JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

CINQUANTE-SIXIÈME CAHIER.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, N° 55.

1886

Journal de l'École Polytechnique. — 56 Cahiers in-4, avec figures, 1794-1886. . . . . 1000 fr.

Les Cahiers suivants se vendent séparément :

VII^e et VIII^e. Chaque cahier.	8 fr. » c.		XXXI^e.	9 fr.	» c.
IX^e comprenant la Théorie des fonctions analytiques, par Lagrange	7	»	XXXII^e.	5	»
			XXXIII^e.	9	»
			XXXIV^e et XXXV^e.	10	»
XI^e.	12	»	XXXVI^e et XXXVII^e. . . .	10	»
XII^e.	12	»	XXXVIII^e et XXXIX^e . . .	8	»
XIII^e.	8	»	XL^e à XLIII^e.	10	»
XIV^e	10	»	XLIV^e à XLVIII^e.	12	»
XVI^e et XVII^e.	8	»	XLIX^e.	12	»
XXI^e et XXII^e.	8	»	L^e.	12	»
XXIII^e.	6	»	LI^e.	12	»
XXIV^e.	7	»	LII^e.	12	»
XXV^e et XXVI^e.	8	»	LIII^e.	12	»
XXVII^e.	9	»	LIV^e.	12	»
XXVIII^e.	7	»	LV^e.	14	»
XXIX^e et XXX^e	5	»	LVI^e.	14	»

Journal de l'École Polytechnique. — **Table des Matières** contenues dans les 37 premiers cahiers, formant 21 volumes, suivie d'une Table générale par noms d'auteurs. In-4. 2 fr

— **Table des Matières** contenues dans les cahiers XXXVIII à LVI, formant 16 volumes, suivie d'une Table générale par noms d'auteurs. In-4. . . . . 1 fr. 50 c.

Répertoire de l'École Polytechnique, depuis l'époque de sa création en 1794, jusqu'en 1853 inclusivement, suivi de la liste des Élèves admis en 1854, avec plusieurs tableaux et résumés statistiques; par M. C.-P. Marielle. Vol. in-8. 5 fr.

Répertoire de l'École Polytechnique de 1855 à 1865, faisant suite au *Répertoire de M. Marielle;* par M. Le Prieur, Trésorier de l'École. Vol. in-8. . . . . 3 fr.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

RECHERCHES

SUR LES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES (¹);

PAR M. MOUTARD.

INTRODUCTION.

Les difficultés dont le problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur continue à rester entouré, malgré les efforts d'illustres géomètres, paraissent tenir surtout à l'absence d'une méthode synthétique qui permette de construire *a priori* toutes les formes imaginables d'intégrales, de les discuter et de les classer, et de pénétrer le lien qui les unit aux équations différentielles correspondantes. C'est cette lacune qu'Ampère a cherché à combler dans son célèbre Mémoire de 1814 (*Journal de l'École Polytechnique,* t. X). Après avoir défini l'intégrale générale par ce caractère qu'elle permît établir, entre les variables indé-

(¹) Nous croyons devoir reproduire la Note de M. Moutard insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 18 avril 1870, à laquelle se reportent les auteurs des deux Mémoires suivants. Le Mémoire dont elle forme l'introduction a été approuvé par l'Académie, sur le Rapport de M. Bertrand, et devait être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers;* mais, le manuscrit ayant été détruit accidentellement, l'auteur, jugeant les indications de l'introduction suffisantes pour permettre de reconstituer les deux premières Parties du Mémoire, n'en a refait que la troisième Partie, qui a été publiée dans un précédent Cahier de ce Journal. (*Note de la Rédaction.*)

pendantes, la fonction et ses dérivées à l'infini, d'autres relations que celles qui sont exprimées par l'équation différentielle proposée et les équations qu'on en déduit par différentiation, il conclut de cette définition que toute intégrale d'une équation différentielle aux dérivées partielles, qui n'est pas composée d'un nombre infini de termes, ne peut être générale, à moins de contenir des arbitraires dont le nombre augmente lorsqu'on différentie.

La question acquiert par là une certaine précision, mais la difficulté de découvrir toutes les expressions susceptibles d'augmenter en nombre par la différentiation subsiste tout entière.

En ne considérant que les fonctions arbitraires proprement dites, dégagées de tout signe d'intégration, et ce qu'il appelle les *intégrales partielles*, contenant des fonctions arbitraires, cette dénomination étant prise dans un sens analogue à celui qu'on donne au mot *dérivées partielles*, Ampère néglige une classe illimitée d'arbitraires susceptibles d'être définies par voie de récurrence, au moyen d'arbitraires d'espèces inférieures. Que l'on conçoive, en effet, une équation différentielle renfermant explicitement des arbitraires d'une certaine espèce, et qui puisse être considérée comme d'un moindre degré de complication que les équations mêmes qu'on se propose d'intégrer, soit parce qu'il n'y entre pas de dérivées d'un ordre aussi élevé, soit parce que les dérivées qui y entrent ne portent pas sur un aussi grand nombre de variables indépendantes, la fonction définie par une pareille équation constituera généralement une nouvelle espèce d'arbitraire dont l'introduction pourra permettre l'intégration des équations plus complexes.

Rien n'indique que dans cette voie il y ait de terme où l'on puisse s'arrêter. Néanmoins la question, telle qu'elle est posée dans le Mémoire de 1814, reste encore bien étendue, et ce n'est pas à cause de son défaut de généralité que la tentative d'Ampère n'a pas jusqu'ici produit, au point de vue purement analytique, les grands résultats que son incontestable valeur philosophique permet d'en espérer (¹). Il semble, au contraire, que, dans

(¹) Depuis que ces lignes ont été écrites, M. Darboux a publié, dans les *Comptes rendus*, deux Notes sur une extension de la méthode de Monge, qui paraît constituer un progrès considérable dans la voie ouverte par Ampère.

l'état présent de l'analyse, il y ait encore avantage à diviser le problème et à compléter la monographie des cas les plus élémentaires. Les résultats les plus particuliers, lorsqu'ils ont acquis un degré suffisant de netteté, deviennent quelquefois l'origine de conceptions vraiment fécondes, et les efforts des plus modestes travailleurs peuvent ainsi faciliter, dans une certaine mesure, l'œuvre de ceux auxquels est réservée la construction des théories générales.

Dans cette pensée, j'ai entrepris l'étude minutieuse de la forme la plus élémentaire dont soit susceptible l'intégrale générale des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, à savoir : celle qui consiste en une relation unique entre les trois variables, deux fonctions arbitraires de quantités distinctes formées explicitement avec les trois variables, et les dérivées en nombre limité de ces fonctions arbitraires, les arbitraires n'entrant d'ailleurs sous aucun signe d'intégration. En écartant ainsi non seulement les arbitraires qui dépendent d'intégrations partielles préalables, mais encore les fonctions arbitraires qu'Ampère nomme *implicites*, et qui sont composées de quantités dont la valeur en x, y, z varie avec la forme qu'on donne à ces fonctions arbitraires, on restreint le problème plus encore qu'on ne s'y attend au premier abord.

On peut démontrer, en effet, et c'est là l'objet de la première Partie de ce Mémoire, que les seules équations aux dérivées partielles du second ordre et à deux variables indépendantes, susceptibles d'admettre une intégrale générale de cette espèce élémentaire et qui ne sont réductibles, par un changement de variables, ni aux équations linéaires de Laplace, ni à l'équation de M. Liouville $\frac{d^2 z}{du\,dv} = e^z$, sont toutes, en exceptant deux cas particulièrement simples, réductibles à la forme

$$\frac{d^2 z}{du\,dv} = \frac{d}{du}(\mathrm{A}e^z) - \frac{d}{dv}(\mathrm{B}e^{-z}),$$

où A et B sont des fonctions des seules variables indépendantes, assujetties elles-mêmes à vérifier certaines conditions.

De plus, l'intégration de cette équation est ramenée à dépendre uniquement de celle d'une équation linéaire de la forme considérée par Laplace, à savoir :

$$\frac{d^2\alpha}{du\,dv} = \frac{dl\mathrm{A}}{dv}\frac{d\alpha}{du} + \mathrm{AB}\alpha.$$

Malgré le caractère restreint de ce premier résultat, j'espère qu'il ne sera pas sans intérêt pour les géomètres, parce qu'il permet de reconnaître en quelque sorte, à première vue, si une équation donnée admet ou non une intégrale générale de la forme élémentaire, et de calculer cette intégrale lorsqu'elle existe. Mais le problème n'est pas borné à l'établissement des conditions auxquelles doit satisfaire l'équation différentielle; ces conditions étant exprimées par des équations aux dérivées partielles d'un ordre d'autant plus élevé qu'on admet un plus grand nombre de dérivées des fonctions arbitraires dans l'équation générale, on est naturellement amené à chercher un moyen de former les équations mêmes qui satisfont à ces conditions. Par cela seul que l'intégration de l'équation la plus générale

$$\frac{d^2 z}{du\,dv} = \frac{d}{du}(\mathrm{A}e^z) - \frac{d}{dv}(\mathrm{B}e^{-z})$$

dépend uniquement de celle de l'équation

$$\frac{d^2\alpha}{du\,dv} - \frac{dl\mathrm{A}}{dv}\frac{d\alpha}{du} - \mathrm{AB}\alpha = 0,$$

la question sera résolue complètement lorsqu'elle le sera pour les équations de Laplace. Je crois avoir atteint ce but, en montrant, dans la seconde Partie de ce Mémoire, comment on peut construire l'équation linéaire la plus générale, susceptible d'être intégrée entièrement, sous forme finie, avec deux fonctions arbitraires et leurs dérivées en nombres déterminés m et n.

Parmi les équations linéaires, celles qui sont réductibles à la forme

$$\frac{d^2 z}{du\,dv} = \lambda(u, v)z$$

ont une importance particulière, à cause du rôle qu'elles jouent dans de nombreuses recherches géométriques. Le problème qui a pour objet de construire une pareille équation, par la condition qu'elle admette une intégrale générale renfermant n dérivées des fonctions arbitraires, n'est pas un cas particulier du problème plus général dont il vient d'être parlé, et la solution dépend alors d'une seule équation aux dérivées partielles d'ordre $2n$, qui se réduit à l'équation de M. Liouville pour $n = 1$. Je suis parvenu à obtenir, par voie de récurrence, l'intégrale générale de cette équation, en mettant à profit une remarque rencontrée dans le problème de Géométrie suivant :

Transformer une surface de manière que les éléments linéaires correspondants de la surface donnée et de la surface transformée soient dirigés à angle droit.

Je me réserve de faire de ce problème, intimement lié à la théorie de la déformation des surfaces et à la théorie des lignes asymptotiques, l'objet d'une étude spéciale; mais la partie analytique de cette étude se confond entièrement avec celle de l'équation

$$\frac{d^2 z}{du\,dv} = \Lambda z,$$

et rentre ainsi dans le cadre du présent travail, dont elle constitue la troisième Partie.

En examinant la méthode qui conduit à ces résultats, on est naturellement amené à rechercher dans quelle mesure elle peut s'appliquer à l'étude des intégrales d'une forme moins élémentaire. Lorsque, par exemple, l'intégrale ne renferme, sous forme finie, que l'une des deux fonctions arbitraires, l'autre pouvant être engagée sous un signe d'intégration partielle, la méthode s'applique évidemment d'une manière immédiate aux pures équations linéaires, parce qu'alors les parties relatives aux deux fonctions arbitraires peuvent être séparées l'une de l'autre; mais, si l'on se pose la question d'une manière plus générale, une analyse entièrement différente doit être employée. Je réserve pour un travail ultérieur le développement de cette analyse, et l'étude du cas où les deux fonctions arbitraires ne sont pas composées de quantités distinctes.

SUR LES

FORMES INTÉGRABLES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

DU SECOND ORDRE;

PAR M. R. LIOUVILLE,

Ingénieur des Poudres et Salpêtres.

Ce travail est consacré à une première étude des équations linéaires du second ordre, où n'entrent que deux variables indépendantes. Les propriétés qu'il a pour but d'examiner sont tout à fait générales, mais leur application la plus immédiate a lieu pour les équations d'une certaine espèce, celles qui se résolvent par une formule contenant l'une des fonctions arbitraires, au moins, dégagée du signe $\int$. Ce cas est, sans doute, le plus simple qu'on puisse rencontrer, c'est donc celui dont il était naturel de s'occuper d'abord. Les équations pour lesquelles il se présente constituent une classe bien distincte; nous indiquons plusieurs moyens de former explicitement toutes les équations qui y sont comprises et d'obtenir, en conséquence, leurs intégrales.

Une équation étant donnée, la transformation de Laplace permet, on le sait, de reconnaître si elle se trouve parmi celles dont il s'agit, mais le problème, qui consiste à déterminer d'avance toutes les équations pour lesquelles cette transformation réussit, semblait offrir plus de difficultés. En ce genre de recherches, la voie a été ouverte par M. Moutard, dont le travail présenté en 1870 à l'Académie et approuvé par elle n'a point été publié dans son entier. Le fragment inséré au XLV[e] Cahier du *Journal de* *l'École Polytechnique* se rapporte aux seules équations de la forme

$$s = \lambda z,$$

pour lesquelles il fait connaître un théorème élégant et simple, résolvant d'une manière complète la question proposée.

Déjà une Note, imprimée le 18 avril 1870 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* avait donné ce théorème et annonçait, en outre, l'existence de propositions semblables pour toutes les équations linéaires du second ordre, à deux variables indépendantes. Mais, sur ce point, l'analyse et les conclusions mêmes de M. Moutard n'étaient pas connues; aussi ne semblait-il pas indigne d'intérêt de reprendre, à l'aide de considérations nouvelles, l'étude des questions résolues par l'éminent géomètre. Voici, en résumé, les principes dont nous avons fait usage et les résultats obtenus.

La variation des constantes arbitraires, imaginée en 1773 par Lagrange, pour intégrer les équations aux dérivées partielles du premier ordre, peut aussi s'employer pour celles du second; mais les difficultés qu'on rencontre sont alors telles que l'illustre auteur avait jugé lui-même sa méthode plus curieuse qu'utile pour rechercher les intégrales d'une équation de cette nature. Cependant cette méthode offrait, à un point de vue différent, des avantages précieux dans d'autres questions, et c'est par elle que nous sommes parvenus aux résultats que nous rapportons d'abord. Pour cela, nous considérons une équation linéaire sans second membre, et nous en supposons données cinq intégrales particulières, au moyen desquelles il est toujours facile de former une solution complète. Puis, faisant varier les constantes à la manière de Lagrange, chacune des fonctions qui se substituent à elles satisfait aussi à une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. Les coefficients de cette équation dépendent, en général, des solutions qu'on a choisies; seuls, les coefficients des dérivées les plus élevées ont leurs rapports invariables : ce sont ceux des coefficients homologues dans l'équation proposée. Toute intégrale connue de cette dernière correspond à une intégrale également connue de l'équation nouvelle et *vice versa,* et la transformation de l'une en l'autre se fait par des formules en évidence. Ces déductions n'obligent à aucune hypothèse sur les propriétés de l'équation proposée; il n'en est pas ainsi des suivantes.

Pour abréger, lorsqu'une équation admettra une intégrale générale où figurent, au moins, avec une fonction arbitraire dégagée du signe $\int$, les dérivées de cette fonction jusqu'à un ordre n déterminé, je dirai que l'équation considérée *appartient à l'indice n*. En adoptant ce langage, il est aisé de reconnaître que, si l'équation choisie pour être étudiée appartient à l'indice $n-1$, parmi les cinq transformées qu'on en déduit à la fois, il y en a toujours au moins une appartenant à l'indice $n+1$; réciproquement, à toute équation de cet indice, on en peut associer quatre autres, de telle façon qu'elles soient, prises ensemble, les cinq transformées déduites à la fois d'une même équation dont l'indice est $n-1$.

Comme conséquence, étant donné le groupe entier des équations qui appartiennent à l'indice 0, c'est-à-dire satisfont à la première condition de Laplace, on saura former explicitement le groupe des équations appartenant à l'indice 2, puis à l'indice 4 et enfin à l'indice $2n$; d'ailleurs, un groupe d'indices impair quelconque étant toujours contenu dans celui d'indices pair immédiatement supérieur, ce procédé fournit bien toutes les équations admettant une intégrale générale, où l'une des fonctions arbitraires, au moins, est dégagée du signe $\int$. Mais, bien que leur formation successive par l'emploi de cette méthode ait lieu suivant des lois peu compliquées, il est possible de réduire tout à des calculs encore plus simples, pourvu que, au lieu d'augmenter l'indice de deux unités par chaque opération, on se contente de l'augmenter d'une seule.

Le résultat dépend ici d'une remarque dont nous n'avons point encore parlé : c'est que les transformations mentionnées plus haut peuvent toujours se décomposer en deux, qu'il faudrait appliquer l'une après l'autre pour les reproduire elles-mêmes.

L'étude de ces transformations conduit sans peine aux deux propositions suivantes, qui terminent toute cette théorie, en tant du moins qu'il s'agit seulement d'examiner les formes intégrables des équations aux dérivées partielles du second ordre.

1° *Étant donnée sous la forme*

$$s + Pp + Qq = 0$$

une équation dont toutes les solutions se réunissent en une intégrale générale contenant au moins une fonction arbitraire dégagée du signe $\int$, *avec ses dérivées jusqu'à l'ordre* n, *si l'on désigne par* z_1, z_2, z_3 *trois de ses solutions choisies à volonté et par* ζ_1, ζ_2 *les rapports des deux premières à la troisième, par* $[\zeta_1, \zeta_2]$ *le déterminant fonctionnel de ces rapports, l'équation suivante*

$$s + p\left\{P + \frac{\partial \log}{\partial y}\left(\frac{z_3[\zeta_1, \zeta_2]}{\frac{\partial \zeta_2}{\partial y}}\right)\right\} + q\left\{Q + \frac{\partial \log}{\partial x}\left(\frac{z_3[\zeta_1, \zeta_2]}{\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}}\right)\right\} = 0$$

admet aussi une intégrale générale de la forme indiquée; mais la fonction arbitraire, dégagée du signe $\int$, *y figure avec ses dérivées jusqu'à l'ordre* $n+1$. *Cette intégrale résulte avec facilité de celle de l'équation proposée; si cette dernière représente l'une quelconque de celles qui appartiennent à l'indice* n, *la précédente peut représenter toutes les équations qui appartiennent à l'indice* $n+1$.

2° *Étant donnée sous la forme*

$$\frac{\partial(\gamma p)}{\partial y} - \frac{\partial(\delta' q)}{\partial x} = 0,$$

admissible sans nulle réserve, comme on le verra plus loin, une équation linéaire du second ordre dont toutes les solutions se réunissent en une intégrale générale contenant, au moins, une fonction arbitraire dégagée du signe $\int$, *avec ses dérivées jusqu'à l'ordre* n, *si l'on désigne par* v', v'' *deux de ses solutions prises à volonté, l'équation suivante*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\frac{\partial v''}{\partial y}}{\frac{\partial v'}{\partial y}} p\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial v''}{\partial x}}{\frac{\partial v'}{\partial x}} q\right] = 0$$

admet aussi une intégrale générale de la forme indiquée, mais la fonction arbitraire, dégagée du signe $\int$, *y figure avec ses dérivées jusqu'à l'ordre*

$n+1$. *Cette intégrale est liée par une quadrature à celle de l'équation proposée, et, quand cette dernière peut être choisie sans restriction parmi toutes celles qui appartiennent à l'indice n, sa transformée peut représenter l'une quelconque de celles qui appartiennent à l'indice $n+1$.*

Les résultats qu'il nous reste à énumérer découlent de considérations bien distinctes des précédentes. Elles se lient aux propriétés remarquables d'une forme particulière qu'on peut toujours attribuer aux équations linéaires du second ordre, savoir celle qui suit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

où φ et ψ sont des fonctions linéaires de l'inconnue principale et de ses dérivées partielles du premier ordre. Quand une équation n'est pas à l'avance donnée sous cette forme, il suffit de la multiplier par un certain facteur pour la lui donner. Tous les facteurs qu'on peut employer à cet usage satisfont à une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre que, pour la brièveté du langage, j'appelle l'*adjointe* de l'équation proposée : l'opération par laquelle on passe d'une équation à son adjointe, répétée deux fois, ramène à l'équation primitive.

Après avoir indiqué les propriétés les plus simples des couples d'équations adjointes, je cherche quelles sont, pour une équation donnée quelconque, toutes les formes des fonctions φ et ψ qui lui correspondent : 1° lorsqu'on s'astreint à ne pas changer l'inconnue principale; 2° lorsqu'on prend une inconnue nouvelle, égale au rapport d'une intégrale quelconque de l'équation donnée à une autre intégrale, choisie à volonté. Dans les deux cas, on parvient à des formules commodes, dont se déduisent ensuite ces deux théorèmes, relatifs aux formes intégrables des équations linéaires du second ordre :

1° *L'équation*

$$(\varepsilon-\eta')s+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}p-\frac{\partial\eta'}{\partial x}q=0$$

pouvant représenter l'une quelconque des équations qui admettent une *intégrale générale d'indice n et λ et μ les fonctions ainsi définies*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\eta'\,\partial\mu}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\varepsilon\,\partial\mu}{\partial y}\right]=0,$$

$$\lambda=-\int\left[\eta'\frac{\partial\mu}{\partial x}dx+\frac{\varepsilon\,\partial\mu}{\partial y}dy\right],$$

on peut représenter sous cette forme

$$(\varepsilon-\eta')s+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\lambda+\eta'\mu}{\lambda+\varepsilon\mu}p-\frac{\partial\eta'}{\partial x}\frac{\lambda+\varepsilon\mu}{\lambda+\eta'\mu}q=0$$

l'ensemble des équations dont il existe une intégrale générale d'indice $n+1$.

2° *Si l'équation*

$$\frac{\partial(\varepsilon p)}{\partial y}-\frac{\partial(\eta' q)}{\partial x}=0$$

représente l'une quelconque de celles qui appartiennent à l'indice n, ζ l'une de ses solutions prise à volonté et υ la fonction qui en dépend par cette quadrature

$$\upsilon=\int\left[\frac{\varepsilon\,\partial\zeta}{\partial x}dx+\frac{\eta'\,\partial\zeta}{\partial y}dy\right],$$

on peut représenter sous cette forme

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{p}{\varepsilon\zeta-\upsilon}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{q}{\eta'\zeta-\upsilon}\right]=0$$

l'ensemble des équations dont il existe une intégrale générale d'indice $n+1$.

Ces deux théorèmes sont corrélatifs, et l'un d'eux peut être regardé comme une véritable transformation de l'autre. Aucun ne permettait d'obtenir directement, pour les équations de la forme

$$s=\lambda z,$$

le beau théorème découvert par M. Moutard, cette forme disparaissant par l'application des propositions précédentes. Mais, en combinant d'une certaine manière les deux procédés, on peut, au contraire, retrouver ce théorème, ce qui termine notre travail et en donne la vérification la plus facile.

Les principes dont nous avons fait usage ne conviennent pas seulement, il est aisé de s'en apercevoir, aux équations linéaires du second ordre, où n'entrent que deux variables indépendantes. Nous réservons pour un prochain Mémoire l'étude des résultats auxquels ils conduisent, pour les équations aux dérivées partielles non linéaires à deux variables indépendantes et pour les équations linéaires du second ordre où figurent plus de deux variables indépendantes.

I.

Soient, avec les notations habituelles,

$$p, \quad q, \quad r, \quad s, \quad t$$

les dérivées partielles des deux premiers ordres d'une certaine fonction z, assujettie à rendre identique une équation linéaire, telle que celle-ci :

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q + \mathrm{Z}z = 0.$$

Cette équation est supposée contenir les variables indépendantes x et y d'une manière tout à fait arbitraire, et, par $z_1, z_2, \ldots, z_5$, on désigne cinq de ses solutions particulières choisies à volonté.

L'expression

$$\text{(2)} \qquad z = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4 + a_5 z_5 = \sum_{(i)} a_i z_i,$$

où $a_1, \ldots, a_5$ sont des constantes, satisfait aussi, comme l'on sait, à l'équation (1) et prend le nom de solution complète s'il arrive que, parmi les équations des deux premiers ordres, la proposée seule soit par elle identiquement vérifiée.

Cela étant, nous imaginons toujours les fonctions z_i déterminées de telle façon que la formule (2) représente en effet une solution complète de l'équation (1), et nous nous proposons d'examiner comment on en conclurait toutes les solutions possibles par la variation des constantes arbitraires. A cet effet, d'après Lagrange, on peut poser les relations suivantes

$$(3)\qquad \begin{cases} p = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_5 p_5 = \sum\limits_{(i)} a_i p_i, \\ q = a_1 q_1 + a_2 q_2 + \ldots + a_5 q_5 = \sum\limits_{(i)} a_i q_i, \\ r = \sum\limits_{(i)} a_i r_i, \qquad s = \sum\limits_{(i)} a_i s_i, \qquad t = \sum\limits_{(i)} a_i t_i, \end{cases}$$

qui définissent les cinq fonctions inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_5$.

L'étude de l'équation (1) se trouvant par là ramenée à celle de ces cinq fonctions, qui toutes s'expriment linéairement au moyen de z et de ses dérivées des deux premiers ordres, la méthode de Lagrange peut être regardée comme une transformation si l'on démontre le théorème suivant :

L'une quelconque des fonctions a_i satisfait à une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, et toutes les autres s'en déduisent ensuite par des quadratures.

Pour le prouver, nous observons que, à cause des relations (3), on a

$$(4)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{(i)} z_i\, da_i = 0, \\ \sum\limits_{(i)} p_i\, da_i = 0 = \sum\limits_{(i)} q_i\, da_i, \end{cases}$$

et ces équations permettent d'exprimer trois des différentielles da_i en fonction des deux autres; c'est ce que l'on peut indiquer en posant, par exemple,

$$(5)\qquad \begin{cases} da_3 = \lambda\ da_1 + \mu\ da_2, \\ da_4 = \lambda'\ da_1 + \mu'\ da_2, \\ da_5 = \lambda''\ da_1 + \mu''\ da_2; \end{cases}$$

alors les fonctions λ, μ, ..., λ'', μ'' satisfont, comme conséquence, aux équations suivantes, par où elles se trouvent définies,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &z_1+\lambda z_3+\lambda' z_4+\lambda'' z_5=0, && z_2+\mu z_3+\mu' z_4+\mu'' z_5=0,\\ &p_1+\lambda p_3+\lambda' p_4+\lambda'' p_5=0, && p_2+\mu p_3+\mu' p_4+\mu'' p_5=0,\\ &q_1+\lambda q_3+\lambda' q_4+\lambda'' q_5=0, && q_2+\mu q_3+\mu' q_4+\mu'' q_5=0;\end{aligned}\right.$$

mais les formules (5) ne pourraient subsister si leurs seconds membres ne satisfaisaient aux conditions d'intégrabilité, qui s'expriment ainsi

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial a_1}{\partial y}-\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial a_2}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial\lambda'}{\partial y}\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial\mu'}{\partial y}\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial\lambda'}{\partial x}\frac{\partial a_1}{\partial y}-\frac{\partial\mu'}{\partial x}\frac{\partial a_2}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial\lambda''}{\partial y}\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial\mu''}{\partial y}\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial\lambda''}{\partial x}\frac{\partial a_1}{\partial y}-\frac{\partial\mu''}{\partial x}\frac{\partial a_2}{\partial y}=0;\end{aligned}\right.$$

ces trois équations ne sont point entre elles sans liaison, car on conclut des formules (6)

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &z_3\frac{\partial\lambda}{\partial x}+z_4\frac{\partial\lambda'}{\partial x}+z_5\frac{\partial\lambda''}{\partial x}=0,\\ &z_3\frac{\partial\lambda}{\partial y}+z_4\frac{\partial\lambda'}{\partial y}+z_5\frac{\partial\lambda''}{\partial y}=0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\end{aligned}\right.$$

de sorte que, en multipliant la première équation du système (7) par z_3, la deuxième par z_4, la troisième par z_5 et ajoutant les trois produits, on forme une pure identité. Ce système se réduisant donc à deux équations distinctes, on peut, par son moyen, représenter $\frac{\partial a_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial a_2}{\partial y}$ en fonction linéaire de $\frac{\partial a_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial a_1}{\partial y}$, ce qui se fait de cette manière

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial a_2}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial a_1}{\partial x}+\eta\frac{\partial a_1}{\partial y},\\ &\frac{\partial a_2}{\partial y}=\varepsilon'\frac{\partial a_1}{\partial x}+\eta'\frac{\partial a_1}{\partial y}.\end{aligned}\right.$$

Il reste à exprimer que ces relations définissent bien une fonction a_2 des deux variables x et y, et, pour cela, on doit avoir

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial a_1}{\partial x}+\eta\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon'\frac{\partial a_1}{\partial x}+\eta'\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)=0.$$

C'est l'équation du second ordre à laquelle nous voulions parvenir. Les fonctions ε, η, ε', η', qui y figurent, s'obtiennent en comparant les équations (9) et (7), d'où l'on conclut

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}+\varepsilon\dfrac{\partial\mu}{\partial y}-\varepsilon'\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}+\eta'\dfrac{\partial\mu}{\partial x}-\eta\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=0,\\
\dfrac{\partial\lambda'}{\partial y}+\varepsilon\dfrac{\partial\mu'}{\partial y}-\varepsilon'\dfrac{\partial\mu'}{\partial x}=0, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\dfrac{\partial\lambda''}{\partial y}+\varepsilon\dfrac{\partial\mu''}{\partial y}-\varepsilon'\dfrac{\partial\mu''}{\partial x}=0, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.
\end{array}$$

Mais à ces formules on en peut substituer de plus convenables, à l'aide des considérations suivantes. Les deux relations distinctes, auxquelles se réduit le système (7), se présentent sous une forme commode si l'on multiplie par p_3, p_4, p_5 ou q_3, q_4, q_5, respectivement, les équations de ce système et qu'on fasse ensuite la somme des produits; en écrivant, pour abréger,

$$p_3\frac{\partial\lambda}{\partial y}+p_4\frac{\partial\lambda'}{\partial y}+p_5\frac{\partial\lambda''}{\partial y}=\sum_{(k)}p_{k+3}\frac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial y},$$

on trouve ainsi

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial a_1}{\partial x}\sum_{(k)}p_{k+3}\frac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial y}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\sum_{(k)}p_{k+3}\frac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial x}\\
&\quad+\frac{\partial a_2}{\partial x}\sum_{(k)}p_{k+3}\frac{\partial\mu^{(k)}}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial y}\sum_{(k)}p_{k+3}\frac{\partial\mu^{(k)}}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial a_1}{\partial x}\sum_{(k)}q_{k+3}\frac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial y}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\sum_{(k)}q_{k+3}\frac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial x}\\
&\quad+\frac{\partial a_2}{\partial x}\sum_{(k)}q_{k+3}\frac{\partial\mu^{(k)}}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial y}\sum_{(k)}q_{k+3}\frac{\partial\mu^{(k)}}{\partial x}=0
\end{aligned}\right.$$

or les équations (6) nous donnent

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{(k)} p_{k+3}\frac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial x} = -\left(\sum_{(k)}\lambda^{(k)} r_{k+3} + r_1\right),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}\right.$$

et, en éliminant λ, λ', λ'' entre ces équations (6) elles-mêmes et les précédentes, supposé que Δ désigne le déterminant

$$\Sigma \pm z p_1 q_2 r_3 s_4 t_5,$$

et que

$$\delta = \Sigma \pm z_3 p_4 q_5,$$

on parvient aux résultats dont voici le Tableau :

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\delta\sum_{(k)} p_{k+3}\frac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial x} = -\frac{\partial^2\Delta}{\partial s_2\,\partial t},\\ \displaystyle\delta\sum_{(k)} p_{k+3}\frac{\partial\mu^{(k)}}{\partial x} = -\frac{\partial^2\Delta}{\partial s_1\,\partial t},\\ \displaystyle\delta\sum_{(k)} q_{k+3}\frac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial x} = \delta\sum_{(k)} p_{k+3}\frac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial y} = -\frac{\partial^2\Delta}{\partial t_2\,\partial r},\\ \displaystyle\delta\sum_{(k)} p_{k+3}\frac{\partial\mu^{(k)}}{\partial y} = \delta\sum_{(k)} q_{k+3}\frac{\partial\mu^{(k)}}{\partial x} = -\frac{\partial^2\Delta}{\partial t_1\,\partial r},\\ \displaystyle\delta\sum_{(k)} q_{k+3}\frac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial y} = -\frac{\partial^2\Delta}{\partial r_2\,\partial s},\\ \displaystyle\delta\sum_{(k)} q_{k+3}\frac{\partial\mu^{(k)}}{\partial y} = -\frac{\partial^2\Delta}{\partial r_1\,\partial s}. \end{array}\right.$$

Introduisant ces expressions dans les formules (11), on peut y supprimer le facteur δ, commun à tous les termes, et il reste alors

$$(11')\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\frac{\partial^2\Delta}{\partial t_2\,\partial r}\frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{\partial^2\Delta}{\partial s_2\,\partial t}\frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{\partial^2\Delta}{\partial t_1\,\partial r}\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial^2\Delta}{\partial s_1\,\partial t}\frac{\partial a_2}{\partial y} = 0,\\ \displaystyle\frac{\partial^2\Delta}{\partial r_2\,\partial s}\frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{\partial^2\Delta}{\partial r_2\,\partial t}\frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{\partial^2\Delta}{\partial r_1\,\partial s}\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial^2\Delta}{\partial t_1\,\partial r}\frac{\partial a_2}{\partial y} = 0; \end{array}\right.$$

ces équations, comparées à celles qu'on a marquées (9), donnent ensuite

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial t_1\, \partial r} - \varepsilon' \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial s_1\, \partial t} + \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial t_2\, \partial r} = 0, \\ \eta \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial t_1\, \partial r} - \eta' \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial s_1\, \partial t} + \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial t_2\, \partial s} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}\right.$$

et nous avons ainsi tous les éléments nécessaires à la formation explicite de l'équation (10).

Le calcul peut encore être abrégé, si l'on tient compte de la proposition suivante :

Dans l'équation à laquelle satisfait la fonction a_1, les coefficients des dérivées les plus élevées sont proportionnels à ceux des dérivées de même espèce dans l'équation proposée. Ce théorème s'établit très simplement ainsi :

Considérons les six équations obtenues en substituant l'une après l'autre les cinq solutions données $z_1, \ldots, z_5$ et une solution quelconque z dans l'équation primitive (1). On peut, entre ces six équations, linéaireset homogènes, éliminer H, K, L, P, Q, Z et en déduire

$$\Delta = 0.$$

Cette équation, d'ailleurs, n'étant autre que la proposée, on a, comme conséquences dignes d'être notées,

$$\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial r}}{\mathrm{H}} = \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial s}}{2\mathrm{K}} = \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial t}}{\mathrm{L}} = \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial p}}{\mathrm{P}} = \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial q}}{\mathrm{Q}} = \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial z}}{\mathrm{Z}};$$

mais, entre les mêmes équations, si l'on élimine seulement P, Q, Z, il se présente les deux relations que je transcris ici :

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{H} \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial s_1 \partial t} + 2\mathrm{K} \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial t_1 \partial r} + \mathrm{L} \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial r_1 \partial s} = 0, \\ \mathrm{H} \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial s_2 \partial t} + 2\mathrm{K} \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial t_2 \partial r} + \mathrm{L} \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial r_2 \partial s} = 0, \end{array}\right.$$

et, comme les formules (14) permettent d'écrire

$$\eta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial r_1 \partial s} + (\varepsilon - \eta') \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t_1 \partial r} - \varepsilon' \frac{\partial^2 \Delta}{\partial s_1 \partial t} = 0,$$

$$\eta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial r_2 \partial s} + (\varepsilon - \eta') \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t_2 \partial r} - \varepsilon' \frac{\partial^2 \Delta}{\partial s_2 \partial t} = 0,$$

on en conclut évidemment

$$(16)\qquad \frac{-\varepsilon'}{H} = \frac{\varepsilon - \eta'}{2K} = \frac{\eta}{L},$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

A l'aide de ces résultats, on achève aisément l'étude de l'équation (10), en laquelle s'est, en définitive, transformée l'équation proposée (1).

Tout d'abord, il convient de remarquer que, si cette dernière est quelconque et ses cinq solutions $z_1, \ldots, z_5$, choisies à volonté, l'équation (10) aussi demeure arbitraire, parmi celles où n'entre pas l'inconnue principale, c'est-à-dire que :

A une équation linéaire et du second ordre, où l'inconnue ne figure que par ses dérivées, on peut toujours faire correspondre une autre équation du même ordre et linéaire, dont elle dépende, comme l'équation (10), de celle dont on l'a tirée.

Pour le prouver, prenons une équation linéaire et du second ordre, ne renfermant pas la fonction inconnue, mais, à ces conditions, absolument quelconque ; on n'ajoute aucune hypothèse aux précédentes en donnant à cette équation la forme particulière

$$(17)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial a_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial a_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon'\frac{\partial a_1}{\partial x} + \eta'\frac{\partial a_1}{\partial y}\right) = 0.$$

Il est visible, en effet, que toute équation peut être ainsi présentée, pourvu qu'on la multiplie par un certain facteur. Nous aurons à revenir plus tard sur ce point; l'on y parvient par un calcul si simple qu'il est permis de l'omettre ici.

