ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe étendue de transcendantes uniformes.* Note de M. H. POINCARÉ, présentée par M. Jordan.

« Soient

$$x_1 = \varphi_1(u), \qquad x_2 = \varphi_2(u), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(u)$$

$n$ fonctions uniformes d'une variable $u$. Soit $m$ un nombre quelconque, mais de module plus grand que 1. Soit ensuite

$$x'_1 = \varphi_1(mu), \qquad x'_2 = \varphi_2(mu), \qquad \ldots, \qquad x'_n = \varphi_n(mu).$$

» Nous disons que ces fonctions $\varphi$ admettent un théorème de multiplication, si l'on a

$$(1) \qquad \begin{cases} x'_1 = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x'_2 = F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_n = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

les fonctions F étant rationnelles.

» Donnons-nous arbitrairement les fonctions F et proposons-nous de rechercher s'il existe des fonctions uniformes $\varphi$ qui satisfassent aux relations (1). Pour cela les fonctions F devront satisfaire à certaines conditions qui s'aperçoivent immédiatement. Imaginons que les fonctions $\varphi$ doivent toutes s'annuler avec $u$. Alors les fonctions F s'annuleront avec les $x$. Si donc on développe les F suivant les puissances croissantes des $x$, le développement commencera par des termes du premier degré. On peut toujours supposer que les termes du premier degré de $F_i$ se réduisent à $\lambda_i x_i$; car, si cela n'était pas, on n'aurait qu'à faire subir aux $x$ un changement linéaire de variables. Nous écrirons donc

$$(2) \quad x'_1 = \lambda_1 x_1 + \theta_1, \qquad x'_2 = \lambda_2 x_2 + \theta_2, \qquad \ldots, \qquad x'_n = \lambda_n x_n + \theta_n,$$

les $\theta$ étant des fonctions rationnelles des $x$ dont le développement commence par des termes du second degré.

» Il faut alors qu'un au moins des $\lambda$, $\lambda_1$ par exemple, soit égal à $m$.

» 1° Supposons d'abord que tous les $\lambda$ soient égaux à $m$,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = m,$$

et proposons-nous de trouver $n$ séries

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 u + \beta_1 u^2 + \gamma_1 u^3 + \ldots, \\ x_2 = \alpha_2 u + \beta_2 u^2 + \gamma_2 u^3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \alpha_n u + \beta_n u^2 + \gamma_n u^3 + \ldots \end{cases}$$

qui satisfassent formellement aux équations (2).

» On reconnaîtrait sans peine qu'il en existe une infinité et que l'on peut même choisir arbitrairement les $n$ coefficients de $u$,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n.$$

» Comparons maintenant ces séries aux séries (3 *bis*), auxquelles conduisent les équations

$$(2\,bis)\qquad \begin{cases} x'_1 = |m|\,x_1 + \dfrac{|m|\,b\mathrm{S}^2}{1 - b\mathrm{S}}, \\ x'_2 = |m|\,x_2 + \dfrac{|m|\,b\mathrm{S}^2}{1 - b\mathrm{S}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_n = |m|\,x_n + \dfrac{|m|\,b\mathrm{S}^2}{1 - b\mathrm{S}}, \end{cases}$$

$$\mathrm{S} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

» On pourra prendre $b$ assez grand pour que chaque terme du développement de $\frac{|m|\,b\mathrm{S}^2}{1 - b\mathrm{S}}$ soit positif et plus grand que les termes correspondants de $\Theta_1$, de $\Theta_2$, ..., de $\Theta_n$. Dans ces conditions, chaque terme des séries (3) sera plus petit que le terme correspondant des séries (3 *bis*). Or il est aisé d'obtenir ces dernières, qui sont des fonctions rationnelles très simples.

» Les séries (3 *bis*) et, par conséquent, les séries (3) sont donc convergentes. Il existe donc des fonctions qui satisfont aux équations (2); je dis qu'elles sont uniformes. En effet, si elles le sont dans un cercle de rayon $\rho$, elles le seront dans un cercle de rayon $|m|\,\rho$ et, par conséquent, dans tout le plan.

» 2° $\lambda_1$ est égal à $m$, les autres $\lambda$ sont différents de $m$; je suppose, de plus, qu'aucun d'eux n'est une puissance entière de $m$.

» Il existe encore ici des séries (3) qui satisfont formellement aux équations (2), mais on ne peut plus choisir arbitrairement les coefficients $\alpha$.

Le premier d'entre eux, $\alpha_1$, reste seul arbitraire, les $n-1$ autres doivent être nuls.

» Pour en démontrer la convergence, il faut comparer, comme plus haut, les équations (2) à des équations (2 *bis*) convenablement choisies. Nous prendrons

$$(2\ bis)\qquad x'_i = hx_i + \theta',$$

$$\theta' = \frac{hbS^2}{1-bS},\qquad S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

» On pourra prendre le nombre positif $b$ assez grand pour qu'un terme quelconque de $\theta'$ soit positif et plus grand que le terme correspondant de $\Theta_i$, et le nombre positif $h$ assez petit, quoique plus grand que 1, pour que

$$h^p - h < |\lambda_i^p - m|.$$

» On démontrera ensuite, comme plus haut, que les séries (3) sont convergentes et définissent des fonctions uniformes dans tout le plan.

» Nous sommes donc conduits à une classe très étendue de transcendantes uniformes qui admettent un théorème de multiplication où les fonctions rationnelles F restent arbitraires dans une très large mesure. On reconnaîtrait sans peine qu'une pareille fonction uniforme peut toujours être regardée comme le quotient de deux fonctions entières jouissant de propriétés analogues.

» Ces transcendantes contiennent comme cas particuliers les fonctions elliptiques, les fonctions $\Theta$ et les transcendantes obtenues en égalant à zéro toutes les variables, moins une, dans une fonction abélienne. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la série de Maclaurin dans le cas d'une variable réelle. Application au développement en série du potentiel d'un corps homogène.* Note de M. **O. Callandreau**, présentée par M. Tisserand.

« Supposons d'abord que les coefficients de la série

$$(1)\qquad f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(0) + \ldots$$

soient tous positifs; qu'ils ne croissent pas à partir d'un certain rang; qu'on ait établi la légitimité de la représentation de la fonction $f(x)$ par la série ci-dessus, pour les valeurs positives de $x$ inférieures ou égales à un nombre