 + t_2$.

» Soient maintenant (x_0, y_0, z_0) un point quelconque de la surface S; et C la courbe lieu des divers transformés de ce point par les substitutions (1). Ces substitutions transformeront la courbe C en elle-même.

» Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) les transformés de (x_0, y_0, z_0) par S_1, par S_2 et par $S_1 S_2 (t = t_1 + t_2)$. Nous pourrons nous servir, pour définir la substitution S_1, non plus du paramètre t_1, mais des trois paramètres x_1, y_1, z_1 supposés liés par les équations C. Alors (x_3, y_3, z_3) est le transformé de (x_2, y_2, z_2) par S_1; c'est aussi le transformé de (x_1, y_1, z_1) par S_2. Il en résulte que x_3, y_3, z_3 sont des fonctions rationnelles à la fois par rapport à x_1, y_1, z_1, et par rapport à x_2, y_2, z_2, et d'ailleurs symétriques par rapport à ces deux systèmes de quantités. J'écrirai

$$(2)\qquad \begin{cases} x_3 = \psi_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2); \\ y_3 = \psi_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2); \\ z_3 = \psi_3(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2), \end{cases}$$

ψ_1, ψ_2 et ψ_3 étant rationnels.

» D'après ce qui précède, si les deux points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) sont sur la courbe C, il en sera de même du point (ψ_1, ψ_2, ψ_3).

» 2. Je dis maintenant que, si les deux points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) sont sur la surface S sans être sur C, il en sera de même du point

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3).$$

Supposons d'abord, en effet, que le point (x_1, y_1, z_1) restant fixe et demeurant sur C, on fasse varier le point (x_2, y_2, z_2). En exprimant que le point (ψ_1, ψ_2, ψ_3) se trouve sur S, on trouve une relation entre x_2, y_2, z_2, qui est l'équation d'une surface algébrique. Si cette surface se confond avec S, le théorème est démontré; si elle diffère de S, c'est que la courbe C est algébrique, et l'on retombe sur le cas traité par M. Picard dans sa deuxième Note. On raisonnerait de la même façon dans le cas où l'on ferait varier simultanément les deux points.

» Si donc nous regardons x_1, y_1, z_1 comme des paramètres liés par l'équation de la surface S, x_2, y_2, z_2 comme un point donné, x_3, y_3, z_3 comme le point transformé, les équations (2) représenteront un groupe de transformations de S en elles-mêmes, dépendant de deux paramètres. Deux substitutions quelconques de ce groupe sont permutables. Il en résulte que nous pouvons définir une substitution de ce groupe non plus par trois paramètres (x_1, y_1, z_1), mais par deux paramètres indépendants (t_1, u_1), et choisir ces deux paramètres, de telle sorte que la résultante des substitutions (t_1, u_1) et (t_2, u_2) soit $(s_1 + t_2, u_1 + u_2)$.

» Si donc nous considérons x_1, y_1, z_1 comme des fonctions de t_1 et u_1, nous aurons

$$x_1 = f_1(t_1, u_1), \quad y_1 = f_2(t_1, u_1), \quad z_1 = f_3(t_1, u_1),$$
$$x_2 = f_1(t_2, u_2), \quad y_2 = f_2(t_2, u_2), \quad z_2 = f_3(t_2, u_2),$$
$$x_3 = f_1(t_1 + t_2,\ u_1 + u_2),$$
$$y_3 = f_2(t_1 + t_2,\ u_1 + u_2),$$
$$z_3 = f_3(t_1 + t_2,\ u_1 + u_2).$$

» 3. Je dirai que trois fonctions x, y, z de deux variables t et u ont un théorème d'addition, si leurs valeurs pour $t = t_1 + t_2$, $u = u_1 + u_2$ sont des fonctions rationnelles des valeurs qu'elles prennent pour $t = t_1$, $u = u_1$ et pour $t = t_2$, $u = u_2$. Je dis maintenant que, si des fonctions admettent un théorème d'addition, elles sont uniformes dans tout le plan. En effet, leurs valeurs pour $t = 2t_1$, $u = 2u_1$ sont des fonctions rationnelles de leurs valeurs pour $t = t_1$, $u = u_1$. Si donc ces fonctions sont uniformes quand les modules de t et de u sont plus petits que ρ, elles le seront encore quand ces modules sont plus petits que 2ρ, et par conséquent dans tout le plan.

» Ce principe, une fois démontré, peut être souvent très utile. Il peut servir, par exemple, à démontrer rigoureusement le théorème fondamental du Chapitre *Monodromie* de la *Théorie des fonctions abéliennes* de Clebsch. Dans le cas qui nous occupe, il montre que les trois fonctions f_1, f_2 et f_3, qui ont un théorème d'addition, sont uniformes. Les coordonnées d'un point de S peuvent donc s'exprimer par des fonctions uniformes de deux paramètres, d'où il est aisé de déduire le théorème de M. Picard.

» 4. M. Fuchs a cherché les conditions pour que l'intégrale générale d'une équation différentielle n'ait qu'un nombre fini de points singuliers. J'ai fait voir que, pour une équation du premier ordre, ces conditions ne peuvent être remplies que si l'équation peut être ramenée aux équations linéaires, ou bien est intégrable, soit algébriquement, soit par quadratures. Ce qui précède montre qu'il en est encore de même pour les équations d'ordre supérieur. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques.* Note de M. **M. Noether**, présentée par M. Hermite.

« Je vais d'abord expliquer quelques dénominations dont je ferai usage dans les énoncés suivants :