Imaginons maintenant qu'on définisse deux fonctions nouvelles λ et μ, par les relations simultanées

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial y} - \varepsilon'\frac{\partial\mu}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \eta'\frac{\partial\mu}{\partial x} - \eta\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, par ce système

$$(18) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial y} - \varepsilon'\frac{\partial\mu}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta'\frac{\partial\mu}{\partial x} - \eta\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) = 0,$$

$$(19) \qquad \lambda = \int\left[\left(\eta\frac{\partial\mu}{\partial y} - \eta'\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)dx + \left(\varepsilon'\frac{\partial\mu}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)dy\right],$$

d'après lequel on peut déterminer séparément la fonction μ, en résolvant une équation du second ordre et par une quadrature en déduire la fonction λ correspondante. Soient μ, μ', μ'' trois solutions de l'équation (18) et λ, λ', λ'' les expressions fournies pour chacune d'elles par la formule (19). Si l'on définit les rapports des trois fonctions z_3, z_4, z_5 par les deux équations suivantes

$$(20) \qquad \begin{cases} z_3\dfrac{\partial\mu}{\partial x} + z_4\dfrac{\partial\mu'}{\partial x} + z_5\dfrac{\partial\mu''}{\partial x} = 0, \\ z_3\dfrac{\partial\mu}{\partial y} + z_4\dfrac{\partial\mu'}{\partial y} + z_5\dfrac{\partial\mu''}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

et qu'on écrive ensuite

$$(21) \qquad \begin{cases} z_1 + z_3\lambda + z_4\lambda' + z_5\lambda'' = 0, \\ z_2 + z_3\mu + z_4\mu' + z_5\mu'' = 0, \end{cases}$$

les cinq fonctions $z_1, \ldots, z_5$, dont l'une est prise à volonté, satisfont à une même équation linéaire du second ordre. Ses coefficients, en conservant nos notations antérieures, sont alors donnés par les proportions

$$\frac{\mathrm{H}}{\frac{\partial\Delta}{\partial r}} = \frac{2\mathrm{K}}{\frac{\partial\Delta}{\partial s}} = \frac{\mathrm{L}}{\frac{\partial\Delta}{\partial t}} = \frac{\mathrm{P}}{\frac{\partial\Delta}{\partial p}} = \frac{\mathrm{Q}}{\frac{\partial\Delta}{\partial q}} = \frac{\mathrm{Z}}{\frac{\partial\Delta}{\partial z}},$$

et l'équation (17) définit précisément toutes les fonctions par lesquelles on peut remplacer une constante arbitraire a_1 dans la solution complète

$$z = a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots + a_5z_5$$

de l'équation

$$\mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q + \mathrm{Z}z = 0,$$

lorsqu'on en veut déduire toutes les solutions par la méthode de Lagrange.

Pour se convaincre que ces conclusions sont assurées, il suffit de reprendre l'analyse par laquelle a été établie l'équation (10) : les équations données à cette occasion se trouvent toutes vérifiées à l'avance, en vertu des relations (18), (19), (20) et (21), supposées satisfaites.

II.

Lorsqu'il s'agit d'intégrer les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre par des formules où une fonction arbitraire au moins est dégagée du signe $\int$ et n'apparaît qu'avec ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé, les liens entre les équations (1), (10) et (18) de l'article précédent entraînent des conséquences dignes de remarque.

Il est clair, en effet, que si l'équation (1), savoir

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q + \mathrm{Z}z = 0,$$

a toutes ses intégrales données par une formule de l'espèce indiquée, il en est de même de l'équation transformée

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &-\varepsilon' \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} + (\varepsilon - \eta') \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x\, \partial y} + \eta \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y^2} \\ &\qquad + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon'}{\partial x}\right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta'}{\partial x}\right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = 0, \end{aligned} \right.$$

à laquelle conduit l'application de la méthode de Lagrange ; car, en vertu des relations numérotées (3) dans l'article premier de ce travail, on peut, par exemple, écrire l'équation suivante

$$\text{(3)} \qquad \alpha_1 = \frac{z \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial s\, \partial z_1} + p \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial s\, \partial p_1} + q \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial s\, \partial q_1} + r \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial s\, \partial r_1} + t \dfrac{\partial^3 \Delta}{\partial s\, \partial t_1}}{\dfrac{\partial \Delta}{\partial s}},$$

dont le second membre contient, en même temps qu'il en est ainsi pour z, une fonction arbitraire débarrassée de tout signe d'intégration. Mais la proposition précédente a sa réciproque, c'est-à-dire que :

Si l'on peut obtenir sous la forme indiquée déjà une intégrale générale de l'équation (2), la fonction z s'exprime également par un ensemble de termes où l'une des fonctions arbitraires au moins n'entre qu'avec ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé.

Pour le prouver, représentons par α_1 la somme des termes, appartenant à l'intégrale générale de l'équation (2), où figure seule la fonction arbitraire qu'on suppose dégagée du signe $\int$ ou bien l'une de ses dérivées, et posons

$$\alpha_1 = \sum_{0 \leq i \leq n} A_i U_1^{(n-i)}, \tag{4}$$

U_1 étant la fonction arbitraire dont on a parlé, $U_1^{(1)}$, $U_1^{(2)}$, ... ses dérivées successives relativement à la variable unique dont elle dépend; celle-ci, fonction donnée de x et y, est désignée par u.

Je dis qu'adoptant pour a_1, ..., a_5 les définitions admises à l'art. I et, par suite, ayant les relations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial a_2}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial a_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial a_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial a_2}{\partial y} &= \varepsilon' \frac{\partial a_1}{\partial x} + \eta' \frac{\partial a_1}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

à la portion α_1 de l'intégrale a_1 répond dans a_2 une portion d'intégrale α_2 de forme toute semblable.

Écrivons en effet, pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{a}_{i+1} &= \varepsilon \left(\frac{\partial A_i}{\partial x} + A_{i+1} \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \eta \left(\frac{\partial A_i}{\partial y} + A_{i+1} \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ \mathrm{a}'_{i+1} &= \varepsilon' \left(\frac{\partial A_i}{\partial x} + A_{i+1} \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \eta' \left(\frac{\partial A_i}{\partial y} + A_{i+1} \frac{\partial u}{\partial y}\right), \end{aligned}\right. \tag{6}$$

de sorte que, en raison des équations (5), on doit avoir

$$\frac{\partial \mathrm{a}_i}{\partial y} + \mathrm{a}_{i+1} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{a}'_i}{\partial x} + \mathrm{a}'_{i+1} \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{7}$$

D'ailleurs $a_{n+2} = 0 = a'_{n+2}$, et par conséquent, en prenant $i = n+1$, l'équation (7) se réduit à celle-ci

$$\frac{\partial a_{n+1}}{\partial y} = \frac{\partial a'_{n+1}}{\partial x}, \tag{8}$$

c'est-à-dire que l'on peut ainsi définir une fonction nouvelle H_0

$$\frac{\partial H_0}{\partial x} = a_{n+1}, \qquad \frac{\partial H_0}{\partial y} = a'_{n+1}. \tag{9}$$

Mais, à cause des relations (5),

$$\alpha_2 = \sum_{-1 \leq i \leq n} \int (a_{i+1}\,dx + a'_{i+1}\,dy)\,U_1^{(n-i)}. \tag{10}$$

Or le dernier terme du second membre

$$\int U_1\,(a_{n+1}\,dx + a'_{n+1}\,dy)$$

s'intègre par parties et donne

$$\int U_1\,(a_{n+1}\,dx + a'_{n+1}\,dy) = H_0 U_1 - \int H_0 U_1^{(1)}\,du;$$

cela fait, dans l'équation (10) le facteur de $U_1^{(1)}$ sous le signe $\int$ est égal à

$$a_n\,dx + a'_n\,dy - H_0\,du,$$

et, comme on a pour conséquence des relations (7) et (8)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a_n - H_0\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(a'_n - H_0\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

on peut poser évidemment

$$\left\{\begin{aligned} a_n - H_0\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial H_1}{\partial x}, \\ a'_n - H_0\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial H_1}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

ce qui donne sous cette forme

$$H_1 U_1^{(1)} - \int H_1 U_1^{(2)}\,du,$$

un nouveau terme de α_2. Continuant de même, il est clair que l'on doit trouver en définitive

$$(12)\qquad \alpha_2 = \sum_{0 \leq i \leq n} \mathrm{H}_i \mathrm{U}_1^{(i)} - \int \mathrm{U}_1^{(n+1)} (\mathrm{a}_0\, dx + \mathrm{a}'_0\, dy - \mathrm{H}_n\, du);$$

ajoutons encore que, à cause de ces deux équations, déduites comme les précédentes du système (6),

$$\mathrm{a}_0 - \mathrm{H}_n \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{H}_{n+1}}{\partial x},$$

$$\mathrm{a}'_0 - \mathrm{H}_n \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{H}_{n+1}}{\partial y},$$

la dernière quadrature se transforme en ceci

$$(13)\qquad \int \mathrm{U}_1^{(n+1)}\, d\mathrm{H}_{n+1}.$$

En désignant par v la variable indépendante qu'il faudrait joindre à u et substituer avec cette dernière à x et y, si l'on voulait ramener l'équation proposée à ne plus renfermer qu'une dérivée du second ordre,

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}},$$

et l'on voit qu'il est satisfait à l'équation

$$\frac{\partial \mathrm{H}_{n+1}}{\partial v} = \frac{\mathrm{a}'_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{a}_0 \dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}} = 0,$$

d'après laquelle H_{n+1} ne dépend pas de v. Intégrant alors par parties l'expression (13), on la change en celle que voici :

$$(13')\quad \frac{\partial \mathrm{H}_{n+1}}{\partial u} \mathrm{U}_1^{(n)} - \frac{\partial^2 \mathrm{H}_{n+1}}{\partial u^2} \mathrm{U}_1^{(n-1)} + \ldots + (-1)^{n+1} \int \frac{\partial^{n+2} \mathrm{H}_{n+1}}{\partial u^{n+2}} \mathrm{U}_1\, du.$$

Au reste, U_1 étant arbitraire, il est permis de lui substituer une autre fonction

$$(14)\qquad U_2 = \int \frac{\partial^{n+2} H_{n+1}}{\partial u^{n+2}} U_1\, du.$$

Nous aurons alors

$$(15)\qquad U_2^{(1)} = U_1 \frac{\partial^{n+2} H_{n+1}}{\partial u^{n+2}},$$

et nous en pouvons conclure l'expression de α_2 par la nouvelle fonction U_2 et ses $n+1$ premières dérivées.

Ainsi donc α_2 se laisse représenter par une formule semblable à (4). Par suite, toutes les fois qu'on suppose a_1 susceptible d'être représenté en général par une formule contenant une fonction arbitraire au moins dégagée du signe $\int$ avec ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé, il en est de même pour a_2 et, comme conséquence, pour a_3, a_4, a_5. Et puisqu'on a enfin

$$(1)\qquad z = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_5 z_5,$$

la fonction z s'exprime aussi de la même manière, ce que nous voulions démontrer.

Pour compléter l'énoncé précédent et lui donner toute la précision qui convient, quelques considérations nouvelles sont nécessaires. Sous le nom d'*indice minimum* de l'intégrale a_1, nous désignerons le moindre nombre qu'il faille accepter pour n dans l'équation (4)

$$(4)\qquad \alpha_1 = \sum_{0 \leq i \leq n} A_i U_1^{(n-i)},$$

admettant au surplus que si cet indice n'est pas le même pour α_1, α_2, ..., le plus grand est celui de α_1. Cette définition une fois adoptée, on doit observer que les fonctions arbitraires de u, correspondant aux indices minima dans α_1, α_2, ..., peuvent n'être en aucune façon les mêmes. Il ressort cependant de l'analyse employée plus haut que les fonctions α_1, α_2, ... peuvent bien s'exprimer toutes à l'aide d'une *même* arbitraire et de ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé.

Prenons en effet U_2 pour fonction nouvelle dans l'expression de α_1, et, grâce à la formule (15), il est évident que le résultat cherché sera obtenu, du moins en ce qui concerne α_1 et α_2; mais α_3 se déduirait de α_2 comme α_2 s'est déduit de α_1; nos conclusions s'étendront donc à cette troisième fonction α_3, pourvu qu'on adopte une fonction nouvelle U_3 liée à U_2 par une équation semblable à (15); et, en continuant ainsi, on met hors de doute la proposition générale.

Soient alors désignées par φ, φ', ψ, ψ' les quatre quantités définies par le système de relations

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi + \varepsilon'\varphi' &= 1, & \varepsilon\psi + \varepsilon'\psi' &= 0,\\ \eta\varphi + \eta'\varphi' &= 0, & \eta\psi + \eta'\psi' &= 1,\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire ainsi l'équation satisfaite par a_2

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial a_2}{\partial x} + \varphi'\frac{\partial a_2}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial a_2}{\partial x} + \psi'\frac{\partial a_2}{\partial y}\right) = 0. \tag{16}$$

L'indice minimum de α_2 étant par hypothèse égal ou inférieur à n, il en résulte qu'on peut prendre

$$\alpha_2 = \sum_{0\leq i\leq n} B_i U_{\text{II}}^{(n-i)}, \tag{17}$$

U_{II} étant une fonction arbitraire nouvelle qui correspond à l'indice n.

Nous conviendrons encore des notations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} b_{i+1} &= \varphi\left(\frac{\partial B_i}{\partial x} + B_{i+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \varphi'\left(\frac{\partial B_i}{\partial y} + B_{i+1}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\ b'_{i+1} &= \psi\left(\frac{\partial B_i}{\partial x} + B_{i+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \psi'\left(\frac{\partial B_i}{\partial y} + B_{i+1}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\ &\qquad -1 \leq i \leq n+1,\end{aligned}\right. \tag{18}$$

à l'aide desquelles on peut renfermer dans ces formules

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial b_i}{\partial y} + b_{i+1}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial b'_i}{\partial x} + b'_{i+1}\frac{\partial u}{\partial x},\\ &\qquad -1 \leq i \leq n+1,\end{aligned}\right. \tag{19}$$

toutes les conditions à remplir par l'expression (17) pourvu qu'on s'oblige à remplacer par zéro toutes les quantités B ou b dont l'indice sortirait des limites fixées; on comprend qu'il y a entre les fonctions φ, φ', ψ, ψ' et quelques-unes de leurs dérivées une relation et une seule, celle qu'il faut supposer satisfaite lorsqu'on représente α_2 par une formule de l'espèce indiquée. Elle s'obtiendrait en particulier si, dans l'équation satisfaite par les dérivées partielles de B_0, on introduisait pour cette quantité l'expression tout explicite fournie par les transformations de Laplace appliquées à l'équation (16).

Si l'on se reporte maintenant au second membre de la formule (12), on voit qu'il se partage en une quadrature

$$\int U_1^{(n+1)}\, dH_{n+1}$$

non effectuée et une somme de termes déjà intégrés

$$\sum_{0\leq i\leq n} H_i U_1^{(n+i)}. \tag{20}$$

Les termes de cette somme composent un ensemble de la forme (17), satisfaisant aux conditions représentées par ce système

$$\left\{\begin{aligned} h_{i+1} &= \varphi\left(\frac{\partial H_{n-i}}{\partial x} + H_{n-i+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \varphi'\left(\frac{\partial H_{n-i}}{\partial y} + H_{n-i+1}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\ h'_{i+1} &= \psi\left(\frac{\partial H_{n-i}}{\partial x} + H_{n-i+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \psi'\left(\frac{\partial H_{n-i}}{\partial y} + H_{n-i+1}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial h_i}{\partial y} &+ h_{i+1}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial h'_i}{\partial x} + h'_{i+1}\frac{\partial u}{\partial x}; \end{aligned}\right. \tag{21}$$

celui-ci ne différerait, en réalité, du groupe (18), (19) que par la substitution de H_{n-i} à la place de B_i si l'on avait

$$dH_{n+1} = 0.$$

Mais, en désignant par

$$(\varepsilon),\quad (\eta')$$

ce que deviennent ε, η' lorsqu'on prend u et v pour variables au lieu de x et y, cette condition équivaut, comme il est facile de le voir, à celle qui suit

$$\sum_{0\leq i\leq n} (-1)^{i+1}\frac{\partial^i}{\partial u^i}\left[A_{n-i}\frac{\partial(\varepsilon)}{\partial u}\right] = 0. \tag{22}$$

L'équation précédente suffit pour que les équations (2) et (16) appartiennent au même indice; or on peut démontrer qu'elle est en même temps nécessaire, quand z_2 est choisie comme il convient, de sorte qu'elle résulte alors de nos hypothèses [1].

Ceci conduit à l'égalité

$$B_i = H_{n-i},$$

dont la signification est que α_2 est susceptible d'être représenté par la formule

$$\alpha_2 = \sum_{0 \leq i \leq n} H_{n-i} U_1^{(i)}. \tag{23}$$

On peut donc exprimer α_2 et α_1 à l'aide d'une seule et même fonction arbitraire et de ses dérivées, *sans que l'indice de α_2 surpasse celui de α_1*. Le même raisonnement s'appliquant aux fonctions α_3, α_4, α_5, toutes ces fonctions s'expriment encore comme les deux précédentes, sans introduire aucun indice supérieur à n. Il est aisé d'en conclure la proposition suivante :

S'il entre dans a_1 les dérivées de la fonction U_1 jusqu'à l'ordre n, il n'entre pas dans z celles dont l'ordre dépasse $n-2$.

Pour s'en convaincre, soient, comme plus haut, $A_0, A_1, \ldots$ les coefficients de $U_1^{(n)}, U_1^{(n-1)}, \ldots$ dans l'expression de a_1 et respectivement $B_0, B_1, \ldots, C_0, C_1, \ldots$ ceux des mêmes dérivées dans les expressions de a_2, a_3, ... Je suppose, d'ailleurs, que l'expression de a_1 soit réduite à son indice mini-

---

[1] Si l'équation (22) n'est pas supposée, son premier membre est égal à une fonction de u; d'ailleurs on peut remplacer cette condition par une autre

$$\sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^{i+1} \frac{\partial^i}{\partial u^i} \left[B_{n-i} \frac{\partial \frac{1}{(\varepsilon)}}{\partial u} \right] = 0,$$

qui, eu égard à l'expression de (ε)

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \Delta}{\partial r_1 \, \partial s} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial r_2 \, \partial s} = 0,$$

est pour z_2 une relation linéaire; il est aisé d'apercevoir ce qu'elle signifie, et la proposition énoncée s'en déduit d'une façon immédiate.

mum. Je dis que d'abord on a la condition suivante

$$(24) \qquad A_0 z_1 + B_0 z_2 + C_0 z_3 + D_0 z_4 + E_0 z_5 = 0,$$

d'après laquelle $U_1^{(n)}$ disparaît de l'équation qui donne z.

Selon les relations (5), en effet,

$$(25) \qquad B_0 \frac{\partial u}{\partial x} = A_0 \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

et de même, à cause des formules (5) de l'article précédent,

$$(26) \qquad \begin{cases} C_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} = \left[(\lambda + \varepsilon\mu) \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mu\eta \dfrac{\partial u}{\partial y} \right] A_0, \\ D_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} = \left[(\lambda' + \varepsilon\mu') \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mu'\eta \dfrac{\partial u}{\partial y} \right] A_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Il en résulte, comme il est clair, l'équation

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} [A_0 z_1 + B_0 z_2 + C_0 z_3 + D_0 z_4 + E_0 z_5] \\ &\quad = A_0 \frac{\partial u}{\partial x} [z_1 + z_3 \lambda + z_4 \lambda' + z_5 \lambda''] \\ &\quad\quad + A_0 \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) [z_2 + z_3 \mu + z_4 \mu' + z_5 \mu''], \end{aligned}$$

dont le second membre s'évanouit, en vertu d'équations déjà établies, ce qui rend évidente la relation (24).

Mais, de plus, on a cette seconde équation

$$(27) \qquad A_1 z_1 + B_1 z_2 + C_1 z_3 + D_1 z_4 + E_1 z_5 = 0,$$

qui élimine $U_1^{(n-1)}$ de la formule de z; car les relations (25) et (26) permettent d'écrire évidemment, en même temps que l'équation (24), les deux suivantes

$$\begin{aligned} A_0 p_1 + B_0 p_2 + C_0 p_3 + D_0 p_4 + E_0 p_5 = 0, \\ A_0 q_1 + B_0 q_2 + C_0 q_3 + D_0 q_4 + E_0 q_5 = 0 \end{aligned}$$

et, par conséquent, aussi

$$(28)\qquad \begin{cases} z_1 \dfrac{\partial A_0}{\partial x} + z_2 \dfrac{\partial B_0}{\partial x} + z_3 \dfrac{\partial C_0}{\partial x} + z_4 \dfrac{\partial D_0}{\partial x} + z_5 \dfrac{\partial E_0}{\partial x} = 0, \\ z_1 \dfrac{\partial A_0}{\partial y} + z_2 \dfrac{\partial B_0}{\partial y} + z_3 \dfrac{\partial C_0}{\partial y} + z_4 \dfrac{\partial D_0}{\partial y} + z_5 \dfrac{\partial E_0}{\partial y} = 0; \end{cases}$$

comme, d'ailleurs, on a encore

$$(29)\qquad \frac{\partial B_0}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon\left(\frac{\partial A_0}{\partial x} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \eta\left(\frac{\partial A_0}{\partial y} + A_1 \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

et, pour C_1, D_1, E_1 des équations toutes semblables, où ε est remplacé par $\lambda + \varepsilon\mu$, η par $\mu\eta$ et B_0 par C_0, ..., on trouve, en multipliant ces équations par z_2, z_3, ... et ajoutant les produits,

$$\begin{aligned} &\left(z_2 \frac{\partial B_0}{\partial x} + z_3 \frac{\partial C_0}{\partial x} + z_4 \frac{\partial D_0}{\partial x} + z_5 \frac{\partial E_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}(B_1 z_2 + C_1 z_3 + D_1 z_4 + E_1 z_5) \\ &\quad = \frac{\partial A_0}{\partial x}\left[\varepsilon z_2 + (\lambda + \varepsilon\mu) z_3 + (\lambda' + \varepsilon\mu') z_4 + (\lambda'' + \varepsilon\mu'') z_5\right] \\ &\qquad + \frac{\partial A_0}{\partial y}(\eta z_2 + \mu\eta z_3 + \mu'\eta z_4 + \mu''\eta z_5) \\ &\qquad + A_1 \frac{\partial u}{\partial x}\left[\varepsilon z_2 + (\lambda + \varepsilon\mu) z_3 + (\lambda' + \varepsilon\mu') z_4 + (\lambda'' + \varepsilon\mu'') z_5\right] \\ &\qquad + A_1 \frac{\partial u}{\partial y}\left[\eta z_2 + \mu\eta z_3 + \mu'\eta z_4 + \mu''\eta z_5\right]. \end{aligned}$$

Les relations (25) de l'article premier annulent le coefficient de $\dfrac{\partial A_0}{\partial y}$, réduisent celui de $\dfrac{\partial A_0}{\partial x}$ à $-z_1$ et à $-z_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}$ celui de A_1; enfin le premier membre se simplifie, en vertu des équations (28), et, ces réductions terminées, il reste

$$-z_1 \frac{\partial A_0}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}(B_1 z_2 + C_1 z_3 + D_1 z_4 + E_1 z_5) = -\left(z_1 \frac{\partial A_0}{\partial x} + A_1 z_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

ce qui donne bien la formule (27).

Ainsi l'expression de z est, relativement aux fonctions arbitraires, d'ordre moindre que celle de a_1; la différence des ordres est de deux unités; l'équation (3) montre l'impossibilité qu'elle soit plus grande, l'expression de a_1 devant être tenue pour irréductible.

En outre, ayant choisi pour α_1 une équation quelconque parmi celles qui appartiennent à un certain indice, on peut toujours déterminer une équation, telle que (1), dont l'indice soit de deux unités moindre; il suffirait, pour l'établir, de montrer qu'on saura toujours trouver pour α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_5$ des fonctions appartenant à l'indice de α_1. Afin de ne point séparer deux discussions entièrement semblables, les preuves de ce théorème seront données au commencement du § 3, nous l'admettons pour un moment.

Les résultats obtenus permettent de former toutes les équations linéaires du second ordre qu'on peut résoudre par des formules générales, où l'une des fonctions arbitraires, au moins, n'entre sous aucun signe d'intégration, mais seulement avec ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé.

On voit, en effet, qu'il suffit de construire, parmi toutes ces équations, celles qui ont des intégrales intermédiaires et dont les coefficients satisfont, en conséquence, à la première condition posée par Laplace. L'une de ces équations étant prise pour celle que nous avons ainsi représentée

$$(1) \qquad \mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q + \mathrm{Z}z = 0,$$

avec cinq de ses solutions arbitrairement choisies, on composera la transformée correspondante (2) en α_1 : celle-ci ne peut satisfaire qu'à la troisième condition de Laplace et y satisfait, en effet, certainement.

D'ailleurs, comme nous l'avons montré, de toute équation, telle que (2), on peut déduire, par une transformation inverse, une équation semblable à (1), c'est-à-dire immédiatement intégrable. Le mode de construction indiqué fait donc connaître toutes les équations linéaires, où n'entre pas la fonction inconnue et dont les coefficients vérifient la troisième condition de Laplace. Avec celle-ci, en appliquant encore la même méthode, on composera toutes les équations satisfaisant à la cinquième condition de Laplace, puis à la septième, etc. Ces conditions, d'autre part, sont telles que la troisième contient la deuxième comme cas particulier, et de même la quatrième est contenue dans la cinquième, etc. Nous savons donc, en définitive, former toutes les équations du second ordre, linéaires et débarrassées de l'inconnue principale, dont la résolution est possible par des formules générales, où l'une des fonctions arbitraires, au moins, n'entre sous aucun signe d'intégration; il faut seulement connaître toutes les équations de cette espèce qui ont des intégrales intermédiaires, ce qui n'offre aucune difficulté. Il n'y a enfin nulle restriction provenant de ce qu'on a seules considérées les équations où manque l'inconnue principale. On sait, en effet, que toute solution d'une équation linéaire a dû permettre d'en éliminer précisément l'inconnue elle-même; cette remarque suffit pour donner à nos conclusions toute la généralité qu'elles comportent.

III.

Bien que liée d'une manière intime à celle dont nous avons déjà fait usage, la méthode que nous allons présenter conduit à des théorèmes souvent plus simples et par là dignes d'être remarqués.

En conservant les notations dont nous nous sommes servis plus haut, il est facile de voir qu'une solution quelconque z de l'équation proposée

$$(1) \qquad Hr + 2Ks + Lt + Pp + Qq + Zz = 0$$

peut s'exprimer ainsi qu'il suit :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} z = -\big[&z_3\textstyle\int(a_1\,d\lambda + a_2\,d\mu) \\ &+ z_4\textstyle\int(a_1\,d\lambda' + a_2\,d\mu') + z_5\textstyle\int(a_1\,d\lambda'' + a_2\,d\mu'')\big]. \end{aligned} \right.$$

Si l'on se reporte, en effet, aux équations (2) et (5) du § I, on en déduit

$$\begin{aligned} z = a_1 z_1 + a_2 z_2 + z_3 &\textstyle\int(\lambda\,da_1 + \mu\,da_2) \\ &+ z_4\textstyle\int(\lambda'\,da_1 + \mu'\,da_2) + z_5\textstyle\int(\lambda''\,da_1 + \mu''\,da_2) \end{aligned}$$

ou bien, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} z = a_1(z_1 + \lambda z_3 + \lambda' z_4 + \lambda'' z_5) + a_2(z_2 + \mu z_3 + \mu' z_4 + \mu'' z_5) \\ -\big[z_3\textstyle\int(a_1\,d\lambda + a_2\,d\mu) + z_4\textstyle\int(a_1\,d\lambda' + a_2\,d\mu') + z_5\textstyle\int(a_1\,d\lambda'' + a_2\,d\mu'')\big] \end{aligned}$$

et, en tenant compte des relations bien connues

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} z_1 + \lambda z_3 + \lambda' z_4 + \lambda'' z_5 = 0, \\ z_2 + \mu z_3 + \mu' z_4 + \mu'' z_5 = 0; \end{aligned} \right.$$

ceci n'est autre chose que l'équation (2), qu'il s'agissait d'établir. Posons, pour abréger,

$$(4)\qquad \begin{cases} v_1 + \int (a_1 d\lambda + a_2 d\mu) = 0, \\ v_2 + \int (a_1 d\lambda' + a_2 d\mu') = 0, \\ v_3 + \int (a_1 d\lambda'' + a_2 d\mu'') = 0; \end{cases}$$

ce qui donne

$$(5)\qquad z = z_3 v_1 + z_4 v_2 + z_5 v_3.$$

En différentiant cette formule et faisant usage des équations (3), on trouve

$$(6)\qquad dz = v_1 dz_3 + v_2 dz_4 + v_3 dz_5, \qquad z_3 dv_1 + z_4 dv_2 + z_5 dv_3 = 0;$$

on en conclut, entre les dérivées partielles du premier ordre de v_1, v_2, v_3, les deux relations

$$(7)\qquad \begin{cases} z_3 \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + z_4 \dfrac{\partial v_2}{\partial x} + z_5 \dfrac{\partial v_3}{\partial x} = 0, \\ z_3 \dfrac{\partial v_1}{\partial y} + z_4 \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + z_5 \dfrac{\partial v_3}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Formons encore les quantités

$$p_3 \frac{\partial v_1}{\partial y} + p_4 \frac{\partial v_2}{\partial y} + p_5 \frac{\partial v_3}{\partial y} = 0 \qquad \text{et} \qquad q_3 \frac{\partial v_1}{\partial x} + q_4 \frac{\partial v_2}{\partial x} + q_5 \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0;$$

comme elles sont toutes deux égales et de signes contraires à celle-ci

$$z_3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + z_4 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + z_5 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y},$$

en vertu des équations (7), elles sont aussi égales entre elles et l'on peut joindre au système (7) l'équation suivante :

$$(8)\qquad p_3 \frac{\partial v_1}{\partial y} - q_3 \frac{\partial v_1}{\partial x} + p_4 \frac{\partial v_2}{\partial y} - q_4 \frac{\partial v_2}{\partial x} + p_5 \frac{\partial v_3}{\partial y} - q_5 \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0.$$

Il est facile d'en éliminer $\dfrac{\partial v_3}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v_3}{\partial y}$ à l'aide des équations de ce système et si l'on pose ensuite

$$D = \Sigma \pm z_3 p_4 q_5,$$

on aura évidemment

$$(9) \qquad \frac{\partial D}{\partial p_3}\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial q_3}\frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial p_4}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial q_4}\frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

De la formule (5) déduisons maintenant les expressions de p, q, r, s et t, et introduisons-les dans l'équation (1), en nous souvenant que z_3, z_4, z_5 la rendent identique; nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}\left(p_3\frac{\partial v_1}{\partial x} + p_4\frac{\partial v_2}{\partial x} + p_5\frac{\partial v_3}{\partial x}\right) \\ &\quad + \mathrm{K}\left(p_3\frac{\partial v_1}{\partial y} + q_3\frac{\partial v_1}{\partial x} + p_4\frac{\partial v_2}{\partial y} + q_4\frac{\partial v_2}{\partial x} + p_5\frac{\partial v_3}{\partial y} + q_5\frac{\partial v_3}{\partial x}\right) \\ &\qquad + \mathrm{L}\left(q_3\frac{\partial v_1}{\partial y} + q_4\frac{\partial v_2}{\partial y} + q_5\frac{\partial v_3}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned}$$

Cette nouvelle équation jointe à (9), après en avoir éliminé $\frac{\partial v_3}{\partial x}$ et $\frac{\partial v_3}{\partial y}$, il est clair que l'on en peut tirer

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v_2}{\partial x} = \gamma\dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \delta\dfrac{\partial v_1}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial y} = \gamma'\dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \delta'\dfrac{\partial v_1}{\partial y}, \end{cases}$$

et l'on aura entre γ, ..., δ' les relations suivantes :

$$(11) \qquad \begin{cases} \gamma\dfrac{\partial D}{\partial p_3} + \gamma'\dfrac{\partial D}{\partial q_3} = \dfrac{\partial D}{\partial p_4}, \\ \delta\dfrac{\partial D}{\partial p_3} + \delta'\dfrac{\partial D}{\partial q_3} = \dfrac{\partial D}{\partial q_4}; \end{cases}$$

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathrm{H}\left(\dfrac{\partial D}{\partial q_4} - \gamma\dfrac{\partial D}{\partial q_3}\right) + \mathrm{K}\left(\gamma\dfrac{\partial D}{\partial p_3} - \gamma'\dfrac{\partial D}{\partial q_3} - \dfrac{\partial D}{\partial p_4}\right) + \mathrm{L}\left(\gamma'\dfrac{\partial D}{\partial p_3}\right) = 0, \\ -\mathrm{H}\left(\delta\dfrac{\partial D}{\partial q_3}\right) + \mathrm{K}\left(\delta\dfrac{\partial D}{\partial p_3} - \delta'\dfrac{\partial D}{\partial q_3} + \dfrac{\partial D}{\partial q_4}\right) + \mathrm{L}\left(\delta'\dfrac{\partial D}{\partial p_3} - \dfrac{\partial D}{\partial p_4}\right) = 0. \end{cases}$$

En remplaçant dans les deux dernières $\frac{\partial D}{\partial p_4}$, $\frac{\partial D}{\partial q_4}$, par leurs expressions tirées de (11), il en résulte

$$H\left(\delta\frac{\partial D}{\partial p_3}+\delta'\frac{\partial D}{\partial q_3}-\gamma\frac{\partial D}{\partial q_3}\right)-2K\left(\gamma'\frac{\partial D}{\partial q_3}\right)+L\left(\gamma'\frac{\partial D}{\partial p_3}\right)=0,$$

$$-H\left(\delta\frac{\partial D}{\partial q_3}\right)+2K\left(\delta\frac{\partial D}{\partial p_3}\right)+L\left(\delta'\frac{\partial D}{\partial p_3}-\gamma\frac{\partial D}{\partial p_3}-\gamma'\frac{\partial D}{\partial q_3}\right)=0$$

ou bien, en réunissant les facteurs de $\frac{\partial D}{\partial p_3}, \frac{\partial D}{\partial q_3}$,

$$(12')\qquad \begin{cases}(H\delta+L\gamma')\dfrac{\partial D}{\partial p_3}-[2K\gamma'+H(\gamma-\delta')]\dfrac{\partial D}{\partial q_3}=0,\\[2ex] [2K\delta-L(\gamma-\delta')]\dfrac{\partial D}{\partial p_3}-(H\delta+L\gamma')\dfrac{\partial D}{\partial q_3}=0;\end{cases}$$

et, comme on a l'identité évidente,

$$(13)\qquad \begin{cases}H[2K\delta-L(\gamma-\delta')]-2K(H\delta+L\gamma')\\ \qquad\qquad +L[2K\gamma'+H(\gamma-\delta')]=0,\end{cases}$$

les trois équations (12') et (13), linéaires et homogènes relativement aux trois quantités

$$\begin{gathered}2K\delta-L(\gamma-\delta'),\\ 2K\gamma'+H(\gamma-\delta'),\\ H\delta+L\gamma',\end{gathered}$$

montrent que ces quantités sont nulles, toutes les fois que le déterminant

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial D}{\partial p_3} & -\dfrac{\partial D}{\partial q_3} & 0\\[2ex] 0 & \dfrac{\partial D}{\partial p_3} & -\dfrac{\partial D}{\partial q_3}\\[2ex] H & -2K & L\end{vmatrix}=H\left(\frac{\partial D}{\partial q_3}\right)^2-2K\frac{\partial D}{\partial p_3}\frac{\partial D}{\partial q_3}+L\left(\frac{\partial D}{\partial p_3}\right)^2$$

est différent de zéro, ce que nous supposons. On peut donc substituer aux équations (12) celles-ci, beaucoup plus simples,

$$(14)\qquad -\frac{\gamma'}{H}=\frac{\gamma-\delta'}{2K}=\frac{\delta}{L},$$

qui doivent être prises avec (11) pour définir γ, γ', δ et δ'.

A cause des formules (10), nous voyons en outre que v_1 satisfait à l'équation suivante du second ordre et linéaire

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma \frac{\partial v_1}{\partial x} + \delta \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma' \frac{\partial v_1}{\partial x} + \delta' \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = 0.$$

Lorsque l'équation (1) admet une intégrale générale où l'une des fonctions arbitraires au moins n'entre point sous un signe $\int$, il en est de même de l'équation précédente (15).

Les relations (5) et (6) donnent en effet

$$(16) \qquad \begin{cases} z = z_3 v_1 + z_4 v_2 + z_5 v_3, \\ p = p_3 v_1 + p_4 v_2 + p_5 v_3, \\ q = q_3 v_1 + q_4 v_2 + q_5 v_3 \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$(17) \qquad v_1 = \frac{\partial \log D}{\partial z_3} z + \frac{\partial \log D}{\partial p_3} p + \frac{\partial \log D}{\partial q_3} q,$$

d'où l'on conclut le résultat énoncé.

Inversement, si l'équation (15) admet une intégrale générale de la manière déjà indiquée, il en est de même de l'équation (1), et l'indice minimum de z est inférieur d'une unité à l'indice minimum de v_1.

Ce théorème sera établi si l'on observe d'abord que v_1, v_2, v_3 s'expriment toujours à la fois par des formules où l'une des fonctions arbitraires au moins ne figure sous aucun signe d'intégration : deux de ces quantités sont données par des quadratures quand la troisième est connue, ce que montrent, par exemple, les équations (10).

En outre, d'après la définition même de v_1, on a

$$\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} = a_1, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial \mu} = a_2;$$

par suite, l'indice minimum de a_1 est tout au plus égal à celui de v_1 augmenté de l'unité; il est d'ailleurs de deux unités supérieur à celui de z, ce qui démontre la proposition dont il s'agissait.

Ce qui précède conduit à conclure que, l'équation (1) étant l'une quelconque de celles dont les coefficients satisfont à la première condition de Laplace et z_3, z_4, z_5 trois de ses solutions choisies à volonté, l'équation (15) est aussi l'une quelconque de celles dont les coefficients rendent identique la seconde équation de Laplace. Nous avons donc ainsi un nouveau moyen de construire toutes les équations résolubles par une intégrale générale où l'une des fonctions arbitraires n'entre qu'avec certaines de ses dérivées. Mais les résultats auxquels nous sommes parvenu peuvent être exposés d'une façon plus claire si l'on réduit à la forme suivante

$$(18) \qquad s + Pp + Qq = 0$$

l'équation proposée, avant de lui appliquer la substitution (17).

En ce cas, à cause des relations (14), L et H étant nuls, γ' et δ le sont aussi et l'équation transformée en v_1 devient

$$(19) \qquad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \gamma}{(\gamma - \delta') \partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial \delta'}{(\gamma - \delta') \partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0,$$

tandis que l'on a

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} \gamma \frac{\partial D}{\partial p_3} &= \frac{\partial D}{\partial p_4}, \\ \delta' \frac{\partial D}{\partial q_3} &= \frac{\partial D}{\partial q_4}; \end{aligned} \right.$$

posons alors

$$\zeta_1 = \frac{z_3}{z_5}, \qquad \zeta_2 = \frac{z_4}{z_5}, \qquad \zeta = \frac{z}{z_5},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \delta' \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = 0$$

et, par conséquent,

$$(21) \qquad \gamma - \delta' = \frac{[\zeta_1, \zeta_2]}{\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \frac{\partial \zeta_2}{\partial y}},$$

en désignant par $[\zeta_1, \zeta_2]$ le déterminant des fonctions ζ_1, ζ_2 de x et y.

On en conclut aussi

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\gamma}{(\gamma-\delta')\,\partial y} &= \frac{\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}}{\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}}\left(\frac{\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial y^2}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial y^2}}{[\zeta_1,\zeta_2]}\right),\\ \frac{-\partial\delta'}{(\gamma-\delta')\,\partial x} &= \frac{\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}}{\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}}\left(\frac{\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial x^2}}{[\zeta_1,\zeta_2]}\right); \end{aligned}\right.$$

remplaçant maintenant z par $z_3\zeta$ dans l'équation (18), on trouve

$$(23)\qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left(\mathrm{P}+\frac{\partial\log z_3}{\partial y}\right)+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\left(\mathrm{Q}+\frac{\partial\log z_3}{\partial x}\right)=0,$$

et cette équation nouvelle doit admettre pour solutions ζ_1 et ζ_2.

Comme conséquences,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial[\zeta_1,\zeta_2]}{\partial x}+[\zeta_1,\zeta_2]\left(\mathrm{Q}+\frac{\partial\log z_3}{\partial x}\right) &= \frac{\partial\zeta_2}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial x^2},\\ \frac{\partial[\zeta_1,\zeta_2]}{\partial y}+[\zeta_1,\zeta_2]\left(\mathrm{P}+\frac{\partial\log z_3}{\partial y}\right) &= \frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial y^2}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial y^2}. \end{aligned}\right.$$

La première de ces formules fait connaître une expression du produit

$$\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2},$$

laquelle, étant introduite dans la dernière équation (22), lui fait prendre la forme

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{\partial\delta'}{(\gamma-\delta')\,\partial x} &= \frac{\partial[\zeta_1,\zeta_2]}{[\zeta_1,\zeta_2]\,\partial x}+\mathrm{Q}+\frac{\partial\log z_3}{\partial x}-\frac{\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial x^2}}{\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}}\\ &= \mathrm{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\log\left(\frac{z_3[\zeta_1,\zeta_2]}{\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}}\right); \end{aligned}\right.$$

on aurait de même, par une transformation analogue,

$$(26)\qquad +\frac{\partial\gamma}{(\gamma-\delta')\,\partial y}=\mathrm{P}+\frac{\partial}{\partial y}\log\left(\frac{z_5[\zeta_1,\zeta_2]}{\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}}\right).$$

L'équation (19) peut donc s'écrire

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\left[\mathrm{P}+\frac{\partial}{\partial y}\log\left(\frac{z_5[\zeta_1,\zeta_2]}{\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}}\right)\right]\\&\qquad+\left[\mathrm{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\log\left(\frac{z_5[\zeta_1,\zeta_2]}{\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}}\right)\right]\frac{\partial v_1}{\partial y}=0.\end{aligned}\right.$$

D'où ce théorème :

Étant donnée une équation linéaire et du second ordre

$$s+\mathrm{P}p+\mathrm{Q}q=0,$$

dont toutes les solutions se réunissent en une intégrale générale contenant au moins une fonction arbitraire dégagée du signe $\int$ avec ses dérivées jusqu'à l'ordre n, si l'on désigne par z_3, z_4, z_5 trois de ses solutions choisies à volonté et par ζ_1, ζ_2 les rapports des deux premières à la troisième, par $[\zeta_1,\zeta_2]$ le déterminant fonctionnel de ces rapports, l'équation suivante

$$s+\left[\mathrm{P}+\frac{\partial}{\partial y}\log\left(\frac{z_5[\zeta_1,\zeta_2]}{\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}}\right)\right]p+\left[\mathrm{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\log\left(\frac{z_5[\zeta_1,\zeta_2]}{\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}}\right)\right]q=0$$

admet aussi une intégrale générale de la forme indiquée, mais la fonction arbitraire dégagée du signe $\int$ y figure avec ses dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$.

Avant de terminer ce paragraphe, il convient de noter encore ces deux points :

1° L'équation (19) étant donnée, on en déduit sans peine toutes celles qui lui correspondent de la même manière que l'équation (18). A cet effet, nous continuons à écrire

$$z = \zeta z_5, \qquad z_3 = \zeta_1 z_5, \qquad z_4 = \zeta_2 z_5,$$

comme nous l'avons fait plus haut; les formules (20) sont alors, suppression faite d'un facteur commun à tous les termes,

$$(27) \qquad \gamma\frac{\partial\zeta_2}{\partial y} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial y} = 0, \qquad \delta'\frac{\partial\zeta_2}{\partial x} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial x} = 0,$$

de sorte que ζ_2 est une intégrale quelconque de l'équation adjointe à (19), tandis que ζ_1 en dépend par une quadrature. Il est clair que l'équation suivante

$$(28) \qquad s + p\frac{\frac{\partial\gamma}{\partial x}}{\gamma-\delta'}\frac{\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}}{\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}} - q\frac{\frac{\partial\delta'}{\partial y}}{\gamma-\delta'}\frac{\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}}{\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}} = 0$$

a pour solutions à la fois ζ_1 et ζ_2 et qu'elle joue vis-à-vis de l'équation donnée le rôle qui appartenait à l'équation (18), résolvant ainsi le problème que nous avions en vue.

2° A la connaissance de l'équation (19) se rattache avec simplicité celle des équations satisfaites par les fonctions $a_1, a_2, \ldots$, définies au paragraphe précédent. Soient en effet v_1', v_2'; v_1'', v_2'' deux systèmes de solutions des équations

$$(19) \qquad \frac{\partial v_2}{\partial x} = \gamma\frac{\partial v_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial y} = \delta'\frac{\partial v_1}{\partial y},$$

et définissons deux fonctions nouvelles ζ_3, ζ_4 par les formules

$$(29) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\zeta_3}{\partial x} = (\delta' v_1' - v_2')\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial\zeta_3}{\partial y} = (\gamma v_1' - v_2')\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial\zeta_4}{\partial x} = (\delta' v_1'' - v_2'')\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial\zeta_4}{\partial y} = (\gamma v_1'' - v_2'')\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial y}; \end{cases}$$

elles satisfont à l'équation (28), dont elles déterminent, sous cette forme

$$(30) \qquad a_1\zeta_3 + a_2\zeta_4 + a_3\zeta_1 + a_4\zeta_2 + a_5,$$

une solution complète; et, si l'on pose d'abord

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} o &= \zeta_3 + \zeta_1\lambda + \zeta_2\lambda' + \lambda'', \\ o &= \frac{\partial\zeta_3}{\partial x} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\lambda + \frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\lambda', \\ o &= \frac{\partial\zeta_3}{\partial y} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial y}\lambda + \frac{\partial\zeta_2}{\partial y}\lambda', \end{aligned}\right.$$

puis ensuite

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} o &= \zeta_4 + \zeta_1\mu + \zeta_2\mu' + \mu'', \\ o &= \frac{\partial\zeta_4}{\partial x} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\mu + \frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\mu', \\ o &= \frac{\partial\zeta_4}{\partial y} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial y}\mu + \frac{\partial\zeta_2}{\partial y}\mu', \end{aligned}\right.$$

les fonctions a_1 et a_2 sont données, nous l'avons vu, par ces relations

$$(33)\qquad \frac{\partial a_2}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial a_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial a_2}{\partial y} = \eta'\frac{\partial a_1}{\partial y},$$

où l'on doit prendre

$$(34)\qquad \varepsilon = -\frac{\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}}{\dfrac{\partial\mu}{\partial y}}, \qquad \eta' = -\frac{\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}}{\dfrac{\partial\mu}{\partial x}}.$$

Mais il est visible que l'on a

$$(35)\qquad \mu = \varphi''_2, \qquad \lambda = \varphi'_2,$$

et l'on en tire

$$(33')\qquad \frac{\partial a_2}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial\varphi'_2}{\partial y}}{\dfrac{\partial\varphi''_2}{\partial y}}\frac{\partial a_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial a_2}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi''_2}{\partial x}}\frac{\partial a_1}{\partial y}.$$

Ces équations sont bien sous la forme cherchée, leurs coefficients ne dépendant plus que des éléments fournis par l'équation (19).

De là se déduirait un nouveau moyen de construire toutes les équations résolubles par une intégrale générale, où figure au moins une fonction arbitraire dégagée du signe $\int$. La discussion de ce sujet, qui d'ailleurs n'a plus aucune difficulté, peut être omise et nous ajouterons seulement que si l'on veut se donner ε, η', c'est-à-dire les coefficients de $\frac{\partial a_1}{\partial x}, \frac{\partial a_1}{\partial y}$ dans les relations (33'), la fonction nouvelle ν_3, ainsi définie

$$(36) \qquad \frac{\partial \nu_3}{\partial x} + (\zeta_1 + \gamma \zeta_2) \frac{\partial \nu_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \nu_3}{\partial y} + (\zeta_1 + \delta' \zeta_2) \frac{\partial \nu_1}{\partial y} = 0,$$

pourra, sans cesser de correspondre à des relations telles que (16), être choisie à volonté parmi celles qu'on obtient en attribuant à ζ_1, ζ_2, toutes les expressions permises par les formules (27). Nous aurons par la suite à faire usage de cette remarque.

IV.

Les résultats suivants sont en substance équivalents à ceux que nous venons d'obtenir, mais ils sont déduits de principes tout différents.

Les équations linéaires du second ordre, où n'entrent que deux variables indépendantes, peuvent être mises sous une forme intéressante que nous avons déjà rencontrée (17, I). Il convient de commencer, par une étude sommaire de cette forme et des propriétés qui s'y rattachent, les recherches que nous allons présenter.

Étant donnée une équation linéaire (1), *aux dérivées partielles du second ordre, on peut toujours trouver un facteur propre à lui donner la forme réduite*

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

φ et ψ étant fonctions linéaires de z et de ses dérivées du premier ordre. Ce facteur lui-même satisfait à une équation linéaire du second ordre, dont toutes les solutions jouissent de la propriété énoncée.

Posons en effet

$$\varphi = \alpha p + \beta q + \gamma z,$$
$$\psi = \alpha' p + \beta' q + \gamma' z,$$

et désignons par μ le facteur cherché, de sorte qu'on ait

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} H\mu &= -\alpha', \\ 2K\mu &= \alpha - \beta', \\ L\mu &= \beta; \end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} P\mu &= \frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\alpha'}{\partial x} - \gamma', \\ Q\mu &= \frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial\beta'}{\partial x} + \gamma, \\ Z\mu &= \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\gamma'}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

La première et la troisième équation (2) font connaître α' et β, ce qui permet de changer les deux premières équations (3) en les suivantes

$$(4)\qquad P\mu = \frac{\partial(H\mu)}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} - \gamma',$$

$$(5)\qquad Q\mu = \frac{\partial(L\mu)}{\partial y} - \frac{\partial\beta'}{\partial x} + \gamma;$$

et, en tirant encore β' de la deuxième des équations (2) et le portant dans la dernière des précédentes, on trouve

$$(6)\qquad Q\mu = \frac{\partial(L\mu)}{\partial y} + 2\frac{\partial(K\mu)}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \gamma.$$

Il ne reste plus qu'à différentier par rapport à y l'équation (6), par rapport à x l'équation (4) et ajouter les deux résultats, en tenant compte de la dernière équation (3); on obtient ainsi

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial(L\mu)}{\partial y} + 2\frac{\partial(K\mu)}{\partial x} - Q\mu\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(H\mu)}{\partial x} - P\mu\right] + Z\mu = 0,$$

ou bien

$$(7')\qquad \frac{\partial^2(H\mu)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2(K\mu)}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2(L\mu)}{\partial y^2} - \frac{\partial(P\mu)}{\partial x} - \frac{\partial(Q\mu)}{\partial y} + Z\mu = 0.$$

C'est, pour déterminer le facteur μ, une équation du second ordre et linéaire ; de plus, les coefficients des dérivées les plus élevées y sont précisément ceux qu'avaient dans l'équation proposée les dérivées de même espèce.

Au reste, on voit sans peine qu'une fonction μ, définie par l'équation précédente et substituée dans les formules (2) et (3), rend en effet leur intégration possible et par de simples quadratures. Pour abréger, il est commode d'appeler *multiplicateurs* d'une équation linéaire du second ordre les fonctions μ par lesquelles on doit la multiplier pour lui donner la forme (1). L'équation (7'), qui détermine ces multiplicateurs et l'équation (1), à laquelle ils se rapportent, peuvent alors être désignées ensemble sous le nom d'*équations adjointes*. Elles jouissent en effet de la propriété dont voici l'énoncé :

L'adjointe d'une équation quelconque du second ordre, linéaire et sans second membre, a pour multiplicateurs les solutions de cette dernière équation même.

Pour établir le résultat dont il s'agit, il suffit de former l'adjointe de l'équation (7'), ce qui se fait sans nulle difficulté et ramène à l'équation (1); on en déduit la conclusion précédente. Une équation donnée du second ordre peut être mise sous la forme (1) d'une infinité de manières différentes; voici sur ce sujet une proposition utile à mentionner :

Soit une équation linéaire du second ordre qui, ne renfermant pas la fonction inconnue, soit en outre de la forme (1), *c'est-à-dire*

$$(1') \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon p + \eta q) - \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon' p + \eta' q) = 0;$$

si μ désigne, comme plus haut, l'un quelconque de ses multiplicateurs et λ l'intégrale suivante

$$(8) \qquad \lambda = \int \left[dx \left(\eta \frac{\partial \mu}{\partial y} - \eta' \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + dy \left(\varepsilon' \frac{\partial \mu}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \right],$$

toutes les représentations possibles de l'équation (1') *sous la forme indi-*

quée sont contenues dans cette formule

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial y}[\mu(\varepsilon p + \eta q) + \lambda p] - \frac{\partial}{\partial x}[\mu(\varepsilon' p + \eta' q) + \lambda q] = 0.$$

C'est à quoi l'on parvient ainsi.

Soit

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_1 p + \eta_1 q) - \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon'_1 p + \eta'_1 q) = 0$$

une nouvelle manière d'écrire l'équation (1′) et dont il résulte en conséquence les relations de ce système

$$\begin{array}{c|c} \varepsilon'\mu = \varepsilon'_1 & \mu\left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y} - \dfrac{\partial\varepsilon'}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial\varepsilon_1}{\partial y} - \dfrac{\partial\varepsilon'_1}{\partial x}, \\ (\varepsilon - \eta')\mu = \varepsilon_1 - \eta'_1 & \\ \eta\mu = \eta_1 & \mu\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y} - \dfrac{\partial\eta'}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial\eta_1}{\partial y} - \dfrac{\partial\eta'_1}{\partial x}; \end{array}$$

il s'ensuit avec évidence

$$\varepsilon_1 - \mu\varepsilon = \eta'_1 - \mu\eta',$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_1 - \mu\varepsilon) = \eta\frac{\partial\mu}{\partial y} - \eta'\frac{\partial\mu}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_1 - \mu\varepsilon) = \varepsilon'\frac{\partial\mu}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial y},$$

ce qui conduit aux conclusions déjà signalées.

Un couple d'équations adjointes, où les inconnues n'entrent que par leurs dérivées, se transforme par un changement quelconque des variables indépendantes en un couple d'équations adjointes.

L'une des équations données étant (1′), il est clair que son adjointe se réduit à ceci

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial y}(\eta q - \eta' p) - \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon' p - \varepsilon q) = 0.$$

L'existence d'une fonction a_2, définie par les formules suivantes

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a_2}{\partial x} = \varepsilon\,\dfrac{\partial a_1}{\partial x} + \eta\,\dfrac{\partial a_1}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial a_2}{\partial y} = \varepsilon'\,\dfrac{\partial a_1}{\partial x} + \eta'\,\dfrac{\partial a_1}{\partial y}, \end{cases}$$

est certaine, pourvu que par a_1 l'on désigne une solution quelconque de l'équation (1′) et de même on peut assurer l'existence de la fonction λ, dont voici les dérivées partielles,

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial x} = \eta\,\dfrac{\partial \mu}{\partial y} - \eta'\,\dfrac{\partial \mu}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda}{\partial y} = \varepsilon'\,\dfrac{\partial \mu}{\partial x} - \varepsilon\,\dfrac{\partial \mu}{\partial y}, \end{cases}$$

pourvu que μ satisfasse à l'équation (10). Substitution faite des nouvelles variables aux anciennes, il suffit de modifier comme il convient la signification des lettres ε, η, ε', η', x et y, pour retrouver les systèmes (11) et (12), d'où l'on déduit deux équations adjointes : ce sont les transformées de (10) et (1′). La proposition énoncée est donc établie.

Si deux équations sont adjointes et contiennent seulement les dérivées des fonctions qu'elles définissent, on peut dans la première changer d'inconnue suivant l'équation

$$(13)\qquad z = z_1\varphi,$$

et, dans la seconde, suivant celle-ci

$$(14)\qquad z = z_1\psi,$$

les fonctions φ et ψ étant arbitraires, sans que ces équations cessent d'être adjointes.

Multiplions en effet par φ la seconde équation donnée ; puisqu'elle détermine tous les multiplicateurs de la première, c'est effectuer dans celle-ci la substitution (13). Le résultat de cette transformation étant ensuite multiplié par ψ, cette fois c'est la substitution (14) qu'on effectue dans la seconde équation du système, et, toutes ces opérations s'étant faites sans perdre la qualité d'adjointes que possédaient les équations primitives, le théorème est démontré.

Soit une équation linéaire du second ordre, sous la forme réduite

$$(1') \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon p + \eta q) - \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon' p + \eta' q) = 0,$$

et soit ζ *l'une quelconque de ses solutions particulières. Si l'on pose* $z = \zeta z_0$, *l'inconnue nouvelle* z_0 *doit satisfaire à une équation*

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_0 p_0 + \eta_0 q_0) - \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon'_0 p_0 + \eta'_0 q_0) = 0,$$

de même forme que (1) *et l'on a, pour déterminer* $\varepsilon_0, \ldots, \eta'_0$ *les relations suivantes :*

$$(16) \qquad \begin{cases} \varepsilon_0 = \varepsilon\zeta - \int\left[\left(\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \eta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dx + \left(\varepsilon'\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \eta'\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dy\right], \\ \eta_0 = \eta\zeta, \\ \varepsilon'_0 = \eta'\zeta, \\ \eta'_0 = \eta'\zeta - \int\left[\left(\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \eta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dx + \left(\varepsilon'\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \eta'\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dy\right]. \end{cases}$$

Effectuons en effet la substitution

$$z = \zeta z_0$$

dans l'équation (1′), ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 = &- \varepsilon'\zeta r_0 + (\varepsilon - \eta')\zeta s_0 + \eta\zeta t_0 \\ &+ \left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} - \frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}\right)\zeta + \left(\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \varepsilon'\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) - \left(\varepsilon'\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \eta'\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right]p_0 \\ &+ \left[\zeta\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\eta'}{\partial x}\right) + \left(\eta\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \eta'\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \left(\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \eta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right]q_0. \end{aligned}$$

D'après le théorème précédent, cette équation a pour l'un de ses multiplicateurs l'unité; d'où il suit que l'on doit avoir

$$
(17)\left\{
\begin{aligned}
\eta_0 &= \eta\zeta,\\
\varepsilon'_0 &= \varepsilon'\zeta,\\
\varepsilon_0 - \eta'_0 &= (\varepsilon - \eta')\zeta,\\
\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial y} - \frac{\partial\varepsilon'_0}{\partial x} &= \zeta\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} - \frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}\right) + \left(\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \varepsilon'\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) - \left(\varepsilon'\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \eta'\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right),\\
\frac{\partial\eta_0}{\partial y} - \frac{\partial\eta'_0}{\partial x} &= \zeta\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\eta'}{\partial x}\right) + \left(\eta\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \eta'\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \left(\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \eta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Les trois premières de ces équations permettent de transformer aisément les deux dernières en celles que voici

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\varepsilon_0 - \varepsilon\zeta)}{\partial y} &= -\left(\varepsilon'\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \eta'\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right),\\
\frac{\partial(\varepsilon_0 - \varepsilon\zeta)}{\partial x} &= -\left(\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \eta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right),
\end{aligned}
$$

ou bien en celles-ci

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\eta'_0 - \eta'\zeta)}{\partial y} &= -\left(\varepsilon'\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \eta'\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right),\\
\frac{\partial(\eta'_0 - \eta'\zeta)}{\partial x} &= -\left(\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \eta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right),
\end{aligned}
$$

d'où résulte la proposition énoncée.

Le théorème suivant ne s'applique qu'aux équations adjointes

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon p + \eta q) - \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon' p - \eta' q) &= 0,\\
\frac{\partial}{\partial y}(\eta q - \eta' p) - \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon' p - \varepsilon q) &= 0,
\end{aligned}
$$

pour lesquelles on suppose

$$
\begin{vmatrix} -2\varepsilon' & \varepsilon - \eta' \\ \varepsilon - \eta' & 2\eta \end{vmatrix} \gtrless 0.
$$

D'après l'un des théorèmes précédents, il y a un système de variables indépendantes, avec lequel on réduit ces deux équations à la fois à ne plus contenir qu'une seule dérivée du second ordre; cette dérivée est s et l'on peut se représenter ainsi les deux équations dont il s'agit

$$s + Pp + Qq + Zz = 0,$$
$$s - Pp - Qq + \left(Z - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) z = 0,$$

en y laissant, pour plus de généralité, figurer même l'inconnue z. Voici maintenant la proposition que nous voulons établir :

Deux équations adjointes s'intègrent toujours à la fois par des formules générales, où l'une des fonctions arbitraires au moins n'entre sous aucun signe d'intégration.

Il faut rappeler d'abord qu'à toute équation de la forme

$$(18) \qquad s + Pp + Qq + Zz = 0$$

répondent deux suites de fonctions, dont une doit s'évanouir, pour que l'intégration ait lieu de la manière indiquée, cette condition d'ailleurs étant suffisante. La première fonction de l'une des séries est, comme l'on sait, ainsi définie

$$(19) \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} + PQ - Z = \theta;$$

la première de l'autre série est la suivante

$$(20) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} + PQ - Z = \mathfrak{I};$$

quant aux autres fonctions, elles se construisent en faisant usage des équations de récurrence

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \theta_i = (\theta_{i-1} - \theta'_{i-1}) + \left(\theta_{i-1} - \dfrac{\partial^2 \log \theta_{i-1}}{\partial x\, \partial y}\right) & \left\{ \begin{array}{l} \theta'_i = \theta_{i-1}, \\ \theta' = \mathfrak{I}, \end{array} \right. \\[2ex] \mathfrak{I}_i = (\mathfrak{I}_{i-1} - \mathfrak{I}'_{i-1}) + \left(\mathfrak{I}_{i-1} - \dfrac{\partial^2 \log \mathfrak{I}_{i-1}}{\partial x\, \partial y}\right) & \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{I}'_i = \mathfrak{I}_{i-1}, \\ \mathfrak{I}' = \theta, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ceci posé, l'on voit sans peine que les deux suites, (θ_i), $(\mathfrak{I}_i)$, sont les mêmes pour deux équations adjointes, ou plutôt qu'elles se permutent sans altération lorsqu'on passe d'une équation quelconque à son adjointe. Pour le montrer, il suffit de faire voir qu'il en est ainsi pour les deux premières fonctions de ces suites. Or l'adjointe de l'équation (18) s'écrit

$$(22) \qquad s + P'p + Q'q + Z'z = 0,$$

en prenant

$$P' = -P, \qquad Q' = -Q, \qquad Z' = Z - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y};$$

et, comme on a évidemment

$$\frac{\partial Q'}{\partial y} + P'Q' - Z' = \frac{\partial P}{\partial x} + PQ - Z = \mathfrak{I},$$

$$\frac{\partial P'}{\partial x} + P'Q' - Z' = \frac{\partial Q}{\partial y} + PQ - Z = \theta,$$

la démonstration est terminée.

Les deux séries d'invariants θ_i et $\mathfrak{I}_i$ appartiennent donc en même temps à deux équations adjointes et, en conséquence, l'une d'elles ne peut admettre une intégrale générale, de la forme déjà mentionnée, sans qu'il en soit ainsi pour l'autre. D'ailleurs le nombre des différentiations, à effectuer sur la fonction arbitraire dégagée du signe $\int$, pour être en état de construire cette intégrale, est déterminé par l'ordre du premier invariant θ_i ou $\mathfrak{I}_i$ qui s'évanouit; ce nombre est donc le même pour deux équations adjointes.

En terminant cet article, il est utile de noter encore la proposition suivante :

Toute équation de la forme

$$s = \lambda z$$

est évidemment identique à son adjointe; inversement toute équation, qui *ne se distingue pas de son adjointe, est réductible à la forme*

$$s = \Lambda z.$$

L'équation donnée

$$Hr + 2Ks + Lt + Pp + Qq + Zz = 0,$$

par un changement des variables indépendantes, peut en effet se présenter ainsi

$$(23) \qquad 2K_0 s + P_0 p + Q_0 q + Z_0 z = 0,$$

et la même substitution donne une forme semblable à son adjointe, sans lui faire perdre cette qualité, de sorte qu'elle est ce qui suit

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 2K_0 s + \left(\frac{2\partial K_0}{\partial y} - P_0\right) p + \left(\frac{2\partial K_0}{\partial x} - Q_0\right) q \\ & \qquad + \left(\frac{2\partial^2 K_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial P_0}{\partial x} - \frac{\partial Q_0}{\partial y} + Z_0\right) z = 0. \end{aligned} \right.$$

L'identité des équations (23) et (24) exige seulement que l'on ait

$$(25) \qquad P_0 = \frac{\partial K_0}{\partial y}, \qquad Q_0 = \frac{\partial K_0}{\partial x},$$

ce qui permet d'écrire la première de cette façon

$$(23') \qquad 2K_0 s + \frac{\partial K_0}{\partial y} p + \frac{\partial K_0}{\partial x} q + Z_0 z = 0.$$

Il suffit alors d'y prendre une inconnue nouvelle

$$z_0 = \sqrt{K_0}\, z,$$

pour lui donner la forme cherchée

$$(26) \qquad s_0 = z_0 \left(\frac{\dfrac{\partial^2 \sqrt{K_0}}{\partial x \partial y}}{\sqrt{K_0}} - \frac{Z_0}{2K_0} \right),$$

ce qui démontre le théorème.

V.

Ces résultats découvrent une nouvelle méthode pour composer le groupe entier des équations dont il y a une intégrale générale contenant une fonction arbitraire dégagée du signe $\int$.

A cet effet, imaginons que l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\mu}{\partial y}-\eta'\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon'\frac{\partial\mu}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)=0$$

admette une intégrale de cette espèce et que l'on ait calculé d'après elle une fonction λ définie par ces relations

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}=\eta\dfrac{\partial\mu}{\partial y}-\eta'\dfrac{\partial\mu}{\partial x},\\[2ex] \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}=\varepsilon'\dfrac{\partial\mu}{\partial x}-\varepsilon\dfrac{\partial\mu}{\partial y}.\end{cases}$$

L'équation adjointe en a_1 peut, comme nous l'avons vu, se représenter ainsi

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda+\varepsilon\mu)\frac{\partial a_1}{\partial x}+\mu\eta\frac{\partial a_1}{\partial y}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\varepsilon'\frac{\partial a_1}{\partial x}+(\lambda+\mu\eta')\frac{\partial a_1}{\partial y}\right]=0.$$

Elle exprime qu'il existe une fonction a_2 dont les dérivées partielles se calculeraient par les formules que je transcris

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a_2}{\partial x}=(\lambda+\varepsilon\mu)\dfrac{\partial a_1}{\partial x}+\mu\eta\dfrac{\partial a_1}{\partial y},\\[2ex] \dfrac{\partial a_2}{\partial y}=\mu\varepsilon'\dfrac{\partial a_1}{\partial x}+(\lambda+\mu\eta')\dfrac{\partial a_1}{\partial y};\end{cases}$$

résolues par rapport aux dérivées partielles de a_1, on les pourrait écrire de cette manière

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a_1}{\partial x}=\Phi\dfrac{\partial a_2}{\partial x}+\Phi'\dfrac{\partial a_2}{\partial y},\\[2ex] \dfrac{\partial a_1}{\partial y}=\Psi\dfrac{\partial a_2}{\partial x}+\Psi'\dfrac{\partial a_2}{\partial y};\end{cases}$$

Φ, Φ', ... sont donnés par des relations qu'on aperçoit et qui les font dépendre de λ et de μ. Or les équations (5) supposent que l'on ait

$$(6)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi\frac{\partial a_2}{\partial x}+\Phi'\frac{\partial a_2}{\partial y}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\Psi\frac{\partial a_2}{\partial x}+\Psi'\frac{\partial a_2}{\partial y}\right]=0,$$

ce qui est pour a_2 une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Dans un précédent article (§ II), nous avons montré que, si l'équation (3) admet une intégrale générale d'indice n, l'équation (6) admet aussi une intégrale générale dont l'indice n'est point supérieur à $n+1$; nous ajouterons que, l'équation (3) étant prise à volonté parmi celles dont il y a une intégrale générale d'indice n, l'équation (6) peut représenter l'une quelconque des équations appartenant à l'indice $n+1$.

Cette conclusion va résulter de ce qui suit :

Tout d'abord, la liaison établie entre a_1 et a_2 par des formules telles que (4) restant intacte, lorsqu'on change arbitrairement les variables indépendantes, nous imaginerons qu'on ait adopté l'un des systèmes réduisant l'équation donnée à ne plus contenir qu'une seule dérivée du second ordre, ce qui revient à supposer

$$\varepsilon'=0=\eta$$

et, par conséquent,

$$\Phi'=0=\Psi.$$

Cela fait et quelle que soit l'équation donnée

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial a_1}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta'\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)=0,$$

je dis qu'il y a pour λ et μ des expressions telles que l'équation correspondante

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi\frac{\partial a_2}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi'\frac{\partial a_2}{\partial y}\right)=0,$$

admette une intégrale d'indice supérieur à celui de la proposée. En effet, il a été établi au § I qu'à la fonction a_1 si l'on joint a_2 et trois autres fonctions semblables a_3, a_4, a_5, on peut avec ces cinq fonctions représenter toutes les intégrales z d'une certaine équation d'indice moindre. Je veux dire qu'il y a pour celle-ci une solution complète se changeant en une intégrale quelconque lorsque l'on substitue $a_1, a_2, \ldots, a_5$ aux constantes arbitraires qu'elle renferme, et la même transformation a lieu pour ses dérivées partielles des deux premiers ordres.

Mais les résultats déjà démontrés apprennent qu'on peut aussi faire correspondre à l'intégrale z de l'équation indiquée trois fonctions v_1, v_2, v_3 dont l'une au moins est d'indice supérieur à z. Elles sont d'ailleurs liées à l'une d'entre elles v_1 par des relations pareilles à celles qui existent entre $a_1, a_2, \ldots, a_5$ et chacune a l'indice de a_1 ou un indice inférieur d'une unité.

Enfin, d'après la remarque qui termine le § III, lorsqu'on attribue aux coefficients ε, η' de l'équation (7) toutes les expressions qu'on leur peut assigner sans changer la fonction a_1, les coefficients de l'équation satisfaite par v_1 peuvent prendre aussi l'une après l'autre toutes les expressions pour lesquelles cette dernière fonction n'est pas changée. Cela étant, si le théorème énoncé n'était pas vrai pour l'équation donnée, supposée d'indice $n+1$, toutes les fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_5$ appartenant sans distinction à cet indice, on sait que l'équation (9) aurait pour indice $n-1$ et les fonctions $v_1, v_2, v_3, \ldots$ auraient toutes l'indice n. Or elles ont avec l'une d'elles v_1 la même relation qu'avait a_2 avec a_1; il y aurait donc aussi, parmi les équations semblables à (7), appartenant à l'indice n, au moins une équation pour laquelle aucune de ses transformées telles que (8) ne serait d'indice supérieur, c'est-à-dire que le théorème, n'étant pas vrai pour une équation d'indice $n+1$, cesserait aussi de l'être pour une équation d'indice n. Mais il est évident, comme on va voir, pour l'indice zéro et, par suite, doit toujours être admis.

Pour le montrer, développons l'équation (8)

$$(8') \qquad (\varepsilon - \eta')\frac{\partial^2 a_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\frac{\lambda + \eta'\mu}{\lambda + \varepsilon\mu}\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta'}{\partial x}\frac{\lambda + \varepsilon\mu}{\lambda + \eta'\mu}\frac{\partial a_2}{\partial y} = 0,$$

et supposons-la d'indice zéro en même temps que (7). Un calcul bien connu, que nous omettons pour abréger, fait alors reconnaître la nécessité de l'un des systèmes de conditions suivantes :

$$(a)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y}}{\varepsilon - \eta'} \dfrac{\lambda + \eta'\mu}{\lambda + \varepsilon\mu} \dfrac{\partial \log(\lambda + \varepsilon\mu)}{\partial x}, \\ 0 = \dfrac{\partial^2\varepsilon}{(\varepsilon - \eta')\,\partial x\,\partial y} - \dfrac{\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y}}{(\varepsilon - \eta')^2}; \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\dfrac{\partial\eta'}{\partial x}}{\varepsilon - \eta'} \dfrac{\lambda + \varepsilon\mu}{\lambda + \eta'\mu} \dfrac{\partial \log(\lambda + \eta'\mu)}{\partial y}, \\ 0 = \dfrac{\partial^2\eta'}{(\varepsilon - \eta')\,\partial x\,\partial y} + \dfrac{\dfrac{\partial\eta'}{\partial x}\dfrac{\partial\eta'}{\partial y}}{(\varepsilon - \eta')^2}. \end{cases}$$

Ni l'un ni l'autre ne peut avoir lieu pour toutes les expressions de λ et μ, définies par les équations (2),

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \varepsilon\,\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0 = \frac{\partial\lambda}{\partial x} + \eta'\,\frac{\partial\mu}{\partial x},$$

que si $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y} = 0$ ou $\dfrac{\partial\eta'}{\partial x} = 0$. Ces cas, sans importance, en effet, font exception. Nous pouvons conclure en outre qu'il y a toujours pour λ et μ une infinité d'expressions telles que les équations (7) et (8) appartiennent au même indice [1]. Le raisonnement dont nous avons fait usage plus haut prouve en effet que, s'il en était autrement pour un certain indice $n+1$, la même chose aurait lieu pour tous les indices inférieurs et notamment pour l'indice zéro. Mais, pour ce cas, les deux équations du système (a), par exemple, ont toujours une infinité de solutions communes; car, en posant,

$$\frac{\partial(\lambda + \varepsilon\mu)}{\partial x} = 0,$$

il en résulte cette relation

$$(9)\qquad (\varepsilon - \eta')\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = 0,$$

---

[1] On peut aussi parvenir à cette conclusion par une étude directe et très facile de l'équation (22, § II), en examinant les transformations qu'elle subit quand on remplace (ε) par $\lambda + (\varepsilon)\mu$, ($\eta'$) par $\lambda + (\eta')\mu$, ce qui n'altère pas l'équation satisfaite par a_1.

qui, différentiée par rapport à y, en tenant compte de l'équation vérifiée par la fonction μ, conduit à la suivante :

$$\mu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0. \tag{10}$$

Celle-ci se réduit à être une conséquence de l'équation (9), en vertu de la seconde relation du système (a).

Il existe donc bien, pour les fonctions λ et μ satisfaisant aux équations (2), une infinité d'expressions pour lesquelles les équations (7) et (8) sont de même indice, ce que nous voulions établir. La démonstration de ce point est celle qui avait été réservée dans un article précédent (§ II).

Les résultats que nous venons d'obtenir permettent d'énoncer ce théorème :

Si l'équation

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial a_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial a_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon' \frac{\partial a_1}{\partial x} + \eta' \frac{\partial a_1}{\partial y}\right) = 0 \tag{11}$$

représente l'une quelconque de celles qui admettent une intégrale générale d'indice n, et λ et μ toutes les fonctions ainsi définies

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial \mu}{\partial y} - \eta' \frac{\partial \mu}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon' \frac{\partial \mu}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = 0,\\ &\lambda = \int\left[\left(\eta \frac{\partial \mu}{\partial y} - \eta' \frac{\partial \mu}{\partial x}\right) dx + \left(\varepsilon' \frac{\partial \mu}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \mu}{\partial y}\right) dy\right], \end{aligned}\right. \tag{12}$$

lesquelles peuvent toujours être calculées, les équations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial a_2}{\partial x} &= (\lambda + \varepsilon\mu) \frac{\partial a_1}{\partial x} + \mu\eta \frac{\partial a_1}{\partial y},\\ \frac{\partial a_2}{\partial y} &= \mu\varepsilon' \frac{\partial a_1}{\partial x} + (\lambda + \mu\eta') \frac{\partial a_1}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

résolues par rapport aux dérivées partielles de a_1, à l'aide des formules

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial x} &= \Phi \frac{\partial a_2}{\partial x} + \Phi' \frac{\partial a_2}{\partial y},\\ \frac{\partial a_1}{\partial y} &= \Psi \frac{\partial a_2}{\partial x} + \Psi' \frac{\partial a_2}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

déterminent sous cette forme

$$(15)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi\frac{\partial a_2}{\partial x}+\Phi'\frac{\partial a_2}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi\frac{\partial a_2}{\partial x}+\Psi'\frac{\partial a_2}{\partial y}\right)=0$$

l'ensemble des équations dont il y a une intégrale générale d'indice $n+1$.

La liaison établie entre les équations (11) et (13) s'aperçoit sous une forme très simple, lorsque, par le choix des variables indépendantes, il ne reste dans ces équations qu'une seule dérivée du second ordre. On trouve alors que

L'équation

$$(16)\qquad (\varepsilon-\eta')\frac{\partial^2 a_1}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial a_1}{\partial x}-\frac{\partial\eta'}{\partial x}\frac{\partial a_1}{\partial y}=0,$$

pouvant représenter l'une quelconque des équations qui admettent une intégrale générale d'indice n et λ, μ les fonctions ainsi définies

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\eta'\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\right)=0,\\ \lambda=-\displaystyle\int\left(\eta'\frac{\partial\mu}{\partial x}dx+\varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial y}dy\right),\end{cases}$$

on peut représenter sous cette forme

$$(18)\qquad (\varepsilon-\eta')\frac{\partial^2 a_2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\lambda+\eta'\mu}{\lambda+\varepsilon\mu}\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial\eta'}{\partial x}\frac{\lambda+\varepsilon\mu}{\lambda+\eta'\mu}\frac{\partial a_2}{\partial y}=0$$

l'ensemble des équations dont il existe une intégrale générale d'indice $n+1$.

Cette proposition et la précédente ont été tirées, comme l'on voit, d'un théorème donné au § IV sur les formes telles que (1) des équations linéaires du second ordre. Des conclusions équivalentes s'obtiennent par l'application d'un autre théorème, dont nous avons aussi parlé : c'est celui par lequel, étant donnée une équation de cette espèce

$$(19)\qquad \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon p+\eta q)-\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon' p+\eta' q)=0,$$

on parvient à présenter sous une forme semblable l'équation satisfaite par les rapports de toutes les intégrales de la première à l'une d'entre elles ζ.

En posant

$$(20)\qquad \int\left[\left(\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\eta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dx+\left(\varepsilon'\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\eta'\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dy\right]=\upsilon,$$

les coefficients de cette équation

$$(21)\qquad \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_0 p_0+\eta_0 q_0)-\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon'_0 p_0+\eta'_0 q_0)=0$$

sont donnés par les formules

$$(22)\qquad \begin{cases}\varepsilon_0=\varepsilon\zeta-\upsilon, & \varepsilon'_0=\varepsilon'\zeta,\\ \eta_0=\eta\zeta, & \eta'_0=\eta'\zeta-\upsilon.\end{cases}$$

Écrivons donc, comme le permet l'équation (21),

$$(23)\qquad \begin{cases}\varepsilon_0 p_0+\eta_0 q_0=\dfrac{\partial z_1}{\partial x}=p_1,\\[2mm] \varepsilon'_0 p_0+\eta'_0 q_0=\dfrac{\partial z_1}{\partial y}=q_1,\end{cases}$$

et résolvant ainsi, par rapport à p_0, q_0,

$$(24)\qquad \begin{cases}p_0=\Phi p_1+\Phi' q_1,\\ q_0=\Psi p_1+\Psi' q_1,\end{cases}$$

nous aurons, pour déterminer la fonction z_1, l'équation

$$(25)\qquad \frac{\partial}{\partial y}[\Phi p_1+\Phi' q_1]-\frac{\partial}{\partial x}[\Psi p_1+\Psi' q_1]=0,$$

dont l'intégrale générale ne peut dépasser l'indice $n+1$, toutes les fois que l'équation proposée (20) appartient à l'indice n. Mais en outre la fonction ζ peut être choisie de telle manière que cette intégrale générale atteigne en réalité l'indice $n+1$. C'est ce que nous ferons voir en établissant que la liaison supposée entre les équations (19) et (25) peut être ramenée à celle que nous avions entre (11) et (15). Considérons en effet l'équation adjointe de (19)

$$\frac{\partial}{\partial y}(\eta' p - \eta q) - \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon q - \varepsilon' p) = 0, \tag{26}$$

et soient μ l'une de ses solutions, λ la fonction qui en dépend par la quadrature toujours possible

$$\int\left[\left(\eta\frac{\partial\mu}{\partial y} - \eta'\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)dx + \left(\varepsilon'\frac{\partial\mu}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)dy\right] = \lambda. \tag{27}$$

En traitant l'équation (26) comme nous avons fait l'équation (19), au lieu des relations (23), nous formerons les deux suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &-(\lambda + \eta'\mu)p_0 + \eta\mu q_0 = p_1, \\ &\varepsilon'\mu p_0 - (\lambda + \varepsilon\mu) q_0 = q_1. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Ce système donne pour la fonction z_1 une équation linéaire et du second ordre, dont l'adjointe aurait pour solutions toutes les fonctions z_2 ainsi définies

$$\left\{\begin{aligned} &(\lambda + \varepsilon\mu)p_0 + \eta\mu q_0 = p_2, \\ &\varepsilon'\mu p_0 + (\lambda + \eta'\mu) q_0 = q_2. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Cette adjointe est visiblement l'équation qu'on aurait déduite de (11) par notre première méthode. Mais le passage d'une équation à son adjointe se fait toujours sans changer l'indice de l'intégrale générale, et l'on en conclut ce théorème, corrélatif de celui que nous avons énoncé plus haut :

Si l'équation

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon p) - \frac{\partial}{\partial x}(\eta' q) = 0 \tag{30}$$

représente l'une quelconque de celles qui admettent une intégrale générale d'indice n, ζ l'une de ses solutions prise à volonté et υ la fonction qui en dépend par cette quadrature

$$\upsilon = \int\left(\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial x}dx + \eta'\frac{\partial\zeta}{\partial y}dy\right), \tag{31}$$

on peut représenter sous cette forme

$$(32)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\varepsilon\zeta - \upsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{\eta'\zeta - \upsilon}\right) = 0$$

l'ensemble des équations dont il existe une intégrale générale d'indice $n+1$.

Pour achever l'examen des formes intégrables dans les équations linéaires du second ordre, qui contiennent deux variables indépendantes, il resterait à étudier d'une manière spéciale les équations de cette espèce

$$(33)\qquad s = \Lambda z,$$

auxquelles se rapporte le beau théorème démontré en 1870 par M. Moutard. Ce théorème ne se présente pas comme une conséquence directe de ceux que nous venons d'énoncer; cela tient à ce que, en les appliquant à une équation telle que (33), celle-ci ne se transforme point, en général, en une équation de même forme; mais on parvient sans peine au résultat désiré par le moyen suivant.

Considérons toutes les équations

$$(34)\qquad \frac{\partial(\varepsilon p)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon q)}{\partial x} = 0.$$

Ce sont celles qui sont identiques à leurs adjointes et, par conséquent, réductibles à la forme

$$s = \Lambda z.$$

En conservant de tous points nos notations précédentes et, par suite, désignant par z_0 le rapport d'une intégrale quelconque z de l'équation (34) à l'une d'entre elles ζ, la fonction, dont les dérivées partielles s'expriment ainsi

$$(35)\qquad \begin{cases} p_1 = (\varepsilon\zeta - \upsilon)p_0, \\ q_1 = -(\varepsilon\zeta + \upsilon)q_0, \end{cases}$$

satisfait, nous l'avons vu, à une équation linéaire du second ordre, toujours intégrable en même temps que la proposée (34) par une formule générale renfermant au moins une fonction arbitraire dégagée du signe $\int$. Si l'on applique à cette équation notre première méthode, on forme une nouvelle fonction z'_1, définie par ces formules

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} p'_1 &= [\lambda + (\varepsilon\zeta - \upsilon)\mu]p_0,\\ q'_1 &= [\lambda - (\varepsilon\zeta + \upsilon)\mu]q_0,\end{aligned}\right.$$

et jouissant encore de la propriété énoncée.

Appliquons maintenant cette même méthode à l'équation (34), puis à l'équation formée le second procédé dont nous avons parlé; nous trouverons, par ce moyen, une autre fonction z'_2 dont les dérivées partielles satisferont aux relations suivantes :

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} p'_2 &= [(\lambda + \varepsilon\mu)\zeta - \upsilon]p_0,\\ q'_2 &= [(\lambda - \varepsilon\mu)\zeta - \upsilon]q_0.\end{aligned}\right.$$

La comparaison des formules (36) et (37) permet de conclure

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} p'_1 + p'_2 &= p_0\,[(\lambda - \upsilon\mu) + (\lambda\zeta - \upsilon) + 2\varepsilon\mu\zeta],\\ q'_1 + q'_2 &= q_0\,[(\lambda - \upsilon\mu) + (\lambda\zeta - \upsilon) - 2\varepsilon\mu\zeta],\end{aligned}\right.$$

et, comme l'équation donnée (34) est, par hypothèse, identique à son adjointe, il en résulte qu'on peut prendre

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} \zeta &= \mu,\\ \upsilon &= \lambda;\end{aligned}\right.$$

d'où suit

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{p'_1 + p'_2}{2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z'_1 + z'_2}{2}\right) = \quad \varepsilon\zeta^2 p_0,\\ \frac{q'_1 + q'_2}{2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z'_1 + z'_2}{2}\right) = -\,\varepsilon\zeta^2 q_0.\end{aligned}\right.$$

Choisissons maintenant pour inconnue $z' = z\sqrt{\varepsilon}$, au lieu de z, dans l'équation (34), ce qui la réduit, comme l'on sait, à ceci

$$(41)\qquad s' = z'\frac{\partial^2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}\,\partial x\,\partial y},$$

et posons, pour abréger,

$$(42) \qquad \begin{cases} z'' = \dfrac{z'_1 + z'_2}{2}, \\ \zeta' = \zeta\sqrt{\varepsilon}; \end{cases}$$

les équations (40) deviennent alors

$$(40') \qquad \begin{cases} p'' = \zeta'^2 p_0, \\ q'' = -\zeta'^2 q_0, \end{cases}$$

et l'on en déduit

$$(43) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p''}{\zeta'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q''}{\zeta'^2}\right) = 0.$$

Il suffit de remplacer, dans cette équation, z'' par $z''\zeta'$ pour retrouver, sous sa forme habituelle

$$(44) \qquad s''' = z'''\left[\zeta' \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\partial x\, \partial y}\right],$$

l'équation déduite de (41) par l'emploi du théorème de M. Moutard, ζ' n'étant autre chose qu'une intégrale arbitraire de cette dernière équation.

SUR

QUELQUES ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

Les équations de la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + d = 0,$$

où a, b, c, d sont des fonctions de x et de y, ont été, depuis plus d'un siècle, l'objet de nombreuses recherches, soit parce que toutes les équations linéaires peuvent, en général, se ramener à ce type, soit parce qu'elles se rencontrent directement dans un grand nombre de problèmes de Géométrie.

Euler avait montré que certaines de ces équations pouvaient admettre des solutions contenant une fonction arbitraire de x et ses n premières dérivées. Dans son célèbre Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1773 et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers,* Laplace donna une méthode pour reconnaître si une équation du type (1) admet une intégrale de la forme indiquée par Euler et pour intégrer l'équation lorsque cette circonstance se présente. Cette belle méthode, appliquée aux équations intégrables, ne laisse rien à désirer; mais, dans le cas des équations non intégrables, elle est insuffisante, puisqu'il faudrait un nombre infini d'essais pour reconnaître qu'effectivement ces équations ne sont pas intégrables. Je ne crois pas que cette lacune ait jamais été comblée, et j'ignore même si quelques tentatives ont été faites dans ce sens. Dans un Mémoire dont l'Académie des Sciences a ordonné l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers* (*voir* l'introduction dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 18 avril 1870), M. Moutard a entrepris l'étude minutieuse de la forme la plus élémentaire dont soit susceptible l'intégrale générale des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, à savoir : celle qui consiste en une relation unique entre les trois variables, deux fonctions arbitraires de quantités distinctes formées explicitement avec les trois variables et les dérivées en nombre limité de ces fonctions arbitraires, les arbitraires n'entrant, d'ailleurs, sous aucun signe d'intégration. Malheureusement, M. Moutard n'a publié jusqu'à ce jour qu'un extrait de son Mémoire (*Journal de l'École Polytechnique,* XLV^e Cahier, 1878) : dans cet extrait, sont obtenues toutes les équations de la forme $s = z\varphi(x, y)$ qui admettent une intégrale générale explicite. A la vérité, M. Moutard s'est occupé aussi des équations dont l'intégrale générale peut contenir une fonction arbitraire de y engagée sous un signe d'intégration; mais, au point de vue des équations purement linéaires, les seules dont je parle ici, la méthode de Laplace suffit évidemment à les former toutes, au moins, par voie récurrente. M. Darboux, dans son Cours professé à la Sorbonne pendant l'année 1882-1883, a repris l'étude des équations de Laplace : introduisant la féconde notion des *invariants* qui donne à cette théorie toute la netteté désirable, il a repris le problème déjà résolu par M. Moutard et formé toutes les équations linéaires qui admettent une intégrale générale explicite ou, suivant l'expression d'Ampère, une intégrale générale de la première classe. Cette intégrale est

$$z = \mathrm{M}\begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{X}' & \mathrm{X}'' & \cdots & \mathrm{X}^{(i)} & \mathrm{Y} & \mathrm{Y}' & \cdots & \mathrm{Y}^{(j)} \\ x_1 & x'_1 & x''_1 & \cdots & x_1^{(i)} & y_1 & y'_1 & \cdots & y_1^{(j)} \\ x_2 & x'_2 & x''_2 & \cdots & x_2^{(i)} & y_2 & y'_2 & \cdots & y_2^{(j)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_{n+1} & x'_{n+1} & x''_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^{(i)} & y_{n+1} & y'_{n+1} & \cdots & y_{n+1}^{(j)} \end{vmatrix},$$

M est une fonction de x et de y; X est la fonction arbitraire de x, X', X'', ..., $X^{(i)}$ ses i premières dérivées; Y est la fonction arbitraire de y, Y', Y'', ..., $Y^{(j)}$ ses j premières dérivées, $i+j=n$; enfin $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont $n+1$ fonctions de x linéairement indépendantes entre elles, y_1, $y_2, \ldots, y_{n+1}$ des fonctions de y également indépendantes; x'_1, x''_1, ..., y'_1, ... sont les dérivées de ces fonctions. Cette intégrale est celle de l'équation de Laplace la plus générale qui admette explicitement dans sa solution $n+2$ fonctions arbitraires de x ou de y, irréductibles à un nombre moindre.

Après ces beaux travaux, les résultats particuliers ont un bien faible intérêt; cependant, celui que je vais faire connaître ayant un lien étroit avec un problème de Géométrie dont je dirai quelques mots, on m'excusera de le présenter ici. Pour plus de clarté, je diviserai mon travail en deux Parties, l'une analytique, l'autre géométrique. Dans la première Partie, je cherche à former des équations de Laplace pouvant s'intégrer par une suite d'équations différentielles ordinaires, ce qui n'est qu'un renversement de la méthode de Laplace (¹); je rencontre ainsi des équations contenant, dans leurs coefficients, autant d'arbitraires que l'on veut et qui s'intègrent toutes dès qu'une seule s'intègre : les relations entre les *invariants* de ces équations sont assez curieuses. Dans la seconde Partie, je me propose d'obtenir toutes les surfaces sur lesquelles les développables d'une congruence de droites donnée tracent un réseau conjugué : la solution de ce problème s'obtient aisément, grâce à un théorème de M. Darboux, et fournit une interprétation géométrique de la première Partie, analogue à celle que M. Darboux a donnée dans son Cours de la méthode de Laplace (²).

(¹) C'est aussi, évidemment, une des manières de présenter le dernier problème posé par M. Moutard dans la Note déjà citée.

(²) J'ai donné lecture de mon Mémoire à la Société Philomathique (séance du 27 décembre 1884).

PREMIÈRE PARTIE.

Employant les notations usuelles, j'écrirai l'équation de Laplace

$$(E) \qquad s + ap + bq + cz = 0.$$

Je supprime ainsi le dernier terme, ce qui a pour seul effet d'abréger un peu l'écriture. Les *invariants* de cette équation sont définis par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} h = ab - c + \dfrac{\partial a}{\partial x}, \\ k = ab - c + \dfrac{\partial b}{\partial y}. \end{cases}$$

La méthode de Laplace consiste à poser

$$(2) \qquad z_1 = az + \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Si l'équation en z_1 n'est pas du premier ordre, elle prend la forme

$$(E_1) \qquad s_1 + a_1 p_1 + bq_1 + c_1 z_1 = 0,$$

analogue à la forme (E) : ainsi s_1 désigne $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y}$, $p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x}$, ... Les invariants de cette équation seront désignés par les lettres h_1 et k_1. La méthode de Laplace, appliquée encore une fois, conduira à une nouvelle équation (E_2) avec invariants h_2 et k_2, et ainsi de suite. La condition, pour que la méthode réussisse, s'écrit alors $h_n = 0$; l'intégrale générale de l'équation (E) contient, dans ce cas, explicitement, une fonction arbitraire de x et ses n premières dérivées, la fonction arbitraire de y restant engagée sous le signe $\int$; M. Darboux dit alors que l'équation (E) est de rang n. Un changement dans les variables indépendantes n'a pour effet que de multiplier les invariants par certains facteurs; la substitution $z = \lambda\zeta$, ζ étant une nouvelle fonction et λ un facteur fonction de x et de y, n'altère pas les invariants. Enfin les invariants peuvent s'obtenir par voie récurrente, grâce aux formules

$$(3)\qquad \begin{cases} h_i = 2h_{i-1} - k_{i-1} - \dfrac{\partial^2 \log h_{i-1}}{\partial x\, \partial y}, \\ k_i = h_{i-1}, \end{cases}$$

qui subsistent pour $i = 1$, pourvu que l'on fasse $h_0 = h$ et $k_0 = k$.

Cela posé, conformément au programme que je me suis tracé, je dois écrire

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \alpha z + \beta = 0,$$

puisque z doit être obtenue par une suite d'équations différentielles ordinaires et du premier ordre; mais il sera plus commode d'écrire

$$(4)\qquad z' = \frac{\partial z}{\partial y} + (a + \alpha) z = q + (a + \alpha) z.$$

La substitution (2) de Laplace se déduirait de la nôtre en faisant $\alpha = 0$; mais j'aurai, dans la suite du calcul, à supposer α différent de zéro.

Éliminons z entre l'équation (E) et l'équation (4): j'obtiens les équations successives

$$\frac{\partial z'}{\partial x} = s + (a + \alpha) p + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x}\right) z = \alpha p - bq + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x} - c\right) z$$

ou, en tenant compte de l'équation (4),

$$p' = \frac{\partial z'}{\partial x} = \alpha p - bz' + \left(\alpha b + \frac{\partial \alpha}{\partial x} + h\right) z,$$

$$s' = \frac{\partial^2 z'}{\partial x\, \partial y} = \alpha s + p \frac{\partial \alpha}{\partial y} - bq' - \frac{\partial b}{\partial y} z' + \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \alpha b}{\partial y}\right) z + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha b + h\right) q$$

ou

$$s' = \left(-a\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) \frac{p' + bz' - \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha b + h\right) z}{\alpha} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + h\right) z' - bq' - \frac{\partial b}{\partial y} z' + \left[-\alpha c + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \alpha b}{\partial y} - (a + \alpha)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + h\right)\right] z.$$

Il faudrait, pour éliminer z, différentier encore une fois : on obtiendrait ainsi une équation du troisième ordre en α et en z' dans laquelle on pourrait considérer α comme absolument arbitraire ; mais il resterait à exprimer que l'équation en z' s'intègre par une suite d'équations linéaires, ce qui est un problème plus compliqué que celui d'où nous sommes partis. Nous sommes donc amenés à annuler dans la dernière équation le coefficient de z, ce qui donne

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{h}{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha(k-h) + \frac{\partial h}{\partial y} = 0.$$

Si α satisfait à cette équation, z' sera solution de l'équation

$$(\mathrm{E}') \qquad s' + a'p' + b'q' + c'z' = 0.$$

Les valeurs de a', b', c' sont

$$(6) \qquad \begin{cases} a' = a - \dfrac{\partial \log \alpha}{\partial y}, \\ b' = b, \\ c' = c + k - h - \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} - b\dfrac{\partial \log \alpha}{\partial y}, \end{cases}$$

et l'on en tire, en tenant compte de l'équation (5), les valeurs des invariants h' et k'

$$(7) \qquad h' = h + \frac{\partial \frac{h}{\alpha}}{\partial y},$$

$$(8) \qquad k' = h + \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

Pour intégrer l'équation (E') par une suite d'équations différentielles ordinaires du premier ordre et linéaires, il est naturel de lui appliquer avant tout la méthode de Laplace.

Démontrons d'abord une formule : en calculant h', on rencontre l'égalité

$$h' = 2h - k + \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial^2 \log \alpha}{\partial x \partial y};$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \, \partial y},$$

$$h' - h_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial^2 \log \alpha}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \, \partial y},$$

ce qui peut s'écrire

$$h' = h_1 + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\alpha}{h}\left(h + \frac{\partial \frac{h}{\alpha}}{\partial y}\right)\right]$$

ou, en tenant compte de l'équation (7),

$$h_1 = h' - \frac{\partial \frac{\alpha h'}{h}}{\partial x}. \tag{9}$$

Calculons ensuite, pour appliquer la méthode de Laplace, l'invariant h'_1 qui serait celui de la seconde équation formée à l'aide de (E′) comme (E_1) a été formée avec (E) ; la formule (3) nous donne

$$h'_1 = 2h' - k' - \frac{\partial^2 \log h'}{\partial x \, \partial y}.$$

Remplaçons h' et k' par leurs valeurs tirées des formules (7) et (8), il vient

$$h'_1 = h + 2\frac{\partial \frac{h}{\alpha}}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial^2 \log h'}{\partial x \, \partial y};$$

or l'équation (5) peut s'écrire

$$\frac{\partial \frac{h}{\alpha}}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} = h - k - \frac{\partial^2 \log \alpha}{\partial x \, \partial y},$$

donc

$$h'_1 = h_1 + \frac{\partial \frac{h}{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \log \frac{h}{\alpha h'}}{\partial x \, \partial y}. \tag{10}$$

D'autre part, l'équation (9) peut s'écrire

$$\frac{hh_1}{h'\alpha} = \frac{h}{\alpha} + \frac{\partial \log \frac{h}{\alpha h'}}{\partial x}.$$

Différentions par rapport à y et retranchons le résultat de l'équation (10) membre à membre; nous trouvons, pour valeur de h'_1,

$$h'_1 = h_1 + \frac{\partial \frac{hh_1}{\alpha h'}}{\partial y}. \tag{11}$$

Cela posé, je puis démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Appelons h', h'_1, h'_2, ... h'_n les invariants des équations déduites de* (E') *comme les équations* (E_1), (E_2), ... *ont été déduites de* (E) : *ces invariants sont liés à ceux de la suite* (E), (E_1), (E_2), ... *par les relations*

$$h_n = h'_{n-1} - \frac{\partial \frac{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-1}}{hh_1 \ldots h_{n-1}}}{\partial x}, \tag{12}$$

$$h'_n = h_n + \frac{\partial \frac{hh_1 \ldots h_n}{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-1}}}{\partial y}. \tag{13}$$

Ces formules sont la généralisation des formules (9) et (11) qu'elles reproduisent si l'on y fait $n = 1$. D'après un procédé connu, il suffit de démontrer que, si ces formules sont vraies pour toutes les valeurs de l'indice égales ou inférieures à n, elles subsistent lorsqu'on y remplace n par $n + 1$.

Pour le démontrer, écrivons la formule (12) de la manière suivante

$$\frac{hh_1 h_2 \ldots h_n}{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-1}} = \frac{hh_1 \ldots h_{n-1}}{\alpha h' h'_1 \ldots h_{n-2}} - \frac{\partial \log \frac{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-1}}{hh_1 \ldots h_{n-1}}}{\partial x},$$

et différentions par rapport à y; il vient

$$\frac{\partial \frac{hh_1 \ldots h_n}{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-1}}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{hh_1 \ldots h_{n-1}}{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-2}}}{\partial y} - \frac{\partial^2 \log \frac{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-1}}{hh_1 \ldots h_{n-1}}}{\partial x\, \partial y}$$

ou, en se servant de la formule (13) et de celle qu'on en déduit par le changement de n en $n-1$,

$$(14)\qquad h'_n - h_n = h'_{n-1} - h_{n-1} - \frac{\partial^2 \log \dfrac{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-1}}{h h_1 \ldots h_{n-1}}}{\partial x\, \partial y}.$$

De même l'équation (13) peut s'écrire

$$\frac{\alpha h' h'_1 \ldots h'_n}{h h_1 \ldots h_n} = \frac{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-1}}{h h_1 \ldots h_{n-1}} + \frac{\partial \log \dfrac{h h_1 \ldots h_n}{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-1}}}{\partial y};$$

d'où, en différentiant par rapport à x,

$$\frac{\partial \dfrac{\alpha h' h'_1 \ldots h'_n}{h h_1 \ldots h_n}}{\partial x} = \frac{\partial \dfrac{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-1}}{h h_1 \ldots h_{n-1}}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \log \dfrac{h h_1 \ldots h_n}{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-1}}}{\partial x\, \partial y}$$

et, à cause de (12),

$$\frac{\partial \dfrac{\alpha h' h'_1 \ldots h'_n}{h h_1 \ldots h_n}}{\partial x} = h'_{n-1} - h_n + \frac{\partial^2 \log \dfrac{h h_1 \ldots h_n}{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-1}}}{\partial x\, \partial y}.$$

Retranchons cette équation de l'équation (14) membre à membre; il vient

$$h'_n - h_n - \frac{\partial \dfrac{\alpha h' h'_1 \ldots h'_n}{h h_1 \ldots h_n}}{\partial x} = h_n - h_{n-1} - \frac{\partial^2 \log h_n}{\partial x\, \partial y}$$

ou

$$(15)\qquad h_{n+1} = h'_n - \frac{\partial \dfrac{\alpha h' h'_1 \ldots h'_n}{h h_1 \ldots h_n}}{\partial x}.$$

C'est la formule (12), où n est changé en $n+1$.

Maintenant, à cause des formules (3), j'ai

$$(16)\qquad h'_{n+1} = 2h'_n - h'_{n-1} - \frac{\partial^2 \log h'_n}{\partial x\, \partial y};$$

or l'équation (15) peut s'écrire

$$\frac{h h_1 \ldots h_{n+1}}{\alpha h' h'_1 \ldots h'_n} = \frac{h h_1 \ldots h_n}{\alpha h' h'_1 \ldots h'_{n-1}} - \frac{\partial \log \dfrac{\alpha h' h'_1 \ldots h'_n}{h h_1 \ldots h_n}}{\partial x};$$

d'où, en différentiant par rapport à y et tenant compte de l'équation (13),

$$\frac{\partial \dfrac{hh_1\ldots h_{n+1}}{\alpha h' h'_1 \ldots h'_n}}{\partial y} = h'_n - h_n - \frac{\partial^2 \log \dfrac{\alpha h' h'_1 \ldots h'_n}{hh_1 \ldots h_n}}{\partial x\, \partial y}.$$

Retranchons cette équation de l'équation (14) membre à membre; il vient

$$2h'_n - h'_{n-1} = 2h_n - h_{n-1} + \frac{\partial^2 \log h'_n}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \log h_n}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial \dfrac{hh_1 \ldots h_{n+1}}{\alpha h' \ldots h'_n}}{\partial y};$$

d'où enfin, en remplaçant le premier membre de cette équation par sa valeur dans l'équation (16),

$$h'_{n+1} = h_{n+1} + \frac{\partial \dfrac{hh_1 \ldots h_{n+1}}{\alpha h' h'_1 \ldots h'_n}}{\partial y};$$

c'est la formule (17), sauf le changement de n en $n+1$. Le théorème est donc démontré.

Corollaire I. — Si h'_{n-1} est nul sans que $h, h_1, \ldots, h_{n-1}$ le soient, $h_n = 0$. Cela résulte de la formule (12).

Corollaire II. — Si h_n est nul sans que $h', h'_1, \ldots, h'_{n-1}$ le soient, $h'_n = 0$. Cela résulte de la formule (13).

Théorème. — *Si l'équation* (E′) *est de rang* $n-1$, *l'équation* (E) *est de rang* n *au plus. Si l'équation* (E) *est de rang* n, *l'équation* (E′) *est de rang* n *au plus.*

Ce théorème n'est qu'un autre énoncé des deux corollaires qui le précèdent.

Je signalerai encore sans démonstration une autre formule qui se rapporte au même groupe d'équations

$$k = k' - \frac{\partial \dfrac{k'}{\alpha}}{\partial y};$$

d'où résulte que l'invariant k' ne peut, lui non plus, être nul sans que l'équation (E) ait un invariant nul. Quant aux invariants $k'_1, k'_2, \ldots, k'_n$, ils sont égaux respectivement à h', h'_1, $\ldots$, h'_{n-1} : il n'y a pas lieu de nous y arrêter.

Pour que le problème soit entièrement résolu, il reste à intégrer l'équation (5). Cette équation peut s'écrire

$$(17)\qquad \frac{\partial \frac{h}{\alpha}}{\partial y} = h - k + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right).$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$m = \int_0^y h\,dy,$$

$$n = \int_0^x h_1\,dx,$$

et soit φ une nouvelle fonction définie par l'équation

$$\frac{h}{\alpha} = -m - \frac{\partial \log \varphi}{\partial x}.$$

L'équation (17) devient

$$-\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial x\,\partial y} = 2h - k + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)$$

ou

$$-\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial x\,\partial y} = h_1 + \frac{\partial^2 \log h}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right).$$

Intégrons par rapport à x,

$$-\frac{\partial \log\varphi}{\partial y} = n + \frac{\partial \log h}{\partial y} + \alpha - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y} = n + \frac{\partial \log h}{\partial y} + \alpha\left(1 + \frac{\partial \frac{1}{\alpha}}{\partial y}\right).$$

En remplaçant, dans cette équation, α par sa valeur en fonction de φ, nous obtenons l'équation de Laplace

$$(18)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + n\frac{\partial\varphi}{\partial x} + m\frac{\partial\varphi}{\partial y} + mn\varphi = 0.$$

Ses deux invariants sont $\frac{\partial n}{\partial x}=h_1$ et $\frac{\partial m}{\partial y}=h=k_1$. Il en résulte que la fonction φ est égale à z_1 à un facteur λ, fonction de x et de y, près. Je suis donc amené à poser

$$\varphi=\lambda z_1.$$

On trouve, en identifiant avec l'équation (E_1), que

$$(a_1-n)\,dy+(b-m)\,dx$$

est une différentielle exacte du, et l'on peut prendre

$$\lambda=e^u.$$

Alors

$$\log\varphi=u+\log z_1,$$

$$\alpha=-\frac{h}{m+\frac{\partial\log\varphi}{\partial x}}=-\frac{h}{m+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\log z_1}{\partial x}}=-\frac{hz_1}{bz_1+\frac{\partial z_1}{\partial x}}.$$

Or $\frac{h}{bz_1+\frac{\partial z_1}{\partial x}}$ n'est autre chose que ζ si l'on appelle ζ une intégrale, d'ailleurs quelconque, de l'équation (E). Nous avons donc enfin

$$\alpha=-\frac{z_1}{\zeta}=-\frac{\zeta}{a\zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial y}}.$$

En résumé, si l'on sait intégrer l'équation (E), on saura intégrer l'équation (E′), c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x\,\partial y}+\left(a-\frac{\partial\log\alpha}{\partial y}\right)\frac{\partial z'}{\partial x}+b\frac{\partial z'}{\partial y}+c+k-h-\frac{\partial\alpha}{\partial x}-b\frac{\partial\log\alpha}{\partial y}=0,$$

α ayant la valeur qui vient d'être indiquée.

L'intégrale générale est

$$z' = \frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial \log \zeta}{\partial y},$$

z étant l'intégrale générale de (E).

Il est évident qu'on pourra traiter cette équation comme la précédente et obtenir ainsi une équation intégrable avec deux fonctions arbitraires dans les coefficients, et ainsi de suite indéfiniment.

PARTIE GÉOMÉTRIQUE.

Problème. — *Étant donnée une congruence de droites, déterminer les surfaces coupées par les développables de la congruence suivant un réseau conjugué.*

Je m'appuierai sur le théorème suivant : « Si les quatre coordonnées x, y, z, t d'un point M d'une surface sont exprimées en fonction de deux paramètres u et v, la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes $u =$ const. et $v =$ const. soient conjuguées est que les quatre coordonnées satisfassent à une même équation de la forme de celles de Laplace. On sait, d'autre part, que toute développable formée avec les droites d'une congruence touche chacune des nappes de la surface focale suivant une courbe dont la tangente en un point de contact est conjuguée de la direction de la droite de la congruence qui passe en ce point. »

Supposons alors que les quatre coordonnées d'un point M de la surface focale vérifient l'équation

$$(a) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + a\frac{\partial \theta}{\partial u} + b\frac{\partial \theta}{\partial v} + c\theta = 0,$$

où a, b, c seront des fonctions de u et de v.

Je supposerai que les droites de la congruence soient les tangentes aux courbes $u =$ const. Un point M' de la tangente au point M aura pour coordonnées homogènes

$$(b)\qquad \begin{cases} x' = \rho x + \dfrac{\partial x}{\partial v}, \\ y' = \rho y + \dfrac{\partial y}{\partial v}, \\ z' = \rho z + \dfrac{\partial z}{\partial v}, \\ t' = \rho t + \dfrac{\partial t}{\partial v}, \end{cases}$$

ρ étant une fonction de u et de v jusqu'ici indéterminée. Si u et v varient, M′ décrira une surface; pour que $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ définissent des courbes conjuguées sur cette surface, il est nécessaire et suffisant que x', y', z', t' vérifient une même équation de la forme

$$\frac{\partial^2\theta'}{\partial u\,\partial v} + a'\frac{\partial\theta'}{\partial u} + b'\frac{\partial\theta'}{\partial v} + c'\theta' = 0.$$

Exprimons ces conditions et éliminons les indéterminées a', b', c'. Nous obtenons l'équation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x'}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial x'}{\partial u} & \dfrac{\partial x'}{\partial v} & x' \\ \dfrac{\partial^2 y'}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial y'}{\partial u} & \dfrac{\partial y'}{\partial v} & y' \\ \dfrac{\partial^2 z'}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial z'}{\partial u} & \dfrac{\partial z'}{\partial v} & z' \\ \dfrac{\partial^2 t'}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial t'}{\partial u} & \dfrac{\partial t'}{\partial v} & t' \end{vmatrix} = 0.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer, dans cette équation, x', y, z, t' par leurs valeurs tirées des équations (b). Après un calcul plus long que difficile et en supprimant un facteur déterminant, qui n'est pas nul si la surface focale de la congruence ne se réduit pas à une courbe, on trouve une équation du second ordre en ρ qui se transforme dans l'équation (5) de la première Partie par la substitution $\rho = a + \alpha$:

$$(5)\qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{h}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \alpha(k-h) + \frac{\partial h}{\partial y} = 0.$$

En nous servant des résultats obtenus dans la première Partie, nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Si x, y, z, t sont les coordonnées homogènes d'un point M *d'une surface et si ces coordonnées satisfont à une même équation*

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + a\frac{\partial \theta}{\partial u} + b\frac{\partial \theta}{\partial v} + c\theta = 0,$$

on obtient toutes les surfaces découpées suivant un réseau conjugué par les développables de la congruence des tangentes aux courbes $u =$ const. en cherchant le lieu géométrique du point dont les coordonnées sont

$$x' = \frac{\partial x}{\partial v} - x\frac{\partial \log \zeta}{\partial v},$$

$$y' = \frac{\partial y}{\partial v} - y\frac{\partial \log \zeta}{\partial v},$$

$$z' = \frac{\partial z}{\partial v} - z\frac{\partial \log \zeta}{\partial v},$$

$$t' = \frac{\partial t}{\partial v} - t\frac{\partial \log \zeta}{\partial v},$$

ζ étant l'intégrale générale de l'équation (E).

MÉMOIRE

SUR LA

RÉDUCTION SIMULTANÉE D'UNE FORME QUADRATIQUE

ET

D'UNE FORME LINÉAIRE;

PAR M. H. POINCARÉ.

Dans un Mémoire précédent (¹), j'ai étudié les questions relatives à la réduction et à l'équivalence des formes cubiques ternaires. J'ai appliqué, pour cela, à ces formes la méthode qui avait conduit M. Hermite à des résultats si intéressants, en ce qui concerne les formes quadratiques et les formes décomposables en facteurs linéaires; H étant une forme algébriquement équivalente à F et la plus simple parmi ces formes; T étant une substitution linéaire telle que la forme quadratique définie

$$(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{T}$$

soit réduite; j'appelle forme réduite la forme HT. On reconnaît aisément que, en général, toute forme est arithmétiquement équivalente à une ou à plusieurs réduites, et que deux formes données seront équivalentes, pourvu que le système des réduites de la première soit identique au système des réduites de la seconde.

Une pareille méthode est applicable à la forme la plus générale, quels

(¹) *Journal de l'École Polytechnique*, LIᵉ Cahier.

que soient son ordre et le nombre de ces variables. En ce qui concerne les formes cubiques ternaires, j'ai fait

$H = \alpha(x^3 + y^3 + z^3) + 6\beta xyz$	quand le discriminant n'est pas nul.
$H = \alpha(x^3 + y^3) + 6\beta xyz$ ou $H = \alpha x^3 + 3\alpha xy^2 + 3\beta x^2 z + 3\beta y^2 z$	quand le discriminant est nul et que de plus $S \lesseqgtr o$, $T \lesseqgtr o$ et que la forme est indécomposable.
$H = 3x^2 y + z^3$	quand $S = T = o$ sans que la forme soit indécomposable.
$H = \alpha z^3 + 6\beta xyz$ ou $H = \alpha z^3 + 3\beta x^2 z + 3\beta y^2 z$	quand $S \lesseqgtr o$, $T \lesseqgtr o$ et que la forme se décompose en un facteur quadratique et un facteur linéaire.
$H = \alpha 3x^2 y + 3zy^2$	quand $S = T = o$ et que la forme se décompose en un facteur quadratique et un facteurlinéaire.

Quand une forme cubique ternaire n'est pas décomposable en facteurs et que S et T ne sont pas nuls à la fois, cette forme ne peut dériver de H que par un nombre fini de transformations linéaires; pour constater l'équivalence de deux pareilles formes, il suffit par conséquent de calculer les coefficients d'un nombre fini de substitutions, et de constater si ces coefficients sont entiers. La considération des réduites n'est donc pas nécessaire et on se trouve en présence, non plus d'une question d'Arithmétique, mais d'une question d'Algèbre.

Constater si deux formes F et F′, qui sont indécomposables et où S et T sont nuls à la fois, sont arithmétiquement équivalentes, c'est encore une question d'Algèbre; constater si l'on peut trouver un coefficient constant α, tel que F et αF′ soient équivalentes, c'est au contraire une question d'Arithmétique, et j'ai fait voir, dans le Mémoire dont je parle, comment on pouvait la résoudre en comparant les deux réduites extrêmes de F et de F′. Mon intention n'est pas de revenir en ce moment sur ce point.

Si maintenant on passe à l'équivalence des formes décomposables en un facteur quadratique et un facteur linéaire, on se trouve en présence d'une véritable question d'Arithmétique, sur laquelle je veux insister un peu. J'ai fait voir qu'on rencontrait dans ce cas des chaînes indéfinies de réduites se reproduisant périodiquement ainsi qu'il arrive pour les formes quadratiques binaires indéfinies.

Remarquons d'abord que le problème de l'équivalence de deux pareilles formes se ramène à celui de l'équivalence de deux systèmes comprenant chacun une forme quadratique et une forme linéaire. Soient en effet

$$f\varphi \quad \text{et} \quad f_1\varphi_1$$

les deux formes : nous supposons que f et f_1 sont linéaires, φ et φ_1 quadratiques. Pour que ces deux formes soient équivalentes, il faut et il suffit que les deux systèmes

$$\frac{1}{\lambda}f, \quad \lambda\varphi$$

et

$$\frac{1}{\mu}f_1, \quad \mu\varphi_1,$$

où λ et μ sont des constantes choisies de telle sorte que

$$\text{discriminant de } \lambda\varphi = \text{discriminant de } \mu\varphi_1$$

soient arithmétiquement équivalents.

L'étude des formes ternaires de cette sorte est donc ramenée à celle d'un pareil système. C'est ce qui m'a déterminé à entreprendre ce travail.

INVARIANTS DU SYSTÈME.

Je dis que le système d'une forme quadratique ternaire et d'une forme linéaire a deux invariants indépendants. En effet, soient

$$f(x, y, z) \quad \text{et} \quad \varphi(x, y, z)$$

les deux formes du système ; on peut toujours poser

$$\varphi = \alpha f^2 + gh,$$

où g et h sont linéaires pendant que α est une constante. Soient maintenant

$$f_1(x_1, y_1, z_1) \quad \text{et} \quad \varphi_1(x_1, y_1, z_1)$$

un nouveau système analogue : on pourra poser

$$\varphi_1 = \alpha_1 f_1^2 + g_1 h_1.$$

Il est clair que, si

$$\alpha = \alpha_1,$$

on aura

$$\varphi = \varphi_1, \qquad f = f_1$$

pourvu que l'on ait entre $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ les relations linéaires

$$f = f_1,$$
$$g = g_1,$$
$$h = h_1;$$

c'est-à-dire que, si δ est le déterminant des coefficients des trois fonctions linéaires f, g, h; δ_1 le déterminant des coefficients de

$$f_1, g_1, h_1;$$

le système f_1, φ_1 dérivera du système f, φ, par une substitution de déterminant $\frac{\delta_1}{\delta}$.

Donc, pour que les deux systèmes soient algébriquement équivalents, il faut et il suffit que

$$\alpha = \alpha_1,$$
$$\delta = \delta_1,$$

c'est-à-dire qu'il y ait deux invariants indépendants.

Pour ces deux invariants, on peut prendre :

1° Soit le discriminant de φ et l'invariant S de la forme cubique $f\varphi$;

2° Soit le discriminant de φ et celui de $\varphi + mf^2$, m étant un entier quelconque.

RÉDUCTION DU SYSTÈME.

Voici la règle que, dans le Mémoire cité, j'avais adoptée pour la réduction d'un pareil système.

On peut toujours poser

$$\varphi = \alpha f^2 + gh,$$

α étant une constante, g et h des fonctions linéaires.

Je considérais alors la forme quadratique définie

$$f^2 + \lambda^2 g^2 + \frac{1}{\lambda^2} h^2,$$

où λ est un paramètre arbitraire, et la substitution linéaire T qui réduit cette forme. Le système

$$f\mathrm{T}, \quad \varphi\mathrm{T}$$

était alors le système réduit équivalent à

$$f, \quad \varphi.$$

Il est clair que, λ étant arbitraire, il peut y avoir dans chaque classe plusieurs systèmes réduits. Mais je montrais que, si les coefficients de f et de φ sont entiers, ces systèmes sont toujours en nombre fini.

Je crois qu'il y a avantage à modifier un peu cette règle.

Si, en effet, g et h sont réels, on a

$$gh = k^2 - l^2,$$

en posant

$$k = \frac{g+h}{2}, \qquad l = \frac{g-h}{2},$$

et par conséquent

$$\varphi = \alpha f^2 + k^2 - l^2.$$

On aura de même

$$\varphi = \alpha f^2 + \left(\frac{\lambda g + \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2 - \left(\frac{\lambda g - \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2,$$

où λ est arbitraire.

Supposons que α soit positif; on considérera la forme quadratique définie

$$\alpha f^2 + \left(\frac{\lambda g + \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda g - \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2,$$

et la substitution T qui la réduit.

Le système

$$\varphi \mathrm{T}, \quad f\mathrm{T}$$

sera le système réduit de φ, f.

Si, au contraire, α est négatif, on envisagera la forme quadratique définie

$$-\alpha f^2 + \left(\frac{\lambda g + \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda g - \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2$$

et la substitution T qui la réduit.

$\varphi \mathrm{T}, f\mathrm{T}$ sera encore le système réduit de φ, f.

Supposons maintenant que g et h soient imaginaires conjugués.

On pourra, d'une infinité de manières, décomposer gh en une somme de deux carrés.

Soit

$$gh = k^2 + l^2;$$

on envisagera la forme

$$\begin{aligned} \alpha f^2 + k^2 + l^2 \qquad & \text{si } \alpha > 0, \\ -\alpha f^2 + k^2 + l^2 \qquad & \text{si } \alpha < 0, \end{aligned}$$

ainsi que la substitution T qui la réduit.

$\varphi \mathrm{T}, f\mathrm{T}$ sera le système réduit de φ, f.

Voici quels avantages présente ce mode nouveau de réduction :

On sait que, si l'on envisage une forme quadratique indéfinie ternaire, cette forme peut s'écrire

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - \mathrm{Z}^2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 - \mathrm{Z}^2,$$

où X, Y, Z sont linéaires, et que les formes équivalentes

$$(X^2+Y^2-Z^2)T \quad \text{ou} \quad (X^2-Y^2-Z^2)T$$

sont dites réduites si la forme quadratique définie

$$(X^2+Y^2+Z^2)T$$

est elle-même réduite.

Cela posé, il est clair que, d'après le nouveau mode de réduction, φT sera une réduite de φ quand $\varphi T, f T$ sera un système réduit du système φ, f et, par conséquent, la nouvelle règle de réduction est plus avantageuse au point de vue des applications de la théorie qui nous occupe aux questions les plus générales relatives aux formes quadratiques indéfinies.

Soit

$$\varphi = Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy,$$
$$f=\lambda x+\mu y+\nu z.$$

Soit φ_1 la forme adjointe de φ.

Soient a, b, c des quantités définies par les équations

$$\varphi'_x(a,b,c)=2\lambda,$$
$$\varphi'_y(a,b,c)=2\mu,$$
$$\varphi'_z(a,b,c)=2\nu,$$

les quantités a, b, c seront commensurables.

Cela posé, on sait que la forme

$$\tfrac{1}{4}(a\varphi'_x+b\varphi'_y+c\varphi'_z)^2-\varphi(a,b,c)\,\varphi(x,y,z)$$

a pour discriminant o et est, par conséquent, décomposable en deux facteurs linéaires.

De plus,

$$\tfrac{1}{2}(a\varphi'_x+b\varphi'_y+c\varphi'_z)=f.$$

On a donc

$$\varphi = \alpha f'^2 + gh,$$

où

$$\alpha = \frac{1}{\varphi(a, b, c)}.$$

Si l'on pose

$$ay - bx = z_1, \qquad cx - az = y_1, \qquad bz - cy = x_1,$$

on aura évidemment

$$(2) \qquad ax_1 + by_1 + cz_1 = 0,$$

et, d'autre part, on trouve, par un calcul facile,

$$\tfrac{1}{4}(a\varphi'_x + b\varphi'_y + c\varphi'_z) - \varphi(a, b, c)\,\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x_1, y_1, z_1).$$

On a donc

$$\varphi = \frac{1}{\varphi(a, b, c)} f'^2 + \frac{1}{\varphi(a, b, c)}\varphi_1(x_1, y_1, z_1).$$

Quant à $\varphi_1(x_1, y_1, z_1)$, on peut le ramener à une forme binaire à l'aide de l'identité (2) qui donne

$$\varphi_1\left(x_1, y_1, -\frac{ax_1 + by_1}{c}\right),$$

et rien n'est plus facile ensuite que de décomposer φ_1 en deux facteurs linéaires, ou bien encore de le décomposer en une somme de deux carrés ou en une différence de deux carrés.

Premier cas.

$\frac{1}{\varphi(a, b, c)} > 0$, et φ_1 se décompose en une somme de deux carrés positifs.

La forme φ est alors quadratique définie et n'a, par conséquent, en général, qu'une réduite.

Le système f, φ ne peut alors se réduire que d'une seule manière, à savoir par la substitution qui réduit φ.

Deuxième cas.

$\frac{1}{\varphi(a, b, c)} < 0$, et φ_1 se décompose en une somme de deux carrés positifs.

La substitution, qui réduit le système f, φ, est celle qui réduit la forme

$$-\varphi(x, y, z)$$

qui est quadratique définie positive.

Le système f, φ n'a donc, en général, qu'un système réduit.

Troisième cas.

φ_1 se décompose en une somme de deux carrés négatifs.

Supposons, pour fixer les idées,

$$\alpha = \frac{1}{\varphi(a, b, c)} > 0.$$

Comme on a

$$\varphi = \alpha f^2 + \alpha \varphi_1,$$

on aura

$$\varphi = \alpha f^2 - \alpha k^2 - \alpha l^2,$$

k et l étant deux fonctions linéaires, et, par définition, la substitution qui réduit le système f, φ sera celle qui réduit la forme quadratique positive

$$\alpha f^2 + \alpha k^2 + \alpha l^2.$$

Ici encore le système f, φ n'a, en général, qu'un système réduit.

Quatrième cas.

φ_1 se décompose en une différence de deux carrés, c'est-à-dire en un produit de deux fonctions linéaires réelles; ces fonctions linéaires ont des coefficients commensurables entre eux.

Dans le Mémoire cité, j'ai fait voir que, dans ce cas :

1° L'invariant $4S$ est une puissance quatrième parfaite;

2° Les systèmes réduits forment une chaîne limitée à ses deux extrémités, et, pour s'assurer de l'équivalence de deux systèmes, il suffit de constater l'identité des systèmes réduits extrêmes.

Ces résultats, démontrés pour l'ancien mode de réduction, subsistent encore pour le nouveau mode.

Cinquième cas.

φ_1 est décomposable en une différence de deux carrés ou en un produit de deux fonctions linéaires réelles dont les coefficients sont incommensurables entre eux.

J'ai fait voir que l'invariant $4S$ n'est pas puissance quatrième parfaite, et que les systèmes réduits forment une chaîne indéfinie où ils se reproduisent périodiquement, ainsi qu'il arrive pour les réduites des formes quadratiques binaires indéfinies.

Ces résultats subsistent encore avec le mode nouveau de réduction.

Ils permettent de définir des transformations semblables du système f, φ en lui-même.

Sixième cas.

φ_1 est un carré parfait.

Dans ce cas,

$$\varphi(a, b, c) = 0,$$

d'où

$$\alpha = \infty .$$

On ne peut donc plus poser

$$\varphi = \alpha f^2 + \alpha\varphi_1 ;$$

mais on pourra toujours poser, et cela d'une infinité de manières,

$$\varphi = fg + h^2,$$

g et h étant des fonctions linéaires de x, y, z.

Dans ce cas, la forme $f \times \varphi$, qui est cubique ternaire, est de la sixième famille (*voir* le Mémoire cité), et ses invariants S et T sont nuls.

Nous dirons que le système f, φ est réduit par la substitution qui réduit

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{f^2}{2} + \lambda^2\frac{g^2}{2} + h^2.$$

Si $f\mathrm{T}$, $\varphi\mathrm{T}$ est le système réduit de f, φ; $\varphi\mathrm{T}$ sera l'une des réduites de φ définie à la façon ordinaire; or φ n'a qu'un nombre fini de réduites; donc le système f, φ n'aura qu'un nombre fini de systèmes réduits.

Ces systèmes formeront, non pas une chaîne, mais un réseau analogue à celui que l'on rencontre dans l'étude des réduites d'une forme quadratique ternaire indéfinie, mais moins compliqué.

Je n'ai rien à ajouter sur les trois premiers cas où le problème est ramené, comme on l'a vu, à la réduction d'une forme quadratique ternaire définie; mais je crois qu'il y a lieu de faire des trois derniers cas une étude plus approfondie.

ÉTUDE SPÉCIALE DU QUATRIÈME CAS.

Je suppose que l'on ait mis la forme φ par le procédé indiqué plus haut sous la forme

$$\alpha f^2 + gh.$$

Je suppose que α soit une constante positive et que g et h soient deux fonctions linéaires dont les coefficients soient commensurables entre eux. Le système

$$f\mathrm{T}, \quad \varphi\mathrm{T},$$

sera réduit, si la forme

$$\psi = \left(\alpha f^2 + \lambda^2\frac{g^2}{2} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{h^2}{2}\right)\mathrm{T}$$

est réduite elle-même.

Nous dirons, avec MM. Korkine et Zolotareff, que la forme ψ est réduite si elle peut se mettre sous la forme

$$\psi = \mu_1(x + \varepsilon_1 y + \zeta_1 z)^2 + \mu_2(y + \zeta_2 z)^2 + \mu_3 z^2,$$

où ε_1, ζ_1 et ζ_2 sont plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue, et où μ_1 est le minimum absolu de la forme ψ et où μ_2 est le minimum absolu de la forme

$$\mu_2(y + \zeta_2 z)^2 + \mu_3 z^2.$$

Il est clair que, si l'on fait varier λ depuis o jusqu'à l'infini, on trouvera pour les coefficients de T différentes valeurs qui donneront différents systèmes réduits du système f, φ. Mais nous nous bornerons à considérer les systèmes réduits qu'on obtient pour λ très grand et pour λ très petit.

Supposons donc λ très grand. Soit

$f = \quad lx + my + nz,$	$l,\ m,\ n$	étant entiers premiers entre eux,
$g = \gamma(l_1 x + m_1 y + n_1 z),$	$l_1,\ m_1,\ n_1$	» »
$h = \delta(l_2 x + m_2 y + n_2 z),$	$l_2,\ m_2,\ n_2$	» »

Soient

$$lm_1 - ml_1 = \mathrm{DN},$$
$$mn_1 - nm_1 = \mathrm{DL},$$
$$nl_1 - ln_1 = \mathrm{DM},$$

D étant entier et L, M, N étant entiers premiers entre eux.

Je dis que le minimum absolu de la forme

$$\theta = \alpha f^2 + \lambda^2 \frac{g^2}{2} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{h^2}{2}$$

s'obtient si λ est assez grand pour

$$x = \mathrm{L}, \qquad y = \mathrm{M}, \qquad z = \mathrm{N}.$$

En effet, on a toujours

$$\alpha f^2 > \text{ ou } = \alpha,$$

à moins que

$$lx + my + nz = 0,$$

$$\lambda^2 \frac{g^2}{2} > \text{ ou } = \lambda^2 \frac{\gamma^2}{2},$$

à moins que

$$l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0.$$

Soit

$$\delta(l_2 L + m_2 M + n_2 N) = \Delta,$$

et supposons que λ soit assez grand pour que

$$\alpha > \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Delta^2}{2}$$

et

$$\lambda^2 \frac{\gamma^2}{2} > \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Delta^2}{2}.$$

Pour

$$x = L, \qquad y = M, \qquad z = N,$$

on a

$$\theta = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Delta^2}{2}.$$

Si x, y, z sont entiers sans que

$$lx + my + nz = 0,$$

on a

$$\theta \geq \alpha > \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Delta^2}{2}.$$

Si x, y, z sont entiers sans que

$$l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0,$$

on a

$$\theta \geq \lambda^2 \frac{\gamma^2}{2} > \frac{\lambda^2}{1} \frac{\Delta^2}{2}.$$

Si x, y, z sont entiers sans être égaux à L, M, N et si l'on a

$$lx + my + nz = l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0,$$

on aura

$$x = tL, \qquad y = tM, \qquad z = tN,$$

où t est entier et plus grand que 1.

On aura donc

$$\theta = t^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Delta^2}{2} > \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Delta^2}{2}.$$

Donc le minimum absolu de θ s'obtient pour

$$x = L, \qquad y = M, \qquad z = N. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Poursuivons la réduction de θ.

Soient L_1, M_1, N_1; L_2, M_2, N_2 six nombres entiers tels que

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} L & L_1 & L_2 \\ M & M_1 & M_2 \\ N & N_1 & N_2 \end{vmatrix} = 1.$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= L\xi + L_1\eta + L_2\zeta, \\ y &= M\xi + M_1\eta + M_2\zeta, \\ z &= N\xi + N_1\eta + N_2\zeta, \end{aligned}$$

et appelons T_1 la transformation

$$\begin{vmatrix} L & L_1 & L_2 \\ M & M_1 & M_2 \\ N & N_1 & N_2 \end{vmatrix};$$

on aura

$$\theta T_1 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{h^2}{2} + \alpha \quad [(l\,L_1 + m\,M_1 + n\,N_1)\eta + (l\,L_2 + m\,M_2 + n\,N_2)\zeta]^2$$
$$+ \frac{\lambda^2\gamma^2}{2}[(l_1L_1 + m_1M_1 + n_1N_1)\eta + (l_1L_2 + m_1M_2 + n_1N_2)\zeta]^2.$$

Les deux derniers carrés ne contiennent plus que η et ζ; ils forment donc une forme binaire. Réduisons cette forme binaire et pour cela cherchons son minimum absolu.

Soient

$$l_1 L_1 + m_1 M_1 + n_1 N_1 = \quad Q,$$
$$l_1 L_2 + m_1 M_2 + n_1 N_2 = -P.$$

Je dis que les nombres P et Q sont premiers entre eux ; en effet, puisque

$$l_1 L + m_1 M + n_1 N = 0,$$

et que le déterminant (3) est égal à 1, le plus grand commun diviseur de P et de Q diviserait l_1, m_1, n_1 qui sont premiers entre eux.

Je dis que le minimum de la forme binaire

$$\alpha[(lL_1 + mM_1 + nN_1)\eta + (lL_2 + mM_2 + nN_2)\zeta]^2 \\ + \frac{\lambda^2\gamma^2}{2}(Q\eta - P\zeta)^2 = \theta$$

s'obtient si λ est suffisamment grand, pour

$$\eta = P, \qquad \zeta = Q.$$

Je dis que

$$(lL_1 + mM_1 + nN_1)P + (lL_2 + mM_2 + nN_2)Q = \pm D,$$

car un calcul très simple montre que cette expression est égale au déterminant

$$D \begin{vmatrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} nm_1 - mn_1 & ln_1 - nl_1 & ml_1 - lm_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix},$$

ou à ce déterminant changé de signe.

Donc, pour

$$\eta = P, \qquad \zeta = Q,$$

on a

$$\theta_1 = \alpha D^2.$$

Supposons que λ soit assez grand pour que

$$\frac{\lambda^2\gamma^2}{2} > \alpha D^2.$$

Si l'on n'a pas

$$Q\eta - P\zeta = 0;$$

on a

$$Q\eta - P\zeta \geqq 1,$$

puisque η et ζ, P et Q sont entiers et par conséquent

$$\theta_1 \geqq \frac{\lambda^2\gamma^2}{2} > \alpha D^2.$$

Si l'on a

$$Q\eta - P\zeta = 0,$$

sans avoir

$$\eta = P, \qquad \zeta = Q,$$

on a

$$\eta = Pt, \qquad \zeta = Qt,$$

t étant un entier plus grand que 1 et, par conséquent,

$$\theta_1 = \alpha t^2 D^2 > \alpha D^2.$$

Donc αD^2 est le minimum absolu de θ_1 et, si l'on pose

$$\eta = P\eta_1 + P_1\zeta_1,$$
$$\zeta = Q\eta_1 + Q_1\zeta_1,$$

où P_1 et Q_1 sont tels que

$$PQ_1 - P_1Q = 1,$$

si l'on appelle T_2 la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & P_1 \\ 0 & Q & Q_1 \end{vmatrix},$$

la forme $\theta T_1 T_2$ pourra s'écrire

$$\mu_1(\xi+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon'_1\zeta_1)^2+\mu_2(\eta_1+\varepsilon_2\zeta_1)^2+\mu_3\zeta_1^2,$$

où μ_1 est le miuimum absolu de la forme ternaire pendant que μ_2 est le minimum absolu de la forme binaire

$$\mu_2(\eta_1+\varepsilon_2\zeta_1)^2+\mu_3\zeta_1^2.$$

Posons

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi_2+\delta_1\eta_1+\delta'_1\zeta_2,\\
\eta_1 &= \qquad\quad \eta_2+\delta_2\zeta_2,\\
\zeta_1 &= \qquad\qquad\qquad \zeta_2,
\end{aligned}$$

où δ_1, δ'_1, δ_2 sont des nombres entiers déterminés, de telle façon que

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2} &< \delta_2+\varepsilon_2<\tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< \delta'_1+\varepsilon_1\delta_2+\varepsilon'_1<\tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< \delta_1+\varepsilon_1<\tfrac{1}{2},
\end{aligned}$$

ce qui est toujours possible; appelons T_3 la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & \delta_1 & \delta'_1 \\ 0 & 1 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il est clair que la forme quadratique définie

$$\theta T_1 T_2 T_3$$

sera réduite, et que, par conséquent, le système réduit cherché sera

$$\varphi T_1 T_2 T_3, \quad f T_1 T_2 T_3.$$

On peut simplifier ce calcul. Supposons, en effet, que la substitution

$$T_1 T_2 T_3$$

équivaille à la suivante

$$\begin{aligned} l_1x+m_1y+n_1z &= H_1\zeta_2,\\ lx+my+nz &= H\eta_2+\varepsilon_1\zeta_2,\\ l_2x+m_2y+n_2z &= H_2\xi_2+\varepsilon_1\eta_2+\varepsilon'_1\zeta_2, \end{aligned}$$

il est clair que l'on devra avoir

$$H_1=1,\qquad H=D,\qquad H_2=\frac{\Delta}{\delta},$$

et, pour que les coefficients de la substitution soient entiers, il faut et il suffit que l'on ait

$$l-\varepsilon_2 l_1\equiv m-\varepsilon_2 m_1\equiv n-\varepsilon_2 n_1\equiv 0 \pmod{D}$$

et

$$\left.\begin{aligned} l_2-\frac{\varepsilon_1}{D}l+\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{D}-\varepsilon'_1\right)l_1 &\equiv m_2-\frac{\varepsilon_1}{D}m+\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{D}-\varepsilon'_1\right)m_1\\ &\equiv n_2-\frac{\varepsilon_1}{D}n+\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{D}-\varepsilon'_1\right)n_1\equiv 0 \end{aligned}\right\}\left(\bmod \frac{\Delta}{\delta}\right).$$

Je dis que les trois premières congruences peuvent toujours être résolues.

Les trois nombres l_1, m_1, n_1 étant premiers entre eux, on pourra toujours trouver trois nombres λ_1, μ_1, ν_1, tels que

$$l_1\lambda_1+m_1\mu_1+n_1\nu_1=1.$$

Les trois congruences donnent alors

$$\varepsilon_2\equiv l\lambda_1+m\mu_1+n\nu_1 \pmod{D}.$$

On trouvera aisément un nombre ε_2 satisfaisant à cette condition, ainsi qu'aux inégalités

$$-\frac{D}{2}<\varepsilon_2<\frac{D}{2}.$$

Je dis que ce nombre satisfera aux trois congruences

$$l-\varepsilon_2 l_1\equiv m-\varepsilon_2 m_1\equiv n-\varepsilon_2 n_1\equiv 0 \pmod{D}.$$

On a, en effet,

$$l - \varepsilon_2 l_1 \equiv l - (l\lambda_1 + m\mu_1 + n\nu_1) l_1 \pmod{D}$$

ou

$$l - \varepsilon_2 l_1 \equiv l - l(l_1\lambda_1 + m_1\mu_1 + n_1\nu_1) + \mu_1(ml_1 - lm_1) + \nu_1(nl_1 - ln_1)$$

ou

$$l - \varepsilon_2 l_1 \equiv l - l - \mu_1 DN + \nu_1 DM \equiv 0 \pmod{D}.$$

Soit donc

$$l - \varepsilon_2 l_1 = l_3 D, \qquad m - \varepsilon_2 m_1 = m_3 D, \qquad n - \varepsilon_2 n_1 = n_3 D.$$

Je dis que les nombres l_3, m_3, n_3 sont premiers entre eux ; en effet, leur plus grand commun diviseur devrait diviser L, M, N, qui sont premiers entre eux.

Les trois dernières congruences deviennent

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} l_2 - \varepsilon_1 l_3 - \varepsilon'_1 l_1 \equiv m_2 - \varepsilon_1 m_3 - \varepsilon'_1 m_1 \\ \qquad\qquad \equiv n_2 - \varepsilon_1 n_3 - \varepsilon'_1 n_1 \equiv 0 \end{array} \right\} \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\delta}\right).$$

On pourra toujours trouver trois nombres λ_3, μ_3, ν_3 satisfaisant aux conditions

$$\lambda_3 l_1 + \mu_3 m_1 + \nu_3 n_1 = 0,$$
$$\lambda_3 l_3 + \mu_3 m_3 + \nu_3 n_3 = 1,$$

d'où

$$\lambda_3 l + \mu_3 m + \nu_3 n = D.$$

Les trois congruences (4) donnent alors

$$(5) \qquad (\lambda_3 l_2 + \mu_3 m_2 + \nu_3 n_2) \equiv \varepsilon_2,$$

$$(6) \quad (\lambda_1 l_2 + \mu_1 m_2 + \nu_1 n_2) - \varepsilon_1(\lambda_1 l_3 + \mu_1 m_3 + \nu_1 n_3) \equiv \varepsilon'_1 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\delta}\right).$$

La congruence (5) donnera ε_1, et la congruence (6) ε'_1 ; on aura soin de choisir ces deux nombres de telle façon que leur valeur absolue soit plus petite que la moitié de $\frac{\Delta}{\delta}$.

Cela posé, le système réduit s'écrira

$$\alpha(D\eta_2 + \varepsilon_2\zeta_2)^2 + \gamma\delta\left(\frac{\Delta}{\delta}\xi_2 + \varepsilon_1\eta_2 + \varepsilon'_1\zeta_2\right)\zeta_2,$$
$$D\eta_2 + \varepsilon_2\zeta_2.$$

Les calculs de réduction du système se partagent donc en trois parties :

1° Calcul de α, γ, δ, l, m, n, l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, Δ, D, où l'on se borne à des opérations purement algébriques et à des recherches de plus grand commun diviseur;

2° Calcul de λ_1, μ_1, ν_1, λ_3, μ_3, ν_3, où l'on a à résoudre des congruences linéaires très simples ;

3° Calcul de ε_2, ε_1, ε'_1, où l'on n'a qu'à chercher les restes de trois divisions de nombres entiers.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que α était positif et que l, m, n étaient premiers entre eux.

Si α était négatif, on changerait le signe de φ.

Si l, m, n avaient un plus grand commun diviseur D, on poserait

$$f = f'D,$$

d'où

$$\varphi = \alpha D^2 f'^2 + gh,$$

et de toutes façons on serait ramené au cas que nous avons étudié.

Remarque. — Les considérations qui précèdent montrent suffisamment qu'un pareil système n'est reproduit par aucune substitution linéaire.

Exemple. — Soit à réduire le système

$$\varphi = x^2 + y^2 - 4z^2,$$
$$f = x + 3y - 2z.$$

Ici l'on a

$$l = 1, \qquad m = 3, \qquad n = -2;$$

d'où

$$a = 1, \qquad b = 6, \qquad c = 1.$$

On trouve aisément

$$9\varphi - f^2 = +(x-2z)(8x-6y+20z);$$

d'où

$$\alpha = \tfrac{1}{9}, \qquad \gamma\delta = \tfrac{2}{9};$$

$$l_1 = 1, \qquad m_1 = 0, \qquad n_1 = -2,$$

$$l_2 = 4, \qquad m_2 = -3, \qquad n_2 = 10;$$

$$L = -2, \qquad M = 0, \qquad N = -1, \qquad D = 3;$$

$$\frac{\Delta}{\delta} = -18.$$

La transformation $T_1 T_2 T_3$ s'écrira alors

$$\begin{aligned} l_1 x + m_1 y + n_1 z &= \zeta_2, \\ lx + my + nz &= 3\eta_2 + \varepsilon_2 \zeta_2, \\ l_2 x + m_2 y + n_2 z &= -18\xi_2 + \varepsilon_1 \eta_2 + \varepsilon_1' \zeta_2; \end{aligned}$$

ε_2 sera déterminé par les trois congruences

$$\left.\begin{aligned} l - \varepsilon_2 l_1 &= 1 - \varepsilon_2 \equiv 0 \\ m - \varepsilon_2 m_1 &= 3 \equiv 0 \\ n - \varepsilon_2 n_1 &= -2 + 2\varepsilon_2 \equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod 3.$$

Il n'est pas besoin ici de chercher les nombres λ_1, μ_1, ν_1, pour voir que ces congruences se réduisent à

$$\varepsilon_2 \equiv 1 \pmod 3,$$

ou

$$\varepsilon_2 = 1.$$

Quant à l_3, m_3, n_3, on trouve immédiatement

$$l_3 = 0, \qquad m_3 = 1, \qquad n_3 = 0,$$

d'où les trois congruences

$$\left.\begin{array}{r} 4 - \varepsilon_1 \equiv 0 \\ -3 - \varepsilon'_1 \equiv 0 \\ 10 + 2\varepsilon'_1 \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{18},$$

d'où

$$\varepsilon'_1 = 4, \qquad \varepsilon_1 = -3.$$

Le système réduit cherché est alors

$$\begin{gathered} \alpha(D\eta_2 + \varepsilon_2\zeta_2)^2 + \gamma\delta\zeta_2\left(\frac{\Delta}{\delta}\xi_2 + \varepsilon_1\eta_2 + \varepsilon'_1\zeta_2\right) \\ D\eta_2 + \varepsilon_2\zeta_2, \end{gathered}$$

c'est-à-dire

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{9}(3\eta_2 + \zeta_2)^2 + \tfrac{2}{9}\zeta_2(-18\xi_2 + 3\eta_2 + 4\zeta_2) \\ 3\eta_2 + \zeta_2, \end{gathered}$$

ou, revenant aux variables x, y, z, c'est-à-dire changeant ξ_2 en x, η_2 en y, ζ_2 en z,

$$\begin{gathered} -4xz + y^2 + z^2 \\ 3y + z; \end{gathered}$$

on trouverait de même le système réduit extrême qui correspond aux valeurs très petites du paramètre arbitraire λ et l'on arriverait au résultat suivant :

Pour que deux systèmes se composant chacun d'une fonction linéaire et d'une forme quadratique, ayant mêmes invariants et rentrant tous deux dans le quatrième cas, soient arithmétiquement équivalents, il faut et il suffit que les deux systèmes réduits extrêmes de l'un (trouvés comme il a été dit plus haut, l'un pour les valeurs très petites de λ, l'autre pour les valeurs très grandes de ce paramètre) soient identiques aux deux systèmes réduits extrêmes de l'autre.

ÉTUDE SPÉCIALE DU CINQUIÈME CAS.

Supposons que φ se mette sous la forme

$$\alpha f^2 + gh,$$

où g et h sont des fonctions linéaires dont les coefficients sont réels, mais non commensurables entre eux.

Pour réduire le système f, φ, on cherche la transformation qui réduit la forme définie

$$(6) \qquad \alpha f^2 + \frac{\lambda^2}{2} g^2 + \frac{1}{2\lambda^2} h^2 = \theta;$$

et pour cela il faut d'abord chercher le minimum absolu de cette forme.

Je dis que, quels que soient λ, g, h, et f, on peut toujours choisir α assez petit pour que ce minimum absolu s'obtienne en faisant

$$g = h = 0$$

ou bien, si

$$a = \lambda_1 \delta, \qquad b = \mu_1 \delta, \qquad c = \nu_1 \delta$$

(où λ_1, μ_1, ν_1 sont des entiers premiers entre eux), en faisant

$$x = \lambda_1, \qquad y = \mu_1, \qquad z = \nu.$$

Si en effet

$$f = lx + my + nz,$$

$$l\lambda_1 + m\mu_1 + n\nu_1 = \Delta, \quad l\lambda_2 + m\mu_2 + n\nu_2 = \Delta_2, \quad l\lambda_3 + m\mu_3 + n\nu_3 = \Delta_3,$$

la valeur de la forme (6) pour

$$x = \lambda_1, \qquad y = \mu_1, \qquad z = \nu_1$$

sera

$$\alpha \Delta^2.$$

Supposons maintenant que le plus grand commun diviseur des coefficients de gh soit E. Le produit gh ne peut devenir nul pour des valeurs entières de g et de h que si g et h s'annulent à la fois, et si cela n'a pas lieu, il est au moins égal à E.

Donnons donc à x, y, z des valeurs entières différentes de λ_1, μ_1 et ν_1; si g et h ne s'annulent pas à la fois, on aura

$$\theta > \frac{\lambda^2}{2}g^2 + \frac{1}{2\lambda^2}h^2 > gh > \mathrm{E}.$$

Si g et h s'annulent à la fois, on aura

$$x = \lambda_1 t, \qquad y = \mu_1 t, \qquad z = \nu_1 t,$$

où t est entier et > 2, d'où

$$\theta = \alpha\Delta^2 t^2 > \alpha\Delta^2.$$

Si donc α est assez petit pour que

$$\alpha\Delta^2 < \mathrm{E},$$

le minimum de θ sera $\alpha\Delta^2$.

Cela posé, prenons un système f, φ quelconques; il pourra se présenter deux cas :

Premier cas.

$$\alpha\Delta^2 < \mathrm{E}.$$

Dans ce cas le minimum de θ se trouve immédiatement, ainsi qu'on vient de le voir.

Deuxième cas.

$$\alpha\Delta^2 > \mathrm{E} \quad \text{ou} \quad = \mathrm{E}.$$

Dans ce cas on remarquera que l'on peut remplacer le système donné f, φ par le système

$$f, \; \varphi + \mu f^2,$$

où μ est un nombre quelconque.

En effet :

1° Pour que deux systèmes f, φ et f_1, φ_1 soient équivalents, il faut et il suffit que les deux systèmes

$$f,\ \varphi + \mu f^2 \quad \text{et} \quad f_1,\ \varphi_1 + \mu f_1^2$$

soient équivalents.

2° Les transformations linéaires que reproduisent le système f, φ sont les mêmes que celles qui reproduisent le système, f et $\varphi + \mu f^2$; de sorte que, au double point de vue de l'équivalence des systèmes et des transformations semblables, il est indifférent d'envisager le système f, φ ou bien le système f et $\varphi + \mu f^2$.

On choisira alors μ de telle sorte que

$$(\alpha + \mu)\Delta^2 < \mathrm{E},$$

et l'on sera ramené au premier cas.

Revenons donc au premier cas :

Le minimum absolu de θ s'obtient pour

$$x = \lambda_1, \qquad y = \mu_1, \qquad z = \nu_1.$$

Soient donc λ_2, μ_2, ν_2, λ_3, μ_3, ν_3 six entiers tels que

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta, \\ y &= \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \mu_3 \zeta, \\ z &= \nu_1 \xi + \nu_2 \eta + \nu_3 \zeta, \end{aligned}$$

et appelons T_1 cette transformation linéaire.

On aura

$$\theta \mathrm{T}_1 = \alpha[\Delta\xi + (\lambda_2 l + \mu_2 m + \nu_2 n)\eta + (\lambda_3 l + \mu_3 m + \nu_3 n)\zeta^3] + \left(\frac{\lambda^2}{2} g^2 + \frac{1}{\lambda^2} a^2\right)\mathrm{T}_1$$

et

$$\varphi T_1 = \alpha[\Delta\xi + (\lambda_2 l + \mu_2 m + \nu_2 n)\eta + (\lambda_3 l + \mu_3 m + \nu_3 n)\zeta]^2 + gh T_1.$$

Les formes

$$\left(\frac{\lambda^2}{2} g^2 + \frac{1}{\lambda^2} h^2\right) T_1 \quad \text{et} \quad gh T_1$$

ne contiennent que η et ζ et sont par conséquent binaires.

Pour achever la réduction, il faut :

1° Chercher une transformation T_2 de la forme

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + k_0 \eta_1 + k'_0 \zeta_1, \\ \eta &= \phantom{\xi_1 +{}} k_1 \eta_1 + k'_1 \zeta_1, \\ \zeta &= \phantom{\xi_1 +{}} k_2 \eta_1 + k'_2 \zeta_1, \end{aligned}$$

telle que la forme

$$\left(\frac{\lambda^2}{2} g^2 + \frac{1}{\lambda^2} h^2\right) T_1 T_2,$$

soit réduite, et que

$$-\frac{\Delta}{2} < \Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0 < \frac{\Delta}{2},$$

$$-\frac{\Delta}{2} < \Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 + \Delta k'_0 < \frac{\Delta}{2},$$

ce qui est toujours possible;

2° Appliquer cette transformation T_2 au système

$$f T_1, \quad \varphi T_1.$$

Cherchons donc la substitution T_2.

Pour calculer k_0, il suffit de chercher un nombre entier qui soit égal à

$$-\frac{\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2}{\Delta}$$

à $\pm \frac{1}{2}$ près. On calculerait de même k'_0.

Il reste à calculer les quatre coefficients

$$\begin{vmatrix} k_1 & k'_1 \\ k_2 & k'_2 \end{vmatrix},$$

qui forment une substitution linéaire binaire entre η, ζ et η_1, ζ_1; cette substitution, nous l'appellerons τ.

Elle doit être telle que la forme binaire définie

$$\left(\frac{\lambda^2}{2} g^2 + \frac{1}{\lambda^2} h^2\right) T_1 \tau$$

soit réduite, c'est-à-dire que la forme binaire indéfinie

$$gh T_1 \tau$$

soit réduite.

Le problème de la réduction du système f, φ est donc ramené à celui de la réduction de la forme binaire

$$gh T_1,$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned} &\text{système réduit du système } f, \varphi \\ &\quad = \text{le système formé de } \Delta\xi_1 + (\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0)\eta_1 \\ &\qquad + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 + \Delta k'_0)\zeta_1 \ \text{ et de } \ \alpha[\Delta\xi_1 + (\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0)\eta_1 \\ &\qquad\qquad + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 + \Delta k'_0)\zeta_1]^2 \\ &\qquad\qquad + \text{réduite de } gh T_1. \end{aligned}$$

CALCUL DE $g.h.$T.

Le calcul de α, de λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2, λ_3, μ_3, ν_3, k_0, k'_0 ne présentant pas de difficulté, je passe immédiatement au calcul des coefficients de la forme binaire ghT.

Soient

$$\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$

et

$$\varphi_1 = \text{forme adjointe de } \varphi,$$
$$\varphi_1 = A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2B_1 yz + 2B'_1 xz + 2B''_1 xy;$$

d'où

$$A_1 = A'A'' - B^2, \qquad A'_1 = AA'' - B'^2, \qquad A''_1 = AA' - B''^2,$$
$$B_1 = B'B'' - AB, \qquad B'_1 = B''B - A'B', \qquad B''_1 = BB' - A''B''.$$

On sait que nous avons défini a, b, c par les conditions

$$\varphi'_x(a, b, c) = 2l,$$
$$\varphi'_y(a, b, c) = 2m,$$
$$\varphi'_z(a, b, c) = 2n;$$

on en tire aisément, pour les valeurs de a, b, c, les expressions suivantes, en appelant H le discriminant de φ,

$$aH = A_1 l + B''_1 m + B'_1 n,$$
$$bH = B''_1 l + A'_1 m + B_1 n,$$
$$cH = B'_1 l + B_1 m + A''_1 n.$$

Si δ_1 est le plus grand commun diviseur de aH, bH et cH, on aura

$$\lambda_1 = \frac{aH}{\delta_1}, \qquad \mu_1 = \frac{bH}{\delta_1}, \qquad \nu_1 = \frac{cH}{\delta_1},$$

et les valeurs de λ_2, μ_2, ν_2, λ_3, μ_3, ν_3 s'en déduiront aisément.

On sait que la forme

$$(lx + my + nz)^2 - \varphi(x, y, z)\,\varphi(a, b, c)$$

se décompose en deux facteurs linéaires et est égale à

$$-gh\,\varphi(a, b, c).$$

Or, d'autre part, cette forme s'écrit

$$\begin{aligned} A_1(bz-cy)^2 &+ A'_1(cx+az)^2 + A''_1(ay+bx)^2 \\ &+ 2B(ay-bz)(cx-az) \\ &+ 2B'(ay-bx)(bz-cy) + 2B''(bz-cy)(cx-az), \end{aligned}$$

ainsi qu'on l'a vu plus haut, ou bien

$$\varphi_1[(bz-cy), (cx-az), (ay-bx)];$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} gh &= -\frac{\varphi_1[(bz-cy), (cx-az), (ay-bx)]}{\varphi(a, b, c)} \\ &= -\frac{\varphi_1[(\mu_1 z-\nu_1 y), (\nu_1 x-\lambda_1 z), (\lambda_1 y-\mu_1 x)]}{\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)}. \end{aligned}$$

Une première remarque importante, c'est que

$$\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = \frac{\varphi_1(l, m, n)H}{\delta_1^2}.$$

Posons donc

$$-\frac{1}{\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)} = \gamma.$$

Considérons la transformation

$$T_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix},$$

et appelons L_1, M_1, N_1 les mineurs qui correspondent à λ_1, μ_1, ν_1, de telle sorte que

$$\begin{aligned} \lambda_1 L_1 + \mu_1 M_1 + \nu_1 N_1 &= 1, \\ \lambda_2 L_1 + \mu_2 M_1 + \nu_2 N_1 &= 0, \\ \lambda_3 L_1 + \mu_3 M_1 + \nu_3 N_1 &= 0. \end{aligned}$$

Appelons de même L_2, M_2, N_2; L_3, M_3, N_3 les mineurs, tels que

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 L_2 + \mu_1 M_2 + \nu_1 N_2 = 0, \qquad && \lambda_1 L_3 + \mu_1 M_3 + \nu_1 N_3 = 0,\\
&\lambda_2 L_2 + \mu_2 M_2 + \nu_2 N_2 = 1, && \lambda_2 L_3 + \mu_2 M_3 + \nu_2 N_3 = 0,\\
&\lambda_3 L_2 + \mu_3 M_2 + \nu_3 N_2 = 0, && \lambda_3 L_3 + \mu_3 M_3 + \nu_3 N_3 = 1.
\end{aligned}$$

On aura évidemment

$$\begin{aligned}
\mu_1 z - \nu_1 y &= L_3 \eta - L_2 \zeta,\\
\nu_1 x - \lambda_1 z &= M_3 \eta - M_2 \zeta,\\
\lambda_1 y - \mu_1 x &= N_3 \eta - N_2 \zeta;
\end{aligned}$$

d'où

$$ghT_1 = \gamma \varphi_1[(L_3\eta - L_2\zeta), (M_3\eta - M_2\zeta), (N_3\eta - N_2\zeta)].$$

Supposons que

$$ghT_1 = P\eta^2 + 2Q\eta\zeta + R\zeta^2,$$

il viendra

$$\begin{aligned}
P &= \gamma \varphi_1(L_3, M_3, N_3),\\
R &= \gamma \varphi_1(L_2, M_2, N_2),\\
2Q &= \gamma[L_3 \varphi'_{1x}(L_2, M_2, N_2) + M_3 \varphi'_{1y}(L_2, M_2, N_2) + N_3 \varphi'_{1z}(L_2, M_2, N_2)].
\end{aligned}$$

CALCUL DU DISCRIMINANT $Q^2 - RP$.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma^2}(Q^2 - RP) = \frac{1}{4}&(L_3\varphi'_{1x} + M_3\varphi'_{1y} + N_3\varphi'_{1z})^2\\
&- \varphi_1(L_3, M_3, N_3)\,\varphi_1(L_2, M_2, N_2).
\end{aligned}$$

Remarquons que l'on a identiquement

$$\text{forme adjointe de } \varphi_1 = \varphi H.$$

On a donc, d'après une remarque déjà faite,

$$\frac{1}{\gamma^2}(Q^2 - RP) = H\varphi[(N_3M_2 - N_2M_3), (L_3N_2 - L_2N_3), (M_3L_2 - M_2L_3)]$$

ou

$$\frac{1}{\gamma^2}(Q^2 - RP) = H\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = \frac{H^2}{\delta_1^2}\varphi_1(l, m, n)$$

ou enfin

$$Q^2 - RP = -\gamma H = \frac{\delta_1^2}{G}$$

si $\varphi_1(l, m, n) = G$.

Calculons maintenant le plus grand commun diviseur de P, Q, R. Si E est le plus grand commun diviseur des trois nombres entiers

$$\varphi_1(L_3, M_3, N_3), \quad \varphi_1(L_2, M_2, N_2),$$
$$\tfrac{1}{2}[L_2\varphi'_{1x}(L_3, M_3, N_3) + M_2\varphi'_{1y}(L_3, M_3, N_3) + N_2\varphi'_{1z}(L_3, M_3, N_3)],$$

γE sera le plus grand commun diviseur de P, Q, R, de sorte que le déterminant de la forme primitive ψ de laquelle ghT_1 est dérivée s'écrira

$$\frac{-H}{\gamma E^2} = \frac{H^2 G}{\delta_1^2 E^2}.$$

Ce déterminant doit être un nombre entier.

Une fois les coefficients de ghT_1 connus, les procédés ordinaires de réduction des formes binaires donnent immédiatement les coefficients de la substitution τ, ce qui permet d'achever complètement la réduction du système.

TRANSFORMATIONS SEMBLABLES.

L'un des problèmes les plus intéressants que permet de résoudre la réduction des formes ou des systèmes de formes est la recherche des substitutions semblables.

Soit f, φ un système de formes quelconques, algébriquement équivalent à un système canonique quelconque F, Φ, de telle sorte que

$$f = F\tau, \qquad \varphi = \Phi\tau.$$

Dans certains cas, les seuls qui soient intéressants au point de vue arithmétique, on pourra trouver une infinité de substitutions τ qui permettent de passer du système F, Φ au système f, φ; supposons donc qu'on ait à la fois

$$f = F\tau_1, \qquad \varphi = \Phi\tau_1,$$
$$f = F\tau_2, \qquad \varphi = \Phi\tau_2.$$

Soient T_1 et T_2 deux substitutions à coefficients entiers, telles que les formes quadratiques définies

$$(x^2+y^2+z^2)\,\tau_1 T_1,$$
$$(x^2+y^2+z^2)\,\tau_2 T_2$$

soient réduites ; les systèmes

$$fT_1, \quad \varphi T_1,$$
$$fT_2, \quad \varphi T_2$$

seront par définition des systèmes réduits du système f, φ.

Si ces deux systèmes sont identiques, de telle sorte que

$$fT_1 = fT_2, \qquad \varphi T_1 = \varphi T_2,$$

il est clair que

$$fT_1 T_2^{-1} = f, \qquad \varphi T_1 T_2^{-1} = \varphi,$$

de telle sorte que

$$T_1 T_2^{-1}$$

sera une substitution semblable du système f, φ.

Si donc, dans la réduction successive d'un système, on rencontre deux systèmes réduits identiques, on pourra en déduire une substitution semblable.

Je dis que, réciproquement, on obtiendra ainsi toutes les substitutions semblables. En effet, soit S une pareille substitution; on a, par hypothèse,

$$fS = f, \qquad \varphi S = \varphi.$$

Soit

$$f = F\tau_1, \qquad \varphi = \Phi\tau_1$$

et

$$\text{forme } (x^2 + y^2 + z^2)\,\tau_1 T_1 = \text{réduite},$$

de telle sorte que fT_1, φT_1 soit un système réduit de f, φ.

On aura évidemment

$$f = F\tau_1 S, \qquad \varphi = \Phi\tau_1 S;$$

la forme

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,\tau_1 S . S^{-1} T_1$$

sera réduite, et, par conséquent, le système

$$f S^{-1} T_1, \quad \varphi S^{-1} T_1$$

sera réduit. De plus, il est clair qu'il sera identique à fT_1, φT_1, c'est-à-dire que la substitution S pourra s'obtenir par le procédé exposé plus haut.

Appliquons donc ce procédé au cas qui nous occupe. Soient

$$\begin{array}{ll} fT_2, & \varphi T_2, \\ fT_3, & \varphi T_3 \end{array}$$

deux systèmes réduits de f, φ. Le premier de ces systèmes réduits s'écrira, en conservant les anciennes notations,

$$\Delta\xi_1 + (\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0)\,\eta_1 + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 + \Delta k'_0)\,\zeta_1$$

et

$$[\Delta\xi_1 + (\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0)\,\eta_1 + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 + \Delta k'_0)\,\zeta_1]^2 + ghT_1\tau,$$

$ghT_1\tau$ étant une des réduites de ghT_1; le second s'écrirait d'une façon analogue

$$\Delta\xi_2 + (\Delta_2 k''_1 + \Delta_3 k''_2 + \Delta k''_0)\,\eta_2 + (\Delta_2 k'''_1 + \Delta_3 k'''_2 + \Delta k'''_0)\,\zeta_2$$

et

$$[\Delta\xi_2 + (\Delta_2 k''_1 + \Delta_3 k''_2 + \Delta k''_0)\,\eta_2 + (\Delta_2 k'''_1 + \Delta_3 k'''_2 + \Delta k'''_0)\,\zeta_2]^2 + ghT_1\tau\tau_1,$$

$gh\mathrm{T}_1\tau\tau_1$ étant une autre réduite de $gh\mathrm{T}_1$, telle que la substitution s'écrive

$$\eta = k''_1\eta_2 + k'''_1\zeta_2,$$
$$\zeta = k''_2\eta_2 + k'''_2\zeta_2.$$

Pour que ces deux systèmes réduits soient identiques, il faut et il suffit que

$$(gh)\mathrm{T}_1\tau = (gh)\mathrm{T}_1\tau\tau_1,$$
$$\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0 = \Delta_2 k''_1 + \Delta_3 k''_2 + \Delta k''_0,$$
$$\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 + \Delta k'_0 = \Delta_2 k'''_1 + \Delta_3 k'''_2 + \Delta k'''_0;$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 \equiv \Delta_2 k''_1 + \Delta_3 k''_2 \\ \Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 \equiv \Delta_2 k'''_1 + \Delta_3 k'''_2\end{array}\right\} \pmod{\Delta}.$$

Cherchons d'abord les substitutions qui reproduisent $(gh)\mathrm{T}_1\tau$.

$(gh)\mathrm{T}_1\tau$ est une forme binaire indéfinie; supposons qu'elle soit égale à un coefficient constant multiplié par une forme primitive

$$\psi = p\eta_1^2 + 2q\eta_1\zeta_1 + r\zeta_1^2.$$

Il est clair que la forme ψ, et par conséquent la forme $(gh)\mathrm{T}_1\tau$, sera reproduite par la substitution

$$\eta_1 = (t - qu)\eta_2 - ru\zeta_2,$$
$$\zeta_1 = pu\eta_2 + (t + qu)\zeta_2,$$

où t et u sont des entiers satisfaisant à

$$t^2 - (q^2 - rp)u^2 = 1,$$

si la forme ψ est proprement primitive, et où $2t$ et $2u$ sont des entiers satisfaisant à

$$4t^2 - 4(q^2 - rp)u^2 = 4,$$

si la forme ψ est improprement primitive.

Si l'on applique cette substitution à

$$(\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2)\eta_1 + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2)\zeta_1,$$

il vient

$$\begin{aligned}&[(\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2)(t-qu) + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2)pu]\eta_2\\ &\quad + [(\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k''_2)(t+qu) - (\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2)ru]\zeta_2;\end{aligned}$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}(\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2)(t-qu) + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2)pu &\equiv \Delta_2 k''_1 + \Delta_3 k''_2\\ (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k''_2)(t+qu) - (\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2)ru &\equiv \Delta_2 k'''_1 + \Delta_3 k'''_2\end{aligned}\right\} \pmod{\Delta}$$

ou, posant

$$\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 = v, \qquad \Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 = w,$$

on doit avoir

$$\left.\begin{aligned}vt + u(pw - qv) &\equiv v\\ wt + u(qw - rv) &\equiv w\end{aligned}\right\} \pmod{\Delta}.$$

Soit ρ le plus grand commun diviseur de v, w et Δ; soit σ celui de v et de w. Ces deux congruences pourront être remplacées par les suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\frac{v}{\sigma}(t-qu) + \frac{w}{\sigma}pu &\equiv \frac{v}{\sigma}\\ \frac{v}{\sigma}ru + \frac{w}{\sigma}(t+qu) &\equiv \frac{w}{\sigma}\end{aligned}\right\} \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Multiplions la première par ru, la seconde par $t - qu$ et ajoutons; multiplions de même la première par $t + qu$, la seconde par $-pu$, et ajoutons. En remarquant que

$$t^2 - (q^2 - rp)u^2 = 1,$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\frac{v}{\sigma}ru + \frac{w}{\sigma}(t-qu) &\equiv \frac{w}{\sigma}\\ \frac{v}{\sigma}(t+qu) - \frac{w}{\sigma}pu &\equiv \frac{v}{\sigma}\end{aligned}\right\} \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right),$$

d'où

$$2u\frac{rv-qw}{\sigma}\equiv 2u\frac{qv-pw}{\sigma}\equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Soit θ le plus grand commun diviseur de

$$\frac{rv-qw}{\sigma},\quad \frac{qv-pw}{\sigma}\quad \text{et}\quad \frac{\Delta}{\rho}.$$

Ces deux congruences se réduiront à

$$2u\equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{\rho\theta}\right).$$

Premier cas.

La forme $px^2+2qxy+ry^2$ est proprement primitive; $\frac{\Delta}{\rho\theta}$ est impair, u et t doivent être entiers. Dans ce cas les congruences se réduisent à

$$u\equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{\rho\theta}\right),$$

d'où

$$u\frac{rv-qw}{\sigma}\equiv u\frac{qv-pw}{\sigma}\equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{\rho}\right),$$

$$\left.\begin{aligned} t\frac{w}{\sigma}&\equiv\frac{w}{\sigma}\\ t\frac{v}{\sigma}&\equiv\frac{v}{\sigma}\end{aligned}\right\}\left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{\rho}\right)$$

ou

$$t\equiv 1 \quad \left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Deuxième cas.

La forme $px^2+2qxy+ry^2$ est proprement primitive; $\frac{\Delta}{\rho\theta}$ est pair. Dans ce cas, u et t doivent être entiers, et l'on doit avoir

$$u\equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{2\rho\theta}\right);$$

d'où

$$u\,\frac{r\nu - qw}{\sigma} \equiv u\,\frac{q\nu - pw}{\sigma} \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{2\rho}\right)$$

et

$$t \equiv 1 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{2\rho}\right).$$

De plus

$$\frac{2\rho}{\Delta}(t-1)\frac{w}{\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{2\rho\theta}{\Delta}\,u\,\frac{r\nu - qw}{\sigma\theta}$$

et, d'autre part,

$$\frac{2\rho}{\Delta}(t-1)\frac{\nu}{\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{2\rho\theta}{\Delta}\,u\,\frac{q\nu - pw}{\sigma\theta}$$

doivent être de même parité.

Or $\frac{\nu}{\sigma}$ et $\frac{w}{\sigma}$ ne peuvent être pairs tous deux ; de même $\frac{r\nu - qw}{\sigma\theta}$ et $\frac{q\nu - pw}{\sigma\theta}$ ne peuvent être pairs tous deux.

Cela posé, il peut se présenter deux cas :

1°
$$\frac{w}{\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{r\nu - qw}{\sigma\theta}$$

et, d'autre part,

$$\frac{\nu}{\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{q\nu - p\nu}{\sigma\theta}$$

sont de même parité, et alors les congruences se réduisent à

$$t - 1 \equiv u\theta \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{2\rho}\right), \qquad t - 1 \equiv u\theta \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right);$$

2° Ou bien les nombres

$$\frac{w}{\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{r\nu - qw}{\sigma\theta},$$

ou les nombres

$$\frac{\nu}{\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{q\nu - p\nu}{\sigma\theta}$$

ne sont pas de même parité, et alors les congruences se réduisent à

$$t - 1 \equiv u\theta \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Troisième cas.

La forme $px^2 + 2qxy + ry^2$ est improprement primitive. Dans ce cas, $2u$ et $2t$ sont entiers, et l'on trouve immédiatement

$$2u\theta \equiv 2(t-1) \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right),$$
$$\theta \equiv 1 \quad (\operatorname{mod} 2), \qquad q^2 - rp \equiv 1 \quad (\operatorname{mod} 2).$$

Mais cela n'est pas suffisant, il faut encore que les parités de $2u$ et de $2t$ satisfassent à certaines conditions.

D'abord $2u$ et $2t$ doivent être de même parité; car

$$4t^2 - 4(q^2 - rp)u^2 = 4 \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} 2);$$

d'où

$$4t^2 \equiv 4u^2 \quad \text{et} \quad 2t \equiv 2u.$$

Deux cas à considérer :

1° Si $\frac{\Delta}{\rho}$ est pair, $2u$ et $2t$ doivent être pairs, à cause des congruences

$$2u\theta \equiv 2(t-1) \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right),$$

et ces congruences se réduisent à

$$u\theta \equiv t - 1 \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{2\rho}\right).$$

Envisageons maintenant les congruences

$$(\zeta) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\nu}{\sigma}(t-1) + u\theta\,\frac{p w - q\nu}{\sigma\theta} \equiv 0 \\ &\frac{w}{\sigma}(t-1) + u\theta\,\frac{q w - r\nu}{\sigma\theta} \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Puisque

$$p \equiv r \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} 2), \qquad q \equiv 1 \quad (\operatorname{mod} 2),$$
$$\frac{\nu}{\sigma} \equiv \frac{p w - q\nu}{\sigma\theta}, \qquad \frac{w}{\sigma} \equiv \frac{q w - r\nu}{\sigma\theta} \quad (\operatorname{mod} 2).$$

Posons donc

$$t-1=\frac{\Delta}{2\rho}\tau, \qquad u\theta=\frac{\Delta}{2\rho}\upsilon,$$

ces congruences se réduiront à

$$\frac{v}{\sigma}(\tau+\upsilon)\equiv\frac{w}{\sigma}(\tau+\upsilon)\equiv 0 \pmod 2$$

ou, puisque $\frac{v}{\sigma}$ et $\frac{w}{\sigma}$ sont premiers entre eux,

$$\tau\equiv\upsilon \pmod 2$$

ou

$$t-1\equiv u\theta \quad \left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{\rho}\right).$$

2° Si $\frac{\Delta}{\rho}$ est impair, $2t$ et $2u$ peuvent être pairs ou impairs, et par conséquent t et u peuvent être entiers ou fractionnaires.

Les congruences

$$2u\theta\equiv 2(t-1)\equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{\rho}\right)$$

équivalent aux suivantes

$$\left.\begin{aligned}2(t-1)\frac{v}{\sigma}+2u\theta\frac{pw-qv}{\sigma\theta}&\equiv 0\\ 2(t-1)\frac{w}{\sigma}+2u\theta\frac{qw-rv}{\sigma\theta}&\equiv 0\end{aligned}\right\}\left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{\rho}\right),$$

lesquelles équivalent aux congruences (ζ), pourvu que les nombres

$$(t-1)\frac{v}{\sigma}+u\theta\frac{pw-qv}{\sigma\theta},$$

$$(t-1)\frac{w}{\sigma}+u\theta\frac{qw-rv}{\sigma\theta}$$

soient entiers, ce qui exige que

$$2(t-1)\frac{v}{\sigma}+2u\theta\frac{pw-qv}{\sigma\theta}\equiv 0,$$

$$2(t-1)\frac{v}{\sigma}+2u\theta\frac{qw-rv}{\sigma\theta}\equiv 0 \pmod 2,$$

ou

$$\frac{\nu}{\sigma}[2(t-1)+2u\theta] \equiv \frac{w}{\sigma}[2(t-1)+2u\theta] \equiv 0 \pmod 2)$$

ou

$$2(t-1) \equiv 2u\theta \pmod 2).$$

Résumons-nous. Le problème des transformations semblables se ramène au calcul de nombres t et u satisfaisant à certaines conditions. Cinq cas peuvent se présenter, puisque le deuxième et le troisième cas se subdivisent. Soit

$$q^2 - rp = \Omega.$$

Premier cas.

t et u sont entiers :

$$t^2 - \Omega u^2 = 1, \qquad u \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho\theta}\right), \qquad t \equiv 1 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Deuxième cas.

t et u sont entiers :

$$t^2 - \Omega u^2 = 1, \qquad t-1 \equiv u\theta \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{2\rho}\right),$$

$$t-1 \equiv u\theta \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Troisième cas.

t et u sont entiers :

$$t^2 - \Omega u^2 = 1, \qquad t-1 \equiv u\theta \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Quatrième cas.

t et u sont entiers :

$$t^2 - \Omega u^2 = 1, \qquad t-1 \equiv u\theta \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{2\rho}\right),$$

$$t-1 \equiv u\theta \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Cinquième cas.

$2t$ et $2u$ sont entiers et de même parité :

$$4t^2 - 4\Omega u^2 = 4, \qquad 2(t-1) \equiv 2u\theta \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Nous allons maintenant discuter ces conditions.

Considérons les nombres complexes de la forme

$$a + b\sqrt{\Omega}.$$

On sait que les nombres entiers de cette forme, qui satisfont à la condition

$$a^2 - b^2\Omega = 1,$$

sont les puissances d'un certain nombre entier complexe

$$a_1 + b_1\sqrt{\Omega}.$$

Dans le cas particulier où Ω est impair, il peut arriver aussi qu'un nombre complexe fractionnaire

$$\frac{c + d\sqrt{\Omega}}{2},$$

où c et d sont entiers, mais impairs, satisfasse à la condition

$$c^2 + d^2\Omega = 4.$$

Dans ce cas, tous les nombres complexes entiers de la forme $a + b\sqrt{\omega}$, ou fractionnaires de la forme $\frac{c + d\sqrt{\Omega}}{2}$, sont les puissances d'un même nombre fractionnaire

$$\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}.$$

Nous retrouvons, en passant, une remarque déjà faite autrefois par Eisentein. Je dis qu'en supposant que ce nombre $\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}$ existe, il est la racine cubique de $a_1 + b_1\sqrt{\Omega}$. En effet, $a_1 + b_1\sqrt{\Omega}$ est une puissance de $\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}$, et c'est la plus petite de ses puissances qui soit un entier complexe.

Or, puisque $\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}$ est fractionnaire et que

$$c_1^2 - d_1^2\Omega = 4, \qquad \Omega \equiv 1 \pmod 2,$$

on aura

$$c_1 \equiv d_1 \equiv 1 \pmod 2.$$

De plus

$$\left(\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}\right)^2 = \frac{c_1^2 + d_1^2\Omega}{4} + \frac{c_1 d_1}{2}\sqrt{\Omega};$$

or

$$c_1 d_1 \equiv 1 \pmod 2;$$

donc la deuxième puissance est fractionnaire.

Au contraire,

$$\left(\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}\right)^3 = \frac{c_1^3 + 3c_1 d_1^2\Omega}{8} + \frac{3c_1^2 d_1 + d_1^3\Omega}{8}\sqrt{\Omega};$$

cette valeur se simplifie à cause de

$$c_1^2 = 4 + d_1^2\Omega,$$

ce qui donne

$$\frac{c_1(1 + d_1^2\Omega)}{2} + \frac{d_1(3 + d_1^2\Omega)}{2}\sqrt{\Omega}.$$

Or il est clair que

$$1 + d_1^2\Omega \equiv 3 + d_1^2\Omega \equiv 0 \pmod 2;$$

donc la troisième puissance est entière. Donc elle est égale à $a_1 + b_1\sqrt{\Omega}$.

C. Q. F. D.

Cette remarque permettra toujours de reconnaître si le nombre $\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}$ existe.

En résumé, les nombres t et u seront tels que le nombre complexe

$$t+u\sqrt{\Omega}$$

soit une puissance suivant les cas de

$$a_1+b_1\sqrt{\Omega} \quad \text{ou de} \quad \frac{c_1+d_1\sqrt{\Omega}}{2}.$$

Nous allons voir comment la théorie des congruences complexes permet de trouver toutes celles de ces puissances qui remplissent les autres conditions auxquelles sont assujettis les nombres t et u.

DES CONGRUENCES COMPLEXES.

Nous dirons que deux nombres complexes $a+b\sqrt{\Omega}$ et $c+d\sqrt{\Omega}$ sont congrus, par rapport au double module $\alpha+\beta\sqrt{\Omega}$ et $\gamma+\delta\sqrt{\Omega}$, et nous écrirons

$$a+b\sqrt{\Omega}\equiv c+d\sqrt{\Omega} \quad \left[\bmod\left(\alpha+\beta\sqrt{\Omega}, \gamma+\delta\sqrt{\Omega}\right)\right]$$

quand on aura

$$a=c+\alpha m+\gamma n,$$
$$b=d+\beta m+\delta n,$$

m et n étant des entiers.

Si l'on représente le nombre complexe $a+b\sqrt{\Omega}$ par un point dont les coordonnées sont a et b, si l'on divise le plan en parallélogrammes ayant pour sommets

$$\alpha m+\gamma n, \quad \beta m+\delta n,$$

à des nombres congrus correspondront des points correspondants de ce réseau parallélogrammatique.

Représentons ce réseau par la notation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix},$$

de manière à pouvoir écrire

$$a + b\sqrt{\Omega} \equiv c + d\sqrt{\Omega} \quad \left(\bmod \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}\right),$$

ce réseau peut être remplacé par un réseau équivalent, et, parmi les réseaux équivalents, il y en a toujours un plus simple que les autres et qui est de la forme

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & 0 \end{vmatrix} \quad (0 < \alpha < \gamma)$$

[*voir* mon Mémoire *Sur un mode nouveau de représentation des formes quadratiques définies ou indéfinies* (XLVII^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*)].

Par rapport à un réseau quelconque, les nombres entiers complexes se répartissent en un nombre fini de classes.

Deux congruences complexes peuvent toujours être additionnées si elles ont lieu par rapport au même réseau.

Si une congruence complexe a lieu par rapport à deux réseaux différents, elle a lieu par rapport à leur plus petit commun multiple.

Telles sont les ressemblances des congruences complexes et des congruences ordinaires; voici une différence importante : une congruence complexe ne pourra pas toujours être multipliée par un nombre entier complexe. Il faut, pour cela, que le réseau qui sert de module soit un nombre complexe idéal.

De même, pour que l'on puisse diviser une congruence complexe par un nombre entier complexe, il faut et il suffit que le module soit un nombre complexe idéal et soit premier avec le nombre entier complexe par lequel on veut diviser la congruence.

Pour toutes ces propositions, je renvoie au Mémoire cité plus haut.

Donc, en résumé, si le module est un nombre complexe idéal, le calcul des congruences complexes est le même que celui des congruences ordinaires.

Rappelons enfin les conditions pour qu'un réseau

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & 0 \end{vmatrix}$$

soit un nombre complexe idéal; ces conditions sont

$$\alpha \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{\beta}, \qquad \frac{\alpha^2}{\beta^2} \equiv \Omega \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\gamma}{\beta}\right).$$

Une proposition importante :

Puisque le calcul des congruences complexes ayant pour module un nombre complexe idéal est le même que celui des congruences ordinaires, les résidus des puissances d'un nombre entier complexe (par rapport à un nombre complexe idéal premier avec lui) se reproduisent périodiquement.

CALCUL DE t ET DE u.

Nous pouvons maintenant calculer t et u; nous savons que

$$t + u\sqrt{\Omega} = \left(a_1 + b_1\sqrt{\Omega}\right)^m \qquad \text{ou} \qquad t + u\sqrt{\Omega} = \left(c_1 + d_1\sqrt{\Omega}\right)^m,$$

m étant un entier, et cet entier va être déterminé par une congruence complexe. Examinons successivement les cinq cas qui peuvent se présenter et que nous avons énumérés plus haut :

Premier et troisième cas.

On a

$$t - 1 \equiv u\theta \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

On peut donc écrire la congruence complexe

$$t + u\sqrt{\Omega} \equiv 1 \quad \left(\operatorname{mod} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right).$$

Le module de cette congruence est un nombre complexe idéal; car θ divise Ω, et, si $a_1 + b_1\sqrt{\Omega}$ est le plus petit nombre entier complexe dont la norme soit l'unité, on aura

$$t + u\sqrt{\Omega} = (a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m;$$

d'où la congruence

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m \equiv 1.$$

Si l'on fait varier m par valeurs entières, on verra les résidus de $(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m$ se reproduire périodiquement; si k est le plus petit nombre, tel que

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^k \equiv 1,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m \equiv 1$$

sera

$$m \equiv 0 \pmod{k}.$$

De plus, on verrait, comme pour les congruences ordinaires, que k est un diviseur du nombre des résidus premiers avec le nombre idéal

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\Delta}{\rho} \\ \dfrac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}.$$

De même on sait que, si a est premier avec b; si k est le plus petit nombre, tel que

$$a^k \equiv 1 \pmod{b},$$

k est un diviseur du nombre des résidus (pris par rapport à b) et qui sont premiers avec b. Nous avons ici un résultat analogue qui se démontrerait identiquement de la même façon.

Deuxième et quatrième cas.

On a

$$t - 1 \equiv u\theta \equiv 0 \quad \left(\mathrm{mod}\,\frac{\Delta}{2\rho}\right), \qquad t - 1 \equiv u\theta \quad \left(\mathrm{mod}\,\frac{\Delta}{\rho}\right),$$

ce qui équivaut à la congruence complexe

$$t + u\sqrt{\Omega} \equiv 1 \quad \left(\bmod \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right).$$

Le module est-il un nombre complexe idéal?

Les conditions énoncées plus haut se réduisent ici à

$$\theta^2 \equiv \Omega \pmod{2\theta}$$

ou

$$\theta \equiv \frac{\Omega}{\theta} \pmod{2}.$$

Dans le quatrième cas, la forme $px^2 + 2qxy + ry^2$ est improprement primitive : son discriminant Ω est donc impair ; donc θ et $\frac{\Omega}{\theta}$ sont tous deux impairs, c'est-à-dire que la condition est remplie.

Résumons les hypothèses relatives au deuxième cas :

La forme $px^2 + 2qxy + ry^2$ est proprement primitive;

$\frac{\Delta}{\rho\theta}$ est pair;

$\frac{w}{\sigma}$ et $\frac{rv - qw}{\sigma\theta}$ sont de même parité;

$\frac{v}{\sigma}$ et $\frac{qv - pw}{\sigma\theta}$ sont de même parité.

On peut faire sur les parités de p, q, r les hypothèses suivantes :

$$\begin{array}{rrl} p \equiv q \equiv r \equiv 1 & & \pmod{2}, \\ p \equiv r \equiv 1, & q \equiv 0 & \pmod{2}, \\ p \equiv q \equiv 1, & r \equiv 0 & \pmod{2}, \\ q \equiv r \equiv 1, & p \equiv 0 & \pmod{2}, \\ p \equiv 1, & q \equiv r \equiv 0 & \pmod{2}, \\ r \equiv 1, & q \equiv p \equiv 0 & \pmod{2}. \end{array}$$

Dans les hypothèses 2, 3, 4, on a

$$\Omega \equiv 1 \pmod{2};$$

d'où

$$1 \equiv \theta \equiv \frac{\Omega}{\theta} \pmod 2.$$

Dans l'hypothèse 1, on peut supposer

$$\frac{w}{\sigma} \equiv 1, \qquad \frac{v}{\sigma} \equiv 0 \pmod 2;$$

mais alors

$$\frac{qv - pw}{\sigma} \equiv 1 \pmod 2,$$

et, par conséquent, $\frac{v}{\sigma}$ et $\frac{qv - pw}{\sigma\theta}$ ne seraient pas de même parité.

Cette hypothèse doit donc être rejetée, ainsi que

$$\frac{w}{\sigma} \equiv 1, \quad \frac{v}{\sigma} \equiv 0 \pmod 2.$$

On doit donc supposer

$$\frac{w}{\sigma} \equiv \frac{v}{\sigma} \equiv 1 \pmod 2;$$

d'où

$$\frac{rv - qw}{\sigma} \equiv \frac{qv - pw}{\sigma} \equiv 0 \pmod 2;$$

d'où, puisque $\frac{rv - qw}{\sigma} \equiv 1 \pmod 2$,

$$\theta \equiv 0 \pmod 2.$$

Dans l'hypothèse 5, on a

$$\frac{qv - pw}{\sigma} \equiv \frac{w}{\sigma} \pmod 2$$

et

$$\frac{rv - qw}{\sigma} \equiv 0 \pmod 2.$$

On ne peut donc supposer

$$\frac{w}{\sigma} \equiv 1, \qquad \frac{v}{\sigma} \equiv 0 \pmod 2.$$

Soit

$$\frac{\nu}{\sigma} \equiv 1, \qquad \frac{w}{\sigma} \equiv 0 \pmod 2.$$

On aura

$$\frac{q\nu - pw}{\sigma} \equiv 0, \qquad \frac{q\nu - pw}{\sigma\theta} \equiv 1 \pmod 2,$$

d'où

$$\theta \equiv 0 \pmod 2.$$

Soit maintenant

$$\frac{\nu}{\sigma} \equiv \frac{w}{\sigma} \equiv 1 \pmod 2.$$

On aura

$$\frac{r\nu - qw}{\sigma} \equiv 0, \qquad \frac{q\nu - pw}{\sigma} \equiv 1 \pmod 2.$$

Cette hypothèse doit donc être rejetée.

D'ailleurs, il est clair que l'hypothèse va se traiter comme l'hypothèse 5.

D'où il résulte que deux cas peuvent se présenter :

Première hypothèse :

$$\theta \equiv \frac{\Omega}{\theta} \pmod 2;$$

Seconde hypothèse :

$$\theta \equiv 0, \qquad \frac{\Omega}{\theta} \equiv 1 \pmod 2.$$

Dans la première hypothèse, le module de la congruence complexe étant un nombre idéal, tout se passera comme dans le premier et le troisième cas.

Dans la seconde hypothèse, il s'agit de résoudre une congruence complexe

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m = t + u\sqrt{\Omega} \equiv 1 \quad \mathrm{mod} \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho'} & 0 \end{vmatrix},$$

dont le module n'est pas un nombre idéal.

Soit

$$t + u\sqrt{\Omega} \equiv 1, \qquad t' + u'\sqrt{\Omega} \equiv 1.$$

Quelle est la condition pour que

$$(t+u\sqrt{\Omega})(t'+u'\sqrt{\Omega})\equiv 1\,?$$

On aura

$$u\theta\equiv u'\theta\equiv 0\quad\left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{2\rho}\right),$$

$$t-1\equiv u\theta,\qquad t'-1\equiv u'\theta\quad\left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Soient

$$\frac{\Delta}{2\rho\theta}=\alpha,\qquad u=\alpha\lambda,\qquad u'=\alpha\lambda',\qquad \Omega=\omega\theta.$$

Pour que

$$(t+u\sqrt{\Omega})(t'+u'\sqrt{\Omega})\equiv 1,$$

il faut et il suffit que

$$t'u\theta+u't\theta\equiv 0\quad\left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{2\rho}\right)$$

et

$$A=tt'+uu'\Omega-t'u\theta-tu'\theta-1\equiv 0\quad\left[\operatorname{mod}\left(\frac{\Delta}{\rho}=2\alpha\theta\right)\right].$$

Or

$$A=t(t'-1)+(t-1)+\alpha^2\lambda\lambda'\omega\theta-\alpha\theta(t'\lambda+t\lambda')$$

ou

$$\left.\begin{aligned}A&\equiv\alpha\theta\lambda't+\alpha\theta\lambda+\alpha^2\lambda\lambda'\omega\theta-\alpha\theta(t'\lambda+t\lambda'),\\ A&\equiv\alpha\theta\lambda(1-t'+\alpha\lambda'\omega\theta)\equiv\alpha^2\theta\lambda\lambda'(\omega-\theta)\end{aligned}\right\}\quad(\operatorname{mod}2\alpha\theta),$$

de sorte que la condition cherchée

$$A\equiv 0\quad\left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{\rho}\right)$$

se réduit à

$$\alpha\lambda\lambda'(\omega-\theta)\equiv 0\quad(\operatorname{mod}2).$$

Or, par hypothèse,

$$\omega-\theta\equiv 1\quad(\operatorname{mod}2).$$

Il faut donc et il suffit que l'un des trois nombres α, λ, λ' soit pair. Or, si

λ est pair, on aura

$$t + u\sqrt{\Omega} \equiv 1 \quad \left(\bmod \begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right).$$

En résumé, si deux nombres complexes sont congrus à 1 par rapport au module

$$\begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}$$

[où

$$\frac{\Omega}{\theta} \equiv \theta + 1 \quad (\bmod 2),$$

de telle façon que le module ne soit pas un nombre idéal], pour que leur produit soit également congru à 1, il faut et il suffit que $\frac{\Delta}{2\rho\theta}$ soit pair ou que l'un des deux nombres donnés soit congru à 1 par rapport au module

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}.$$

Cela posé, nous pourrons, dans l'hypothèse qui nous occupe, distinguer deux cas :

1° $\frac{\Delta}{2\rho\theta}$ est pair.

Alors le produit de deux nombres congrus à 1 est toujours congru à 1.

Si donc k est le plus petit des nombres m qui satisfassent à la congruence

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m \equiv 1 \quad \left(\bmod \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right),$$

tous les autres sont des multiples de k, c'est-à-dire que tout se passe comme si le module était un nombre complexe idéal.

Nous devons toutefois faire une distinction importante. Dans le cas où le module était un nombre complexe idéal, les nombres

$$\left(a_1 + b_1\sqrt{\Omega}\right)^m \quad \text{et} \quad \left(a_1 + b_1\sqrt{\Omega}\right)^{m+k}$$

étaient congrus entre eux quel que soit m.

Ici cela n'aura plus lieu en général, à moins que

$$\left(a_1 + b_1\sqrt{\Omega}\right)^k \equiv 1 \quad \left(\operatorname{mod} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right);$$

mais on aura toujours

$$\left(a_1 + b_1\sqrt{\Omega}\right)^m \equiv \left(a_1 + b_1\sqrt{\Omega}\right)^{m+2k} \quad \left(\operatorname{mod} \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right),$$

de sorte que la période sera, en général, non pas k, mais $2k$. De plus, k est un diviseur du nombre des résidus pris par rapport au nombre idéal

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}$$

et premiers par rapport à ce nombre idéal.

2° $\frac{\Delta}{2\rho\theta}$ est impair.

Soit

$$(25) \qquad \left(a_1 + b_1\sqrt{\Omega}\right)^m \equiv 1 \quad \left(\operatorname{mod} \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right)$$

une solution quelconque de la congruence. Cette solution nous fournira une substitution semblable du système f, φ. Le carré de cette substitution sera également une substitution semblable, de sorte qu'on devra avoir

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^{2m} \equiv 1 \quad \left(\text{mod} \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right).$$

Or, d'après ce qu'on a vu plus haut, cela ne peut avoir lieu que si l'on a

$$(26) \qquad (a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^{m} \equiv 1 \quad \left(\text{mod} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right).$$

On peut donc remplacer la congruence (25) par la congruence (26) dont le module est un nombre idéal ; on est donc ainsi ramené aux cas déjà examinés.

Cinquième cas.

$2t$ et $2u$ sont entiers et de même parité.

$$4t^2 - 4u^2\Omega = 4, \qquad 2(t-1) \equiv 2u\theta \quad \left(\text{mod}\, \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Ici le nombre $t + u\sqrt{\Omega}$ peut ne plus être entier complexe ; mais les nombres de la forme $a + b\sqrt{\Omega}$, tels que $2a$ et $2b$ soient entiers et de même parité, jouissent de propriétés qui les rapprochent des nombres entiers. Nous les appellerons, pour cette raison, *nombres intègres*.

La somme ou le produit de deux nombres intègres est un nombre intègre.

Cela posé, on devra avoir

$$t + u\sqrt{\Omega} \equiv 1 \quad \left(\text{mod} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{2\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right),$$

cette congruence pouvant être résolue, soit en nombres entiers, soit en nombres intègres.

Je dis qu'une congruence prise en nombres intègres par rapport au module

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{2\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}$$

peut être multipliée par un nombre intègre quelconque. Il suffit, en effet, de faire voir qu'on peut la multiplier par

$$\sqrt{\Omega} \quad \text{et} \quad \frac{1+\sqrt{\Omega}}{2}.$$

Soit, en effet,

$$a + b\sqrt{\Omega} \equiv 0;$$

on aura

$$a = \alpha\frac{\Delta}{2\rho}, \qquad b = \beta\frac{\Delta}{2\rho\theta},$$

α et β étant entiers pendant que $\alpha\frac{\Delta}{\rho}$ et $\beta\frac{\Delta}{\rho\theta}$ sont de même parité.

En multipliant par $\sqrt{\Omega}$, il vient

$$\beta\frac{\Delta}{2\rho\theta}\Omega + \alpha\frac{\Delta}{2\rho}\sqrt{\Omega} \equiv 0.$$

Je dis que cette congruence est vérifiée; en effet,

$$\beta\frac{\Delta}{2\rho\theta}\Omega \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{2\rho}\right),$$

puisque β et $\frac{\Omega}{\theta}$ sont entiers; de même

$$\alpha\frac{\Delta}{2\rho} \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod}\frac{\Delta}{2\rho\theta}\right),$$

puisque α et θ sont entiers.

En multipliant par $\frac{1+\sqrt{\Omega}}{2}$, il vient

$$\frac{\Delta}{2\rho}\left(\frac{\beta\Omega}{2\theta} + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\Delta}{2\rho\theta}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha\theta}{2}\right)\sqrt{\Omega} \equiv 0.$$

Pour que cette congruence soit vérifiée, il faut et il suffit que

$$\beta\frac{\Omega}{\theta}+\alpha\equiv\beta+\alpha\theta\equiv 0 \pmod 2;$$

or, puisque

$$\frac{\Omega}{\theta}\equiv\theta\equiv 1 \pmod 2,$$

il faut et il suffit que

$$\beta+\alpha\equiv 0 \pmod 2.$$

Or, puisque, dans le cinquième cas, $\frac{\Delta}{\rho}$ est impair, et que l'on doit supposer

$$\beta\frac{\Delta}{\rho\theta}=\alpha\frac{\Delta}{\rho} \pmod 2,$$

cette condition sera toujours remplie.

C'est dire que toute congruence en nombres intègres, prise par rapport au module

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{2\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix},$$

peut être multipliée par un nombre intègre quelconque, c'est-à-dire qu'elle jouit des mêmes propriétés que les congruences complexes en nombres entiers prises par rapport à un nombre idéal.

Cela posé, la congruence qu'il s'agit de résoudre pour avoir t et u s'écrit

$$t+u\sqrt{\Omega}=\left(\frac{c_1+d_1\sqrt{\Omega}}{2}\right)^m\equiv 1 \quad \left(\bmod \begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{2\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right).$$

La discussion de cette congruence est absolument la même que celle que nous avons faite dans le premier et dans le troisième cas.

Si k est le plus petit nombre qui, substitué à m, satisfasse à cette congruence, les autres seront ses multiples.

De plus, on aura, quel que soit m,

$$\left(\frac{c_1+d_1\sqrt{\Omega}}{2}\right)^{m+k} \equiv \left(\frac{c_1+d_1\sqrt{\Omega}}{3}\right)^m.$$

Une fois m connu, on aura sans peine t et u, et la connaissance de t et de u permettra d'écrire immédiatement les substitutions semblables du système f, φ.

Remarque. — Au commencement de ce travail, j'avais défini de la façon suivante les systèmes réduits formés d'une forme linéaire et d'une forme quadratique :

« On dit que le système f, φ est réduit, si l'on peut écrire

$$\pm\varphi = \alpha f^2 + gh,$$

g et h étant linéaires et α positif, et si l'on peut choisir λ de telle sorte que la forme définie

$$\alpha f^2 + \left(\frac{\lambda g + \frac{1}{\lambda}h}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda g - \frac{1}{\lambda}h}{2}\right)^2$$

soit réduite. »

On a vu que, si α est suffisamment petit, cette définition revient à la suivante :

On dit que le système f, φ est réduit quand gh est une forme binaire réduite en y et en z et quand les coefficients de y et de z dans f sont plus petits en valeur absolue que la moitié du coefficient de x.

De plus, on a vu qu'une transformation très simple permet de rendre α aussi petit que l'on veut. Il est donc plus logique et plus simple de s'en tenir, quel que soit α, à cette seconde définition; c'est ce que nous ferons toujours.

Mais ce n'est pas tout. Dans cette seconde définition, j'ai dit que gh doit être une forme binaire réduite et j'ai entendu par là une forme telle que

$$\left(\frac{\lambda g + \frac{1}{\lambda}h}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda g - \frac{1}{\lambda}h}{2}\right)^2$$

soit réduite.

Mais il y a une infinité de manières de définir les formes binaires réduites indéfinies, et à chacune d'elles va correspondre une façon nouvelle de définir les systèmes réduits tels que f, φ.

Cette définition nouvelle conviendra aussi bien que celles qui précèdent à l'objet que nous nous proposons, c'est-à-dire à la recherche des conditions d'équivalence des systèmes et de leurs substitutions semblables. On pourra donc choisir dans chaque cas particulier celle qui conduira aux calculs les plus rapides.

Par exemple, on pourra appeler *forme réduite* toute forme binaire indéfinie dont les coefficients extrêmes sont de signe contraire. On peut alors, par un calcul très simple, déduire d'une forme réduite une forme réduite équivalente et contiguë, de sorte qu'on arrive très rapidement à écrire toutes les réduites d'une forme donnée.

C'est de cette dernière définition que nous ferons usage dans l'exemple numérique qui va suivre.

Exemple numérique. — Soit

$$f = x + y + z,$$
$$\varphi = x^2 + 4y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

On a

$$l = m = n = 1\,;$$

d'où les trois équations

$$a + b + c = 1,$$
$$a + 4b + 5c = 1,$$
$$a - 5b - 13c = 1\,;$$

d'où l'on tire

$$a = 1, \qquad b = c = 0$$

et, par conséquent,

$$\delta_1 = 1,$$
$$\lambda_1 = 1, \qquad \mu_1 = 0, \qquad \nu_1 = 0,$$
$$\lambda_2 = 0, \qquad \mu_2 = 1, \qquad \nu_2 = 0,$$
$$\lambda_3 = 0, \qquad \mu_3 = 0, \qquad \nu_3 = 1,$$
$$\Delta = \Delta_2 = \Delta_3 = 1.$$

On a, d'autre part,

$$\varphi(a, b, c) = 1;$$

d'où

$$-gh = \varphi - f^2 = 3y^2 - 2z^2.$$

Le problème est donc ramené à la réduction successive de la forme

$$3y^2 - 2z^2;$$

$3y^2 - 2z^2$ est elle-même une réduite, et l'on trouve immédiatement que la série des réduites de cette forme s'écrit comme il suit :

$$\begin{aligned}
&3y^2 - 2z^2,\\
&y^2 - 4yz - 2z^2,\\
&y^2 - 2yz - 5z^2,\\
&y^2 - 6z^2,\\
&y^2 + 2yz - 5z^2,\\
&y^2 + 4yz - 2z^2,\\
&3y^2 - 2z^2,
\end{aligned}$$

et se reproduisent ensuite périodiquement. Dans ce tableau, chaque réduite se déduit de la précédente par l'une des substitutions

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Elles se déduisent de $3y^2 - 2z^2$ par les substitutions

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Soit

$$\begin{vmatrix} k_1 & k'_1 \\ k_2 & k'_2 \end{vmatrix}$$

l'une de ces substitutions.

La substitution correspondante

$$\begin{vmatrix} 1 & k_0 & k'_0 \\ 0 & k_1 & k'_1 \\ 0 & k_2 & k'_2 \end{vmatrix},$$

qui réduira le système f, φ, devra satisfaire à la condition

$$-\frac{\Delta}{2} < \Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0 < \frac{\Delta}{2}$$

ou

$$-\tfrac{1}{2} < k_1 + k_2 + k_0 < \tfrac{1}{2},$$

d'où

$$k_0 = -(k_1 + k_2).$$

De même

$$k'_0 = -(k'_1 + k'_2),$$

de sorte que la suite des substitutions qui réduisent f, φ est

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -11 & -9 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix};$$

d'où, pour les systèmes réduits de f, φ, le tableau suivant :

$$\begin{array}{ll}
x, & x^2-3y^2+2z^2,\\
x, & x^2-y^2+4yz+2z^2,\\
x, & x^2-y^2+2yz+5z^2,\\
x, & x^2-y^2+6z^2,\\
x, & x^2-y^2-2yz+5z^2,\\
x, & x^2-y^2-4yz+2z^2,\\
x, & x^2-3y^2+2z^2.
\end{array}$$

De plus, si

$$T=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix},\qquad T_1=\begin{vmatrix} 1 & -11 & -9\\ 0 & 5 & 4\\ 0 & 6 & 5\end{vmatrix},$$

les substitutions semblables du système f, φ seront les puissances de

$$T_1T^{-1}=\begin{vmatrix} 1 & -10 & -8\\ 0 & 5 & 4\\ 0 & 6 & 5\end{vmatrix}.$$

On aurait pu arriver au même résultat directement.

En effet, ici

$$\Omega=6,$$

et l'équation

$$t^2-\Omega u^2=1$$

admet, pour sa solution la plus simple,

$$t=5,\qquad u=2,$$

ce qui conduit, pour la substitution semblable la plus simple de gh, à

$$\begin{vmatrix} 5 & 4\\ 6 & 5\end{vmatrix};$$

d'un autre côté, les congruences auxquelles sont assujettis les nombres t et u ayant pour module $\frac{\Delta}{p}$, qui est ici l'unité, sont toujours satisfaites. Donc les nombres

$$t = 5, \qquad u = 2$$

sont bien ceux qui correspondent à la substitution semblable la plus simple du système f, φ ; c'est dire que cette substitution est de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & k_0 & k'_0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix},$$

et, comme elle doit reproduire

$$x + y + z,$$

elle aura pour coefficients

$$k_0 = -10, \qquad k'_0 = -8.$$

C. Q. F. D.

Deuxième exemple. — Soit à trouver les substitutions semblables du système

$$14x + y + 2z,$$
$$y^2 - 6z^2.$$

On a

$$\Omega = 6,$$

et les substitutions semblables devront être de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & k_0 & k'_0 \\ 0 & t & 6u \\ 0 & u & t \end{vmatrix},$$

où

$$\left(t + u\sqrt{6}\right) = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^m;$$

puisque

$$t = 5,$$

$u = 2$ est la solution la plus simple de

$$t^2 - 6u^2 = 1.$$

On est donc conduit aux congruences suivantes

$$\begin{aligned} t + 2u &\equiv 1 \pmod{14}. \\ 6u + 2t &\equiv 2. \end{aligned}$$

Ici

$$\begin{gathered} v = 1, \qquad w = 2, \\ \sigma = 1, \qquad \rho = 1, \qquad \frac{\Delta}{\rho} = 14, \\ \frac{rv - qw}{\sigma} = -6, \qquad \frac{qv - pw}{\sigma} = -2, \qquad \theta = 2, \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} = 7 \equiv 1 \pmod{2}. \end{gathered}$$

De plus, la forme est proprement primitive, de sorte qu'on est dans le premier cas et que les congruences se réduisent à

$$\begin{aligned} t &\equiv 1 \pmod{14}, \\ u &\equiv 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

On peut d'ailleurs retrouver ces congruences directement.

Reprenons

$$\left.\begin{aligned} t + 2u &\equiv 1 \\ 6u + 2t &\equiv 2 \end{aligned}\right\} \pmod{14}.$$

Multiplions la première par $-6u$, la seconde par t et ajoutons; il vient

$$2(t^2 - 6u^2) \equiv 2t - 6u \pmod{14}.$$

Multiplions de même la première par t, la seconde par $-u$; il vient

$$t^2 - 6u^2 \equiv t - 2u \pmod{14}.$$

A cause de la relation

$$t^2 - 6u^2 = 1,$$

ces congruences se réduisent à

$$\left.\begin{aligned} 2t - 6u &\equiv 2 \\ t - 2u &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \pmod{14},$$

qui, jointes aux premières, donnent

$$12u \equiv 4u \equiv 0 \pmod{14}$$

ou

$$\begin{aligned} u &\equiv 0 \pmod{7}, \\ 2u &\equiv 0 \pmod{14}, \\ t &\equiv 1 \pmod{14}. \end{aligned}$$

La recherche de t et de u se ramène donc à la résolution de la congruence complexe

$$t + u\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^m \equiv 1, \qquad \text{mod} \begin{vmatrix} 0 & 14 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Or on trouve que, par rapport à ce module qui est un nombre complexe idéal,

$$\begin{aligned} (5 + 2\sqrt{6})^2 &\equiv 7 + 6\sqrt{6}, \\ (5 + 2\sqrt{6})^3 &\equiv 9 + 2\sqrt{6}, \\ (5 + 2\sqrt{6})^4 &\equiv -1, \\ (5 + 2\sqrt{6})^5 &\equiv -5 - 2\sqrt{6}, \\ (5 + 2\sqrt{6})^6 &\equiv -7 - 6\sqrt{6}, \\ (5 + 2\sqrt{6})^7 &\equiv -9 - 2\sqrt{6}, \\ (5 + 2\sqrt{6})^8 &\equiv 1, \end{aligned}$$

et que par conséquent on aura, si m et μ sont des entiers quelconques,

$$(5 + 2\sqrt{6})^{m+8\mu} \equiv (5 + 2\sqrt{6})^m.$$

Les valeurs de $t + u\sqrt{6}$ nous est donc donnée par

$$(5 + 2\sqrt{6})^8 = 46099201 + 18819920\sqrt{6}.$$

La substitution semblable la plus simple du système est donc de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & k_0 & k'_0 \\ 0 & 46099201 & 112919520 \\ 0 & 18819920 & 46099201 \end{vmatrix},$$

et, comme elle doit reproduire

$$14x + y + 2z,$$

on aura

$$1 = 14k_0 + 83739041,$$
$$2 = 14k'_0 + 205117922;$$

d'où

$$k_0 = 5981360,$$
$$k'_0 = 14651280.$$

Donc, les substitutions semblables du système

$$14x + y + 2z, \qquad y^2 - 6z^2$$

sont les puissances de

$$\begin{vmatrix} 1 & 5918360 & 14651280 \\ 0 & 46099201 & 112919520 \\ 0 & 18819920 & 46099201 \end{vmatrix}.$$

DÉMONSTRATION NOUVELLE

DE

DEUX THÉORÈMES DE M. BERTRAND

PAR M. GEORGES OSSIAN-BONNET.

Supposons que d'un point A d'une surface (S) on trace sur celle-ci et dans toutes les directions des lignes géodésiques. Prenons à partir du point A, pour chacune d'elles, un arc AM de longueur constante ρ, le lieu des extrémités M sera une ligne de la surface à laquelle nous donnerons, pour abréger, le nom de *circonférence géodésique,* de centre A et de rayon ρ.

Nous appellerons aussi *cercle géodésique* la portion de la surface comprise dans une circonférence géodésique.

Cela posé et considérant ρ comme infiniment petit principal, il est utile de connaître le périmètre de la circonférence géodésique en ne négligeant que les infiniment petits d'ordre supérieur au troisième et l'aire du cercle géodésique en ne négligeant que les infiniment petits d'ordre supérieur au quatrième.

Ces problèmes ont été posés et résolus pour la première fois par M. Bertrand; MM. Puiseux, Diguet, Faye s'en sont ensuite occupés. Nous nous proposons d'en donner ici une nouvelle solution uniquement fondée sur des considérations infinitésimales et entièrement à l'abri d'objections.

Je ferai usage d'une série de propriétés données autrefois par M. Ossian Bonnet, mon père, dans ses Leçons de Géométrie infinitésimale de la Sorbonne, et que je vais d'abord rappeler.

1° Soit $f(\alpha)$ un infiniment petit avec α, d'ordre p et dont $A\alpha^p$ représente la valeur principale. Supposons que $f(\alpha)$ ait une fonction primitive $F(\alpha)$ bien déterminée pour $\alpha = 0$ et pour α très petit; $F(\alpha) - F(0)$ sera infiniment petit d'ordre $p+1$ et aura $\frac{A}{p+1}\alpha^{p+1}$ comme valeur principale.

En effet, on a, comme on sait,

$$\frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha^{p+1}} = \frac{f(\beta)}{(p+1)\beta^p},$$

β étant compris entre o et α. Faisons décroître α indéfiniment et d'une manière quelconque, β décroîtra aussi indéfiniment, mais non pas d'une manière quelconque. Quoi qu'il en soit, comme $f(\alpha)$ a $A\alpha^p$ pour valeur principale, le second membre tendra toujours vers $\frac{A}{p+1}$; donc $F(\alpha) - F(0)$ est d'ordre $p+1$ et a $\frac{A}{p+1}\alpha^{p+1}$ pour valeur principale.

A ce théorème fondamental, on peut ajouter les deux propriétés suivantes :

$F(\alpha)$ étant toujours une fonction primitive bien déterminée, pour $\alpha = 0$ et pour α suffisamment petit, de l'infiniment petit $f(\alpha)$, si $f(\alpha)$ est d'ordre supérieur à p, $F(\alpha) - F(0)$ sera d'ordre supérieur à $p+1$.

Si l'on a

$$f\alpha = a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + m\alpha^p,$$

en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à p, on aura

$$F(\alpha) = F(0) + a\alpha + \frac{b}{2}\alpha^2 + \frac{c}{3}\alpha^3 + \ldots + \frac{m}{p+1}\alpha^{p+1},$$

en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à $p+1$.

2° Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes x et y. Regardons celles-ci comme les deux coordonnées cartésiennes d'un point variable dans un plan, de telle sorte qu'à chaque système de valeurs de x et de y réponde un point du plan, et réciproquement qu'à tout point du plan réponde un système de valeurs de x et de y. Si nous prenons un point déterminé A du plan répondant aux valeurs a et b de x et de y et un point variable M répondant aux valeurs $a+h$ et $b+k$ de x et de y et pouvant occuper toutes les positions dans l'intérieur d'un contour fermé tracé autour du point A dans le plan, l'accroissement que subira $f(x,y)$ quand on passera du point A au point M, c'est-à-dire

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b),$$

sera en valeur absolue, quelle que soit la position de M, toujours inférieur à une quantité de la forme $K\rho$, où K est un nombre déterminé positif et fini et ρ le plus grand rayon vecteur partant du point A et aboutissant au contour.

Posons, en effet,

$$h=\sqrt{h^2+k^2}\cos\alpha, \qquad =\sqrt{h^2+k^2}\sin\alpha,$$

et supposons, ce qui a toujours lieu, sauf dans quelques cas particuliers dont nous ne tiendrons aucun compte, que les dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y, $\psi(x,y)$ et $\chi(x,y)$ de $f(x,y)$, existent et restent respectivement inférieures en valeur absolue à des nombres déterminés, positifs et finis N et P pour tous les points situés dans l'intérieur du contour; nous aurons d'abord, en considérant $\sqrt{h^2+k^2}$ comme l'unique variable dont $f(a+h,\ b+k)$ dépend,

$$\begin{aligned}&f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)\\&\quad=\sqrt{h^2+k^2}\left[\cos\alpha\,\psi(a+\theta h,\ b+\theta k)+\sin\alpha\,\chi(a+\theta h,\ b+\theta k)\right],\end{aligned}$$

θ étant compris entre o et 1.

Posant ensuite

$$\psi(a+\theta h,\ b+\theta k)=\sqrt{\psi^2(a+\theta h,\ b+\theta k)+\chi^2(a+\theta h,\ b+\theta k)}\cos\varphi,$$

$$\chi(a+\theta h,\ b+\theta k)=\sqrt{\psi^2(a+\theta h,\ b+\theta k)+\chi^2(a+\theta h,\ b+\theta k)}\sin\varphi,$$

il viendra

$$f(a+h,\, b+k) - f(a,\, b)$$
$$= \sqrt{h^2+k^2}\sqrt{\psi^2(a+\theta h,\, b+\theta k)+\chi^2(a+\theta h,\, b+\theta k)}\cos(\alpha-\varphi),$$

ce qui prouve que la valeur absolue de $f(a+h,\, b+k) - f(a,\, b)$ est toujours inférieure à $\sqrt{h^2+k^2}\sqrt{P^2+N^2}$ et, par conséquent, que $\sqrt{P^2+N^2}$ est une valeur convenable de K.

Parmi les nombreuses conséquences qui résultent de la propriété précédente, nous signalerons les deux suivantes :

Considérons sur une surface quelconque un point déterminé A et un point variable M pouvant prendre toutes les positions dans l'intérieur d'un contour fermé décrit autour du point A sur la surface. Soit d'ailleurs une fonction-point relativement à la surface, c'est-à-dire une fonction qui ne dépende que des deux coordonnées rectilignes ou curvilignes u et v par lesquelles on détermine la position des différents points de la surface, l'accroissement que subira cette fonction quand on passera du point A au point M, en suivant un arc de courbe quelconque tracée sur la surface, sera en valeur absolue, quel que soit M, inférieur à une quantité de la forme Kρ, où K est un nombre positif et fini et ρ le plus grand rayon vecteur géodésique partant du point A et aboutissant au contour.

En effet, rien n'empêche de supposer que u et v soient deux des coordonnées cartésiennes, x et y par exemple; l'accroissement dont il s'agit sera alors en valeur absolue, quel que soit M, inférieur à une quantité de la forme K$\sqrt{h^2+k^2}$, en désignant comme plus haut par h et k les accroissements que subissent u et v quand on passe du point A au point M et par K une constante positive et finie; mais $\sqrt{h^2+k^2}$, qui est ici la projection sur le plan des xy de la corde de l'arc du rayon vecteur géodésique allant de A à M est moindre que cet arc et par suite que ρ; on peut donc dire aussi que l'accroissement est, en valeur absolue et quel que soit M, inférieur à Kρ.

Les dénominations et les notations précédentes étant conservées, prenons en outre un plan P dont la direction soit fonction-plan relativement à la surface, c'est-à-dire tel que les cosinus directeurs a, b, c de son axe soient des fonctions-point relativement à la surface; l'angle ε, compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ du plan P correspondant au point M avec le plan P correspondant au point A, sera, quel que soit M, inférieur à une quantité de la forme $K\rho$. En effet, si l'on appelle Δa, Δb, Δc les accroissements que subissent a, b, c quand on passe du point A au point M en parcourant l'arc ρ, on aura

$$2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2};$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2},$$

par suite

$$\varepsilon < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2},$$

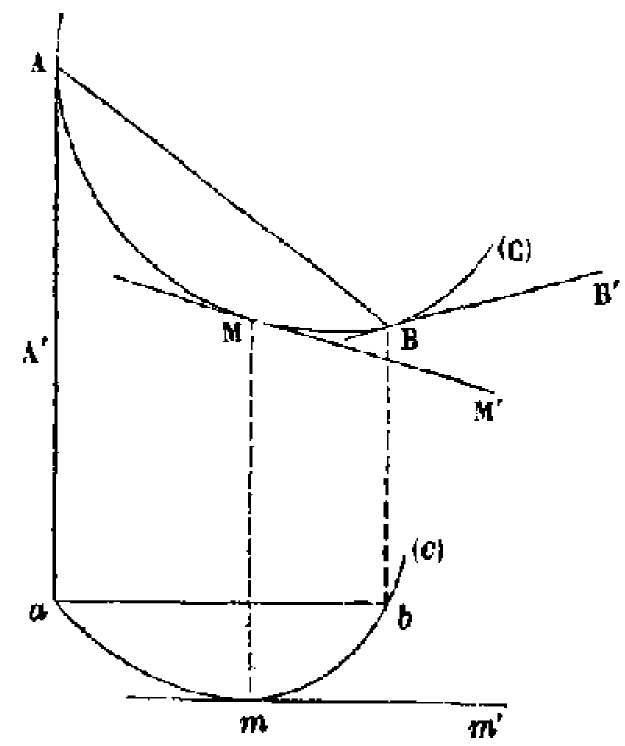
en observant que la fonction de x, $\frac{x}{\sin x}$, croît avec x tant que cette variable ne dépasse pas $\frac{\pi}{2}$. Mais chacun des accroissements Δa, Δb, Δc est toujours moindre qu'une expression de la forme $K\rho$; donc ε est aussi toujours moindre qu'une expression de la même forme.

Indiquons encore quelques propriétés géométriques qui ont aussi été données par mon père dans ses Cours de Géométrie infinitésimale.

3° Soient (C) une courbe gauche, AMB un arc de cette courbe, AB la corde correspondante; menons au point A la tangente AA'. Je dis que le plan de la corde et de la tangente sera parallèle à une seconde tangente ayant son point de contact entre A et B.

En effet, projetons (*fig.* 1) sur un plan perpendiculaire à la tangente AA'. Soient (c) la projection de (C), *amb* la projection de l'arc AMB, *ab* la projection de la corde AB. On sait que toute tangente à (c) est la projection d'une tangente à (C), le point de contact de la première tangente étant d'ailleurs la projection du point de contact de la seconde. Or la courbe (c) étant plane, il existe une tangente à (c) parallèle à *ab* et dont le point de contact m est entre a et b; donc il existe aussi une tangente

Fig. 1.



à (C) parallèle au plan projetant de AB, c'est-à-dire au plan BAA', et dont le point de contact M est entre A et B.

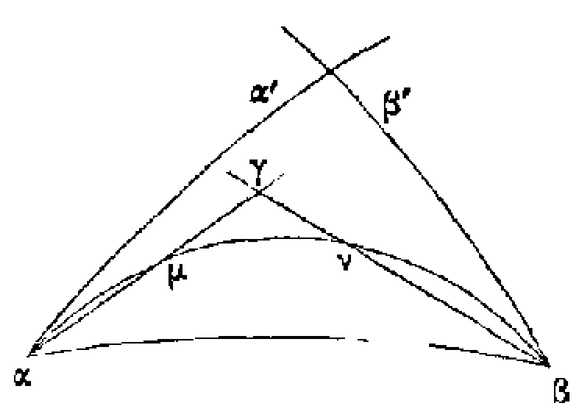
Remarque. — On peut dire aussi que le plan de la corde AB et de la tangente BB' au point B est parallèle à une autre tangente dont le point de contact est encore entre A et B.

4° Reprenons la courbe (C) et l'arc AMB. Déterminons (*fig.* 2) l'indicatrice sphérique $\varkappa$ de (C) en menant, dans une sphère de rayon 1, des rayons respectivement parallèles aux tangentes de la courbe (C); soient α et β les points de cette indicatrice sphérique qui correspondent aux points A et B de (C) : d'après ce que nous venons de démontrer, le plan de AA' et de AB sera parallèle au plan du grand cercle qui passe par α et un certain point μ de $(\varkappa)$ compris entre α et β; de même le plan de BB' et de AB sera parallèle au plan du grand cercle qui passe par β et un certain point ν de $(\varkappa)$ compris entre α et β; donc l'intersection des deux plans A'AB et B'BA, c'est-à-dire AB, sera parallèle au rayon de la sphère qui aboutit au point de rencontre des deux arcs de grand cercle $\alpha\mu$ et $\beta\nu$. Nous appellerons ce point de rencontre γ, et nous ferons observer qu'il se trouve toujours dans l'intérieur du triangle sphérique formé par la corde sphérique $\alpha\beta$ et par les arcs de grand cercle tangents à $(\varkappa)$ en α et β.

Cette propriété, qui fait connaître approximativement la direction de la corde AB par rapport à celle des tangentes à la courbe (C), menées aux différents points compris entre A et B, va nous conduire à la solution de deux problèmes, dont nous tirerons parti dans la suite.

Cherchons, en premier lieu, une limite supérieure des angles que la corde AB forme avec les tangentes AA′ et BB′ à la courbe (C) en A et B.

Fig. 2.



Ces angles sont les distances angulaires du point γ aux points α et β; donc ils sont moindres que la corde $\alpha\beta$, par suite que l'arc $\alpha\mu\beta$, lequel est égal à $\int \frac{ds}{r_s}$, en appelant s l'arc variable de la courbe (C) compté à partir d'une origine quelconque, r_s le rayon de courbure à l'extrémité de cet arc et l'intégrale étant étendue depuis A jusqu'à B. Mais, ρ désignant la longueur de l'arc AMB et r le plus petit des rayons de courbure de C parmi ceux qui se rapportent aux différents points compris entre A et B, l'intégrale $\int \frac{ds}{r_s}$ est moindre que $\frac{\rho}{r}$; donc cette dernière expression est une limite supérieure de chacun des angles BAA′ et ABB′.

Remarque. — On peut dire aussi que $\frac{\rho}{r}$ est une limite supérieure des angles que AB forme avec les plans bitangents à la courbe (C) au point A et au point B. En effet, ces angles sont égaux aux distances angulaires du point γ aux deux arcs de grand cercle normaux à $\alpha\mu\beta$ aux points α et β; ils sont donc respectivement moindres que les distances angulaires $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$, c'est-à-dire que les angles BAA′, ABB′.

Cherchons en second lieu une limite supérieure de la différence entre l'arc AMB que nous appellerons toujours ρ et sa corde AB que nous appellerons ρ_1.

Considérons plus généralement la différence $s - s_1$, où s désigne l'arc variable AM de (C) et s_1 la corde correspondante. Si nous prenons la dérivée par rapport à s de cette différence, nous aurons

$$\frac{d(s-s_1)}{ds}=1-\frac{ds_1}{ds}=1-\cos \mathrm{AMM'}=2\sin^2\frac{1}{2}\,\mathrm{AMM'}<\frac{1}{2}(\mathrm{AMM'})^2,$$

MM′ étant la tangente à C en M et AMM′ désignant l'angle aigu de AM avec MM′; mais, d'après ce qui précède et par un *a fortiori*, AMM′ est $<\frac{s}{r}$, r étant, comme plus haut, la constante qui représente le plus petit des rayons de courbure de la courbe (C) parmi tous ceux qui se rapportent aux points compris entre A et B; donc on a

$$\frac{d(s-s_1)}{ds}-\frac{1}{2}\frac{s^2}{r^2}=\frac{d\left(s-s_1-\frac{1}{6}\frac{s^3}{r^2}\right)}{ds}<0.$$

Cela prouve que la fonction de s : $s-s_1-\frac{1}{6}\frac{s^3}{r^2}$ décroît lorsque s croît de o à ρ; or cette fonction est nulle pour $s=0$; donc elle est négative pour $s>0$ et $\overline{\gtrless}\,\rho$: donc on a, en particulier,

$$\rho-\rho_1-\frac{1}{6}\frac{\rho^3}{r^2}<0,$$

d'où l'on déduit

$$\rho_1>\rho-\frac{1}{6}\frac{\rho^3}{r^2}.$$

Corollaire. — Appelons ρ' la projection de ρ_1 sur le plan bitangent à la courbe (C) en A, de telle sorte que $\rho'=\rho_1\cos\varphi$, en appelant φ l'angle aigu de AB avec le plan bitangent à la courbe (C) en A; on sait que φ est $<\frac{\rho}{r}$, d'où

$$\cos\varphi>\cos\frac{\rho}{r}>1-\frac{\rho^2}{2r^2};$$

donc on a

$$\rho'>\rho_1\left(1-\frac{\rho^2}{2r^2}\right),$$

par conséquent,

$$\rho'>\rho\left(1-\frac{1}{6}\frac{\rho^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\rho^2}{2r^2}\right)>\rho\left(1-\frac{2}{3}\frac{\rho^2}{r^2}\right).$$

A tous ces préliminaires nous ajouterons encore, avant d'attaquer la solution des deux problèmes qui font l'objet de ce travail, la détermination de l'ordre infinitésimal et de la valeur principale du périmètre C de la circonférence géodésique ayant A pour centre et ρ pour rayon sphérique.

Projetons la circonférence géodésique sur le plan tangent à la surface (S) en A; soit C′ le périmètre de la courbe plane fermée représentant la projection. Il est d'abord aisé de voir que $\lim \frac{C'}{C} = 1$, quand ρ décroît indéfiniment, ce qui permet de remplacer C par C′. En effet, soit ds un élément quelconque de C et ds' l'élément correspondant de C′, on aura

$$ds' = \cos\theta \, ds,$$

en appelant θ l'angle que la tangente à la circonférence géodésique, en un point M de l'élément ds, fait avec le plan tangent en A; mais cet angle est égal ou inférieur à celui du plan tangent en M avec le plan tangent en A, car l'angle d'un plan avec une droite est tout au plus égal à l'angle du plan avec un autre plan passant par la droite; d'ailleurs la direction du plan tangent étant une fonction-point relativement à la surface, l'angle du plan tangent en M avec le plan tangent en A est, quel que soit M, moindre qu'une expression de la forme $K\rho$, K étant une constante positive et finie. Donc on a, pour tous les points M,

$$\theta < K\rho, \qquad \cos\theta > \cos K\rho > 1 - \frac{K^2\rho^2}{2},$$

par suite

$$ds > ds' > \left(1 - \frac{K^2\rho^2}{2}\right) ds,$$

et enfin

$$C > C' > C\left(1 - \frac{K^2\rho^2}{2}\right),$$

d'où

$$\lim \frac{C'}{C} = 1.$$

Il reste maintenant à trouver l'ordre infinitésimal et la valeur principale de C′. Rapportons la courbe dont C′ est le périmètre, c'est-à-dire la projection de la circonférence géodésique, à un système de coordonnées polaires, pour lequel A soit le pôle. Appelons ρ' et ω' les coordonnées d'un point quelconque M', projection du point M de la circonférence géodésique : ρ' sera la projection de la corde du rayon géodésique, égal à ρ, qui aboutit au point M, et, d'après ce qu'on a vu plus haut, on aura

$$\rho > \rho' > \rho\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\rho^2}{r^2}\right);$$

r est ici variable avec le point M de la circonférence géodésique, car il représente, comme on sait, le plus petit des rayons de courbure de la ligne géodésique allant de A à M parmi tous ceux qui se rapportent aux points compris entre A et M, rayons de courbure qui sont d'ailleurs des rayons de courbure de sections normales à la surface, à cause de la propriété caractéristique des lignes géodésiques. Mais il est clair que, si l'on désigne par R le plus petit rayon de courbure principal de la surface, parmi tous ceux qui se rapportent à tous les points renfermés dans l'intérieur de la circonférence géodésique, r ne pourra jamais être inférieur à R ; on pourra donc le remplacer par R, et l'on aura

$$\rho > \rho' > \left(1 - \frac{2}{3}\frac{\rho^2}{R^2}\right)\rho;$$

inégalités qui s'étendent maintenant, sans qu'on fasse varier R, à toutes les valeurs de ρ' ou à tous les points M' de la ligne plane fermée dont C' est le périmètre. Ceci posé, il est très aisé de trouver une limite supérieure et une limite inférieure du périmètre C' dont la valeur en ρ' et ω' est

$$C' = \int_0^{2\pi} \sqrt{d\rho'^2 + \rho'^2 d\omega'^2};$$

en effet, on a d'abord

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{d\rho'^2 + \rho'^2 d\omega'^2} &> \int_0^{2\pi} \rho' d\omega' \\ &> \int_0^{2\pi} \rho\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\rho^2}{R^2}\right) d\omega'\end{aligned}$$

qui est égale à $2\pi\rho\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\rho^2}{R^2}\right)$, puis

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{d\rho'^2 + \rho'^2 d\omega'^2} < \int_0^{2\pi} \sqrt{d\rho'^2} + \int_0^{2\pi} \rho' d\omega' < \int_0^{2\pi} \sqrt{d\rho'^2} + 2\varpi\rho;$$

mais, en appelant $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ les valeurs maxima de ρ' que l'on rencontr successivement, lorsqu'on donne à ω' toutes les valeurs, depuis celle α qui correspond au premier de ces maxima M_1 jusqu'à $\alpha + 2\pi$, et $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ les valeurs minima intermédiaires, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{d\rho'^2} = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \sqrt{d\rho'^2} & \\ = 2(M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n) & \\ - 2(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n) & \\ < 2n\rho - 2n\left(\rho - \frac{2}{3}\frac{\rho^3}{R^2}\right) = \frac{4}{3} n \frac{\rho^3}{R^2}, & \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{d\rho'^2 + \rho'^2 d\omega'^2} < 2\pi\rho + \frac{4}{3} n \frac{\rho^3}{R^2}.$$

Ainsi C' est compris entre $2\pi\rho - \frac{4}{3}\pi\frac{\rho^3}{R^2}$ et $2\pi\rho + \frac{4}{3} n \frac{\rho^3}{R^2}$; par conséquent, ce périmètre est du premier ordre et a $2\pi\rho$ pour valeur principale; car n, quoique variable avec ρ, peut toujours être supposé fini.

Occupons-nous enfin de la détermination du périmètre C de la circonférence géodésique de rayon ρ en ne négligeant que les infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième, et de celle de l'aire A du cercle géodésique correspondant, en ne négligeant que les infiniment petits d'un ordre supérieur au quatrième.

Supposons que les différents points de la surface S soient rapportés au système de coordonnées, qu'on peut appeler coordonnées polaires géodésiques, et qui ne sont autres que la longueur ρ de l'arc de ligne géodésique allant du point fixe A au point M (on sait que cette ligne est unique, pourvu que le point M soit suffisamment près de A), et l'angle ω sous lequel la ligne géodésique AM coupe une autre ligne géodésique fixe issue du point A.

Gauss a, le premier, considéré ce système de coordonnées et lui a reconnu les deux propriétés suivantes :

1° Les deux systèmes de lignes de coordonnées se coupent partout à angle droit.

2° Si l'on appelle c la fonction de ρ et de ω qui représente l'arc de circonférence géodésique de rayon ρ, compris entre la ligne géodésique initiale $\omega = 0$ et la ligne géodésique quelconque, qui coupe la première sous l'angle ω, on a

$$(1) \qquad \frac{\partial^3 c}{\partial\rho^2\,\partial\omega} = -\frac{\dfrac{\partial c}{\partial\omega}}{\mathrm{RR}'},$$

R et R′ étant les rayons de courbure principaux de la surface au point ρ, ω.

Pour ne faire des emprunts qu'à des théories élémentaires bien connues, nous donnerons ici des démonstrations directes de ces deux propriétés; ce qui, du reste, n'a pas encore été fait que je sache.

Appelons u une quelconque des coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z d'un point quelconque de la surface, et posons, pour abréger, quelle que soit φ,

$$\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = \Sigma\varphi(u);$$

le cosinus de l'angle i, sous lequel se coupent les deux lignes coordonnées $\rho = \text{const.}$, $\omega = \text{const.}$ qui déterminent la position d'un point de la surface, sera

$$\frac{1}{\dfrac{\partial c}{\partial\omega}}\sum\frac{\partial u}{\partial\omega}\frac{\partial u}{\partial\rho}.$$

Considérons le second facteur $\sum\frac{\partial u}{\partial\omega}\frac{\partial u}{\partial\rho}$ seulement et différentions-le par rapport à ρ, il viendra

$$\sum\frac{\partial^2 u}{\partial\omega\,\partial\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \sum\frac{\partial u}{\partial\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2};$$

le premier terme qui est égal à $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}\sum\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2$ est nul, car $\sum\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2 = 1$; le second est aussi nul; en effet, les trois valeurs de $\frac{\partial u}{\partial\omega}$ sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la tangente à la ligne coordonnée $\rho = \text{const.}$; les trois valeurs de $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$ sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale principale à la ligne géodésique $\omega = \text{const.}$, c'est-à-dire de la normale à la surface; donc $\sum \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$ est, à un facteur près, le cosinus de l'angle de la normale à la surface, avec une tangente à cette surface au même point, et, par conséquent, est égal à zéro. Il résulte de là qu'on peut poser

$$\sum \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial c}{\partial \omega} \cos i = \mathrm{F}(\omega);$$

ce qui donne, $\frac{\partial c}{\partial \omega}$ étant toujours positif pourvu que ρ soit suffisamment petit,

$$\frac{\partial c}{\partial \omega} > + \sqrt{\mathrm{F}^2(\omega)};$$

d'où, en intégrant par rapport à ω de 0 à 2π,

$$\mathrm{C} > \int_0^{2\pi} + \sqrt{\mathrm{F}^2 \omega}\, d\omega;$$

mais C devient nul avec ρ, cela ne peut être qu'autant que $\mathrm{F}(\omega)$ est identiquement nul et, par suite, que si l'angle i, sous lequel se coupent les deux lignes coordonnées passant par un point quelconque de la surface, est droit. La première propriété due à Gauss est ainsi démontrée.

Passons à la deuxième propriété. Je pars de la relation

$$\left(\frac{\partial c}{\partial \omega}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial u}{\partial \omega}\right)^2,$$

et j'en déduis successivement, en différentiant deux fois par rapport à ρ,

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \omega \, \partial \rho} = \sum \frac{\frac{\partial u}{\partial \omega}}{\frac{\partial c}{\partial \omega}} \frac{\partial^2 u}{\partial \omega \, \partial \rho},$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^3 c}{\partial \omega \, \partial \rho^2} = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial \omega \, \partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\frac{\partial u}{\partial \omega}}{\frac{\partial c}{\partial \omega}} + \sum \frac{\frac{\partial u}{\partial \omega}}{\frac{\partial c}{\partial \omega}} \frac{\partial^3 u}{\partial \omega \, \partial \rho^2}.$$

Occupons-nous d'abord du premier terme du second membre : comme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\omega\,\partial\rho} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial c}{\partial\omega}\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}}\right) = \frac{\partial^2 c}{\partial\omega\,\partial\rho}\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}} + \frac{\partial c}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}},$$

on a

$$\sum\frac{\partial^2 u}{\partial\omega\,\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}} = \frac{\partial^2 c}{\partial\omega\,\partial\rho}\sum\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}} + \frac{\partial c}{\partial\omega}\sum\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}}\right)^2;$$

or

$$\sum\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}},$$

qui est égal à

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}\sum\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}}\right)^2,$$

est nul, car

$$\sum\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}}\right)^2 = 1;$$

puis, en observant que, pour un même point de la surface, la tangente à la ligne coordonnée $\rho =$ const. et l'axe du plan osculateur à la ligne coordonnée $\omega =$ const. coïncident,

$$\sum\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}}\right)^2$$

est évidemment le carré de la torsion de la ligne coordonnée $\omega =$ const.;

appelant donc $\frac{1}{p}$ cette torsion, il viendra

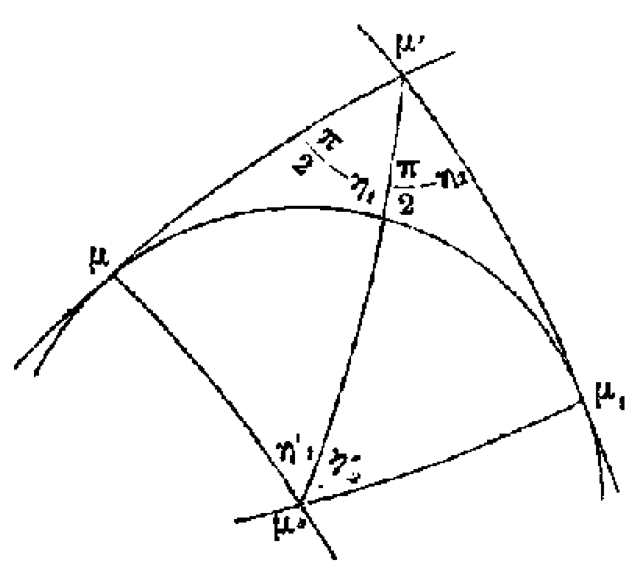
$$\sum \frac{\partial^2 u}{\partial\omega\,\partial\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{\dfrac{\partial u}{\partial\omega}}{\dfrac{\partial c}{\partial\omega}} = \frac{\partial c}{\partial\omega}\,\frac{1}{p^2};$$

reste à évaluer $\frac{1}{p}$. Construisons (*fig.* 3) l'indicatrice sphérique de la ligne coordonnée $\omega = \text{const.}$ Soient μ le point de cette indicatrice correspondant à un point quelconque M de la ligne coordonnée et μ_1 le point infiniment voisin de μ répondant au point M_1, de la même ligne coordonnée, infiniment voisin de M; si nous menons les arcs de grand cercle tangents à l'indicatrice en μ et μ_1, l'angle aigu η_1 sous lequel ces arcs se couperont, sera l'angle de torsion de la ligne coordonnée; de plus, l'arc infiniment petit $\mu\mu_1$ aura même valeur principale que $\frac{MM_1}{r}$, en appelant r le rayon de courbure de la ligne coordonnée $\omega = \text{const.}$ De là résulte d'abord que $\frac{1}{p}$ est égal à

$$\frac{\eta_1}{\mu\mu_1}\,\frac{1}{r},$$

le rapport $\frac{\eta_1}{\mu\mu_1}$ étant pris à la limite. Menons maintenant les arcs de grand cercle normaux en μ et μ_1 à l'indicatrice sphérique, lesquels auront leurs

Fig. 3.



plans respectivement parallèles aux plans tangents à la surface en M et M_1. Ces arcs normaux se couperont sous un angle η' en un point μ'' dont la distance angulaire à μ considérée à la limite sera représentée par θ. Menons encore $\mu'\mu''$ et appelons $\frac{\pi}{2}-\eta_1$, $\frac{\pi}{2}-\eta_2$, η'_1, η'_2 les angles $\mu\mu'\mu''$, $\mu_1\mu'\mu''$, $\mu\mu''\mu'$, $\mu_1\mu''\mu'$; les triangles rectangles $\mu'\mu\mu''$ et $\mu'\mu_1\mu''$ donneront

$$\sin\eta_1 = \sin\eta'_1 \cos\mu\mu'', \qquad \sin\eta_2 = \sin\eta'_2 \cos\mu_1\mu'';$$

d'où l'on conclut aisément

$$\lim\frac{\eta_1}{\eta'_1} = \lim\frac{\eta_2}{\eta'_2} = \lim\frac{\eta_1+\eta_2}{\eta'_1+\eta'_2} = \lim\frac{\eta}{\eta'} = \lim\frac{\eta\sin\theta}{\mu\mu_1} = \cos\theta;$$

d'où

$$\lim\frac{\eta}{\mu\mu_1} = \cot\theta,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r\,\mathrm{tang}\,\theta}.$$

Cette valeur de $\frac{1}{\rho}$, quoique très simple, n'est pas celle dont nous nous servirons; nous allons la transformer et y introduire les rayons de courbure principaux de la surface au point M. Nous avons dit que r est le rayon de courbure au point M de la ligne géodésique $\omega = \text{const.}$, nous pouvons ajouter que c'est aussi le rayon de courbure de la section normale à la surface correspondant à la tangente MM'_ω de la ligne $\omega = \text{const.}$; quant à l'angle θ, il est égal évidemment à l'angle que la tangente MM'_ω fait avec sa conjuguée : cela résulte de ce que, les plans des grands cercles $\mu\mu''$, $\mu_1\mu''$ étant respectivement parallèles aux plans tangents à la surface en M et M_1, le point μ'' est, à la limite, l'extrémité du rayon parallèle à la limite de l'intersection de ces deux plans tangents, c'est-à-dire l'extrémité du rayon parallèle à la tangente conjuguée de la limite de MM_1 ou de la tangente MM'_ω. Ceci posé, considérons l'indicatrice de Dupin relative au point M, ou mieux, en précisant, la conique ayant ses axes dirigés suivant les tangentes principales et dont les rayons vecteurs issus du centre sont égaux à la racine carrée des rayons de courbure des sections normales correspondantes. Nommons R, R' les rayons de courbure principaux et α l'angle que la tangente MM'_ω fait avec la tangente principale correspondant au rayon de courbure R ; nous aurons d'abord

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'};$$

d'autre part, on sait que θ, d'après la propriété qu'on vient de lui reconnaître, est égal à l'angle sous lequel le rayon de l'indicatrice dirigé suivant MM'_ω coupe cette courbe, et que, par conséquent,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\frac{d\sqrt{r}}{d\alpha}}{\sqrt{r}} = \frac{1}{2}\,\frac{dr}{r\,d\alpha};$$

de là on déduit

$$\frac{1}{r}\operatorname{tang}\theta = \frac{\frac{dr}{d\alpha}}{2r^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right);$$

ainsi finalement le premier terme du second membre de la relation (2) revient à

$$\frac{\partial c}{\partial\omega}\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^2.$$

Passons au second terme

$$\sum \frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}}\,\frac{\partial^3 u}{\partial\omega\,\partial\rho^2}.$$

On peut d'abord le remplacer par les deux suivants

$$\sum \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right) - \sum \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\,\frac{\partial}{\partial\omega}\,\frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}};$$

or le premier de ceux-ci est nul, car $\sum \frac{\frac{\partial u}{\partial\omega}}{\frac{\partial c}{\partial\omega}}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}$ est nul, comme on l'a déjà

VII. Le second équivaut à

$$-\frac{\partial c}{\partial \omega}\frac{\cos\psi}{rr'_1},$$

r ayant la même signification que plus haut, r'_1 étant le rayon de courbure de la ligne coordonnée $\rho = \text{const.}$, et ψ représentant l'angle que ce dernier rayon de courbure fait avec le rayon de courbure de la ligne coordonnée $\omega = \text{const.}$, ou avec la normale à la surface; mais, d'après le théorème de Meunier, $\frac{r'_1}{\cos\psi}$ est égal au rayon de courbure r_1 de la section normale tangente à la circonférence géodésique $\rho = \text{const.}$; d'ailleurs cette section normale faisant l'angle $\frac{\pi}{2} + \alpha$ avec celle qui correspond au rayon de courbure principal R, on a, par la formule d'Euler,

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\sin^2\alpha}{R} + \frac{\cos^2\alpha}{R'};$$

par conséquent le second terme de la relation (2), dont l'évaluation nous occupe, revient à

$$-\frac{\partial c}{\partial \omega}\left(\frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'}\right)\left(\frac{\sin^2\alpha}{R} + \frac{\cos^2\alpha}{R'}\right).$$

Réunissant ce second terme au premier, qui a déjà été déterminé, la relation (2) devient finalement

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 c}{\partial\rho^2\,\partial\omega} &= -\frac{\partial c}{\partial\omega}\left[\left(\frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'}\right)\left(\frac{\sin^2\alpha}{R} + \frac{\cos^2\alpha}{R'}\right) - \sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\right]\\ &= -\frac{\frac{\partial c}{\partial\omega}}{RR'}(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = -\frac{\frac{\partial c}{\partial\omega}}{RR'},\end{aligned}$$

c'est-à-dire la relation (1) qu'il s'agissait d'établir.

La formule (1) de Gauss conduit à une solution très simple des problèmes qui font l'objet de cette Note.

Appelons R_0, R'_0 les valeurs de R et de R' pour le point A; $\frac{1}{RR'}$ étant une fonction-point relativement à la surface, il sera possible de trouver un nombre déterminé positif et fini K, tel que $\frac{1}{RR'} - \frac{1}{R_0 R'_0}$ soit plus petit que $K\rho$ et plus grand que $-K\rho$ pour tous les points de la surface situés dans l'intérieur de la circonférence géodésique de rayon ρ.

Cela étant et observant que $-\frac{\partial c}{\partial \omega}$ est toujours positif, la relation (1) entraînera les deux inégalités suivantes :

$$\frac{\partial^3 c}{\partial \rho^2 \partial \omega} > -\frac{\partial c}{\partial \omega}\left(\frac{1}{R_0 R'_0} + K\rho\right)$$

et

$$\frac{\partial^3 c}{\partial \rho^2 \partial \omega} < -\frac{\partial c}{\partial \omega}\left(\frac{1}{R_0 R'_0} - K\rho\right);$$

multipliant par $d\omega$ et intégrant de 0 à 2π, il viendra

$$\frac{d^2 C}{d\rho^2} > -C\left(\frac{1}{R_0 R'_0} + K\rho\right)$$

et

$$\frac{d^2 C}{d\rho^2} < -C\left(\frac{1}{R_0 R'_0} - K\rho\right),$$

C étant le périmètre de la circonférence géodésique de rayon ρ.

De là on conclut que, si l'on pose

$$\frac{d^2 C}{d\rho^2} = -\frac{C}{R_0 R'_0}(1 + \varepsilon),$$

ε sera une fonction de ρ seulement, infiniment petite avec ρ. Or C est une fonction de ρ, infiniment petite du premier ordre, et qui a $2\pi\rho$ pour valeur principale, d'après ce qu'on a vu plus haut ; donc $-\frac{C}{R_0 R'_0}(1 + \varepsilon)$, et par conséquent $\frac{d^2 C}{d\rho^2}$ qui lui est égal, sera aussi du premier ordre et aura $-\frac{2\pi\rho}{R_0 R'_0}$ pour valeur principale. En d'autres termes, on a

$$\frac{d^2 C}{d\rho^2} = -\frac{2\pi\rho}{R_0 R'_0},$$

abstraction faite des infiniment petits d'un ordre supérieur au premier.

Donc $\frac{dC}{d\rho}$ étant pour $\rho = 0$ la limite du rapport $\frac{C}{\rho}$, c'est-à-dire 2π, on voit, d'après le théorème de M. Ossian Bonnet démontré plus haut, que

$$\frac{dC}{d\rho} = 2\pi - \frac{\pi\rho^2}{R_0 R'_0},$$

en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au second; puis, C étant nul pour $\rho = 0$, que

$$C = 2\pi\rho - \frac{\pi\rho^3}{3R_0 R'_0},$$

en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième.

C'est le premier résultat dû à M. Bertrand. Le second s'en déduit immédiatement.

En effet, si l'on appelle A l'aire du cercle géodésique de rayon ρ, on voit aisément que

$$\frac{dA}{d\rho} = C;$$

donc, A étant nul pour $\rho = 0$,

$$A = \pi\rho^2 - \frac{\pi\rho^4}{12 R_0 R'_0},$$

en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au quatrième.

DÉMONSTRATION

DU

THÉORÈME DE D'ALEMBERT

PAR M. CH. BRISSE.

Nous allons prouver qu'une équation à coefficients réels ou imaginaires, de degré $2^\lambda k$ (k impair), a toujours une racine réelle ou imaginaire, si l'on admet que toute équation à coefficients réels ou imaginaires, dont le degré renferme le facteur 2 à une puissance moindre que λ, en a une. En prouvant ensuite que toute équation de degré impair à coefficients réels ou imaginaires a une racine, le théorème de d'Alembert sera démontré.

1. Soit

$$f(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m$$

le premier membre de l'équation donnée ($m = 2^\lambda k$). On peut supposer que p_{m-1} n'est pas nul; car, s'il l'était, en posant $x = x' + h$, le polynôme $f(x)$ deviendrait

$$f(x' + h) = f(h) + x' f'(h) + \ldots,$$

et, en choisissant une valeur de h qui n'annule pas $f'(h)$, ce qui est possible, puisqu'il ne peut pas y avoir plus de $m - 1$ valeurs qui l'annulent, on se trouverait dans l'hypothèse indiquée. On peut aussi supposer que p_m

n'est pas nul; car, s'il l'était, l'équation $f(x) = 0$ admettrait la racine $x = 0$, et le théorème serait démontré.

Soit

$$f(yx) = y^m x^m + p_1 y^{m-1} x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} yx + p_m$$

un polynôme déduit du premier par le changement de x en yx. Si l'on peut déterminer y, de telle sorte que $f(x)$ et $f(yx)$ aient en x un diviseur commun autre que $f(x)$, il en résultera que $f(x)$ est décomposable en un produit de deux facteurs. Le premier coefficient de $f(x)$ étant égal à l'unité et le dernier coefficient de $f(yx)$ n'étant pas nul, il faut et il suffit pour cela que le résultant

$$R(y) = \begin{vmatrix} y^m & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ p_1 y^{m-1} & y^m & \ldots & 0 & p_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_m & p_{m-1} y & \ldots & p_1 y^{m-1} & p_m & p_{m-1} & \ldots & p_1 \\ 0 & p_m & \ldots & p_2 y^{m-2} & 0 & p_m & \ldots & p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & p_m \end{vmatrix}$$

soit nul. En retranchant la $(m+1)^{\text{ième}}$ colonne de la première, la $(m+2)^{\text{ième}}$ colonne de la deuxième, etc., on met en évidence, dans chacune des m premières colonnes, le facteur $(y-1)$, de sorte que le résultant s'écrit

$$R(y) = (y-1)^m \begin{vmatrix} y^{m-1} + \ldots + 1 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ p_1(y^{m-2} + \ldots + 1) & \ldots & 0 & p_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & p_1(y^{m-2} + \ldots + 1) & p_m & p_{m-1} & \ldots & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & p_m \end{vmatrix}$$

$$= (y-1)^m R_1(y).$$

Or, en prenant, dans la première colonne de $R_1(y)$, le terme de plus haut degré y^{m-1}, dans la deuxième colonne, le terme de plus haut degré y^{m-1}, etc., ce qui est possible, puisqu'ils appartiennent à des lignes différentes, on a un terme en $y^{m(m-1)}$, dont le coefficient

$$\begin{vmatrix} p_m & p_{m-1} & \dots & p_1 \\ 0 & p_m & \dots & p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_m \end{vmatrix} = p_m^m,$$

obtenu en barrant, dans $R_1(y)$, les m premières colonnes et les m premières lignes, est différent de zéro. L'équation $R_1(y) = 0$ est donc du degré $m(m-1)$; nous allons démontrer qu'elle est réciproque.

A cet effet, changeons y en $\frac{1}{y}$ dans $R(y)$, et multiplions par y^m chacune des m premières colonnes,

$$y^{m^2} R\left(\frac{1}{y}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 y & 1 & \dots & 0 & p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_m y^m & p_{m-1} y^{m-1} & \dots & p_1 y & p_m & p_{m-1} & \dots & p_1 \\ 0 & p_m y^m & \dots & p_2 y^2 & 0 & p_m & \dots & p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_m y^m & 0 & 0 & \dots & p_m \end{vmatrix}.$$

Or, en multipliant la première ligne de ce déterminant par y^m et la première colonne par y^{-m}, la deuxième ligne par y^{m-1} et la deuxième colonne par $y^{-(m-1)}$, etc., la $m^{\text{ième}}$ ligne par y et la $m^{\text{ième}}$ colonne par y^{-1}, la $(m+1)^{\text{ième}}$ ligne par 1 et la $(m+1)^{\text{ième}}$ colonne par 1, la $(m+2)^{\text{ième}}$ ligne par y^{-1} et la $(m+2)^{\text{ième}}$ colonne par y, etc., la dernière ligne par $y^{-(m-1)}$ et la dernière colonne par y^{m-1}, le déterminant ne change pas. Mais le $\beta^{\text{ième}}$ terme de la $\alpha^{\text{ième}}$ $(\alpha < m)$ colonne, $p_{\beta-\alpha} y^{\beta-\alpha}$, devient

$$p_{\beta-\alpha} y^{\beta-\alpha} y^{m-(\beta-1)} y^{-[m-(\alpha-1)]} = p_{\beta-\alpha},$$

c'est-à-dire le $\beta^{\text{ième}}$ terme de la $(m+\alpha)^{\text{ième}}$ colonne du déterminant primitif $R(y)$, et le $\beta^{\text{ième}}$ terme de la $(m+\alpha)^{\text{ième}}$ colonne, $p_{\beta-\alpha}$, devient

$$p_{\beta-\alpha} y^{m-(\beta-1)} y^{\alpha-1} = p_{\beta-\alpha} y^{m-(\beta-\alpha)},$$

c'est-à-dire le $\beta^{\text{ième}}$ terme de la $\alpha^{\text{ième}}$ colonne du déterminant primitif $R(y)$. Le déterminant actuel reproduit donc le déterminant $R(y)$, et l'on a identiquement, puisque m est pair,

$$y^{m^2} R\left(\frac{1}{y}\right) = R(y)$$

ou

$$y^{m^2}\left(\frac{1}{y}-1\right)^m R_1\left(\frac{1}{y}\right) = (y-1)^m R_1(y)$$

ou

$$y^{m(m-1)} R_1\left(\frac{1}{y}\right) = R_1(y),$$

ce qui prouve bien que le polynôme $R_1(y)$ est réciproque.

Alors, en posant

$$y+\frac{1}{y}=z,$$

l'équation $R_1(y)=0$ donnera une équation en z de degré

$$\frac{m(m-1)}{2} = 2^{\lambda-1}k(2^\lambda k-1) = 2^{\lambda-1}k' \quad (k' \text{ impair}).$$

Cette équation ayant, par hypothèse, une racine réelle ou imaginaire, l'équation

$$y^2 - zy + 1 = 0$$

fera connaître pour y une valeur réelle ou imaginaire qui, substituée dans $f(yx)$, fera acquérir à celui-ci un diviseur commun, du premier degré au moins, du degré $m-1$ au plus, avec $f(x)$, à moins que cette valeur ne rende identiques $f(yx)$ et $f(x)$. Dans ce cas, les termes $p_{m-1}yx$ et $p_{m-1}x$ devant être identiques, il faudrait, puisque p_{m-1} n'est pas nul, que cette valeur fût égale à 1 ; on aurait donc

$$R_1(1) = \begin{vmatrix} m & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ (m-1)p_1 & \ldots & 0 & p_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & (m-1)p_1 & p_m & p_{m-1} & \ldots & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & p_m \end{vmatrix} = 0.$$

Mais $R_1(1) = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes $f(x)$ et $f'(x)$ admettent un diviseur commun du premier degré au moins, du degré $(m-1)$ au plus. On peut donc écrire, dans tous les cas,

$$f(x) = g(x)h(x).$$

Les degrés des polynômes g et h ne peuvent pas renfermer simultanément le facteur 2 à une puissance supérieure à λ; l'un d'eux le renferme donc à une puissance moindre ou à une puissance égale. S'il le renferme à une puissance moindre, l'équation correspondante a, par hypothèse, une racine réelle ou imaginaire; donc aussi l'équation $f(x) = 0$. S'il le renferme à une puissance égale, en lui appliquant la même méthode qu'à $f(x)$, on finira, puisque les degrés vont en diminuant, par trouver un diviseur dont le degré renferme le facteur 2 à une puissance moindre que λ. Le théorème est donc démontré.

2. Supposons maintenant m impair. Si l'équation est à coefficients réels, c'est un résultat connu qu'elle admet une racine réelle de signe contraire à p_m. Si elle est à coefficients imaginaires, soit $P(x) + iQ(x)$ son premier membre, $P(x)$ et $Q(x)$ étant à coefficients réels. En appliquant à l'équation $P^2(x) + Q^2(x) = 0$, à coefficients réels, et dont le degré est simplement pair, la méthode exposée au n° **1**, on est conduit à résoudre une équation de degré impair en z, à coefficients réels, qui a une racine réelle.

Si cette racine donne pour y une valeur réelle, $P^2(x) + Q^2(x)$ est décomposable en un produit de deux facteurs à coefficients réels. Si cette racine donne pour y deux valeurs imaginaires conjuguées, les polynômes $f(yx)$ correspondants font connaître un diviseur à coefficients réels ou deux diviseurs à coefficients imaginaires conjugués de $P^2(x)+Q^2(x)$. Si ces deux diviseurs ne sont pas premiers entre eux, ils admettent un diviseur commun à coefficients réels, qui divise $P^2(x)+Q^2(x)$, ou un diviseur commun à coefficients imaginaires, et alors ils admettent le diviseur conjugué. Si ces deux nouveaux diviseurs ne sont pas premiers entre eux, on peut opérer sur eux comme sur les précédents, et l'on arrive finalement, puisque les degrés vont en diminuant, à un diviseur réel ou à deux diviseurs imaginaires conjugués premiers entre eux. Leur produit, qui est à coefficients réels, est un diviseur de $P^2(x)+Q^2(x)$, et, si le degré de ce diviseur est inférieur à celui de $P^2(x)+Q^2(x)$, on a décomposé ce dernier en un produit de deux facteurs à coefficients réels.

Supposons donc que les valeurs conjuguées de y aient conduit à deux diviseurs conjugués premiers entre eux, $R(x)+iS(x)$, $R(x)-iS(x)$, dont le produit soit du degré de $P^2(x)+Q^2(x)$. En introduisant dans les deux diviseurs un même facteur numérique convenable, on a identiquement

$$[R(x)+iS(x)][R(x)-iS(x)]=[P(x)+iQ(x)][P(x)-iQ(x)].$$

Si $R(x)+iS(x)$ n'est pas premier avec $P(x)+iQ(x)$, ils admettent un diviseur de degré moindre ou ils sont identiques. Dans le premier cas, le diviseur conjugué appartient à $R(x)-iS(x)$ et à $P(x)-iQ(x)$, et le produit de ces deux diviseurs, qui est à coefficients réels, est un diviseur de $P^2(x)+Q^2(x)$. Dans le second cas, $P(x)+iQ(x)$ est un diviseur de $f(yx)$ ou de $[P(yx)+iQ(yx)][P(yx)-iQ(yx)]$, et, comme ces deux derniers facteurs sont premiers entre eux, sans quoi $P(yx)$ et $Q(yx)$ ou $P(x)$ et $Q(x)$ auraient un diviseur commun à coefficients réels qui diviserait $P^2(x)+Q^2(x)$, il faut que $P(x)+iQ(x)$ soit identique à l'un d'eux, c'est-à-dire que l'on doit avoir identiquement

$$P^2(x)+Q^2(x)=P^2(yx)+Q^2(yx)$$

ou

$$f(x) = f(yx),$$

ce qui exige, en particulier,

$$p_{m-1} = p_{m-1}y,$$

égalité impossible, puisque y est imaginaire et que p_{m-1} n'est pas nul.

$P^2(x) + Q^2(x)$ est donc toujours décomposable en un produit de facteurs à coefficients réels

$$P^2(x) + Q^2(x) = U(x)V(x).$$

L'équation $P^2(x) + Q^2(x) = 0$ n'ayant évidemment pas de racine réelle, aucun des polynômes $U(x)$, $V(x)$ ne peut être de degré impair; on peut donc représenter par $2u$ et $2v$ leurs degrés, et le degré du produit est $2(u+v)$. Ce nombre devant être simplement pair, $u+v$ doit être impair, ce qui exige que l'un des deux nombres, u par exemple, soit impair. En traitant le polynôme $U(x)$ de degré simplement pair par la même méthode, on lui trouvera un diviseur de degré moindre, simplement pair, à coefficients réels, et, en continuant, on arrivera à un diviseur du second degré, à coefficients réels, qui aura deux racines imaginaires conjuguées.

MÉMOIRE

SUR

CERTAINS MOUVEMENTS

DANS LESQUELS

DES ARCS D'UNE MÊME COURBE PLANE

COMPTÉS A PARTIR D'UNE ORIGINE FIXE

SONT PARCOURUS DANS LE MÊME TEMPS QUE LES CORDES CORRESPONDANTES;

PAR M. G. FOURET,

Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique.

INTRODUCTION.

1. Je me propose, dans le présent Mémoire, de traiter les deux questions suivantes, inverses l'une de l'autre.

PROBLÈME I. — *Un point matériel soumis, dans un plan, à une force dérivant d'un potentiel déterminé, part d'une certaine origine fixe* O *avec une vitesse donnée. Trouver un système de courbes* (C) *homothétiques et passant en* O, *qui soit tel que le mobile, en décrivant l'une de ces courbes, à partir du point* O, *atteigne un point quelconque du plan dans le même temps qu'il mettrait à décrire la corde correspondante.*

PROBLÈME II. — *Étant donné, dans un plan, un système de courbes* (C) *homothétiques et passant en un même point* O, *centre commun d'homo-*

thétie, trouver une force dérivant d'un potentiel, sous l'action de laquelle un mobile partant avec une vitesse donnée du point O *parcoure, à partir de ce point, un arc quelconque d'une quelconque des courbes* (C), *dans le même temps qu'il mettrait à décrire la corde correspondante.*

Le premier problème n'est pas toujours possible. Pour qu'il le soit, il faut d'abord que la vitesse initiale soit nulle; il faut en outre que l'expression du potentiel ait une forme particulière que je fais connaître. En supposant ces conditions remplies, je donne une méthode très simple et générale pour trouver le système de courbes (C) qui répond à la question. L'équation commune de ces courbes s'obtient au moyen d'une quadrature, plus ou moins facile à effectuer, suivant l'expression du potentiel donné.

Le second problème n'est également possible qu'autant que la vitesse initiale est nulle. En supposant qu'il en soit ainsi, je donne la marche à suivre pour trouver la solution, ou plutôt pour la ramener à ne dépendre que d'une élimination et d'une quadrature. Il est assez digne de remarque que l'expression du potentiel cherché dépend d'une fonction arbitraire. De l'expression du potentiel, je conclus, au moyen de formules faciles à appliquer, la valeur et la direction de la force. La solution du problème II étant obtenue pour un système de courbes donné, je montre comment on l'étend à une infinité d'autres systèmes, déduits du premier au moyen d'une transformation bien connue due à M. W. Roberts.

2. J'applique les résultats généraux que je viens d'indiquer à une classe assez étendue de courbes, dont l'équation commune contient trois paramètres, et qui comprend un grand nombre de courbes connues. Je démontre enfin que le problème I n'admet généralement pas de solution dans les deux cas suivants : lorsque la force est dirigée vers un point fixe et est fonction de la distance du point mobile à ce point fixe; lorsque la force est parallèle à une direction fixe et fonction de la distance du point mobile à une droite fixe. Il n'y a d'exception à cette règle générale que dans les deux cas d'une force constante en grandeur, direction et sens, et d'une force centrale proportionnelle à la distance. Dans ces deux cas particulièrement intéressants, qui seuls avaient été traités antérieurement,

le premier par Saladini ([1]), le second par M. O. Bonnet ([2]), je retrouve le résultat déjà connu, à savoir une *lemniscate de Bernoulli* ayant pour centre le point de départ O.

3. Bien que les questions traitées dans le présent travail soient essentiellement du ressort de l'Analyse, je dois signaler la place importante qu'y occupent les considérations géométriques. Déjà Fuss ([3]), en 1815, reprenant le problème posé et résolu, au moyen du calcul, par Saladini, y avait découvert d'ingénieuses relations géométriques qui lui avaient permis d'en simplifier la solution. Plus tard, M. Rispal ([4]) étendit la solution de Fuss au cas plus général traité analytiquement par M. Ossian Bonnet. C'est en m'inspirant du procédé imaginé par Fuss, et en le généralisant, que j'ai été conduit au but dans les recherches que je vais exposer ici.

Avant d'aborder l'objet principal de ce Mémoire, je vais entrer dans quelques détails sur certains systèmes de *courbes synchrones* dont j'aurai à faire usage.

DES COURBES SYNCHRONES.

4. *Définition des courbes synchrones.* — Considérons, dans un plan, une série de courbes ayant un point O commun et définies par une même équation contenant un paramètre variable, ou par une même équation différentielle du premier ordre. *Le lieu des positions simultanées de points mobiles, de même masse, partant au même instant du point* O, *avec la même vitesse, et décrivant les courbes considérées sous l'action de forces dérivant d'un même potentiel, est ce que l'on appelle une courbe synchrone* ([5]). Ces courbes synchrones dépendant d'un paramètre va-

---

([1]) *Memorie dell'Instituto nazionale Italiano,* t. I, parte II (année 1804).

([2]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. IX, p. 116 (année 1844).

([3]) *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg,* t. IX, p. 91.

([4]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. XII, p. 225 (année 1847). M. Resal s'est également occupé de ces questions. — *Mémoires de la Société d'Émulation du Doubs.* 3e série, t. III (année 1857). — *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3e série, t. I, p. 481 (année 1882).

([5]) Les courbes synchrones ont été imaginées et étudiées pour la première fois par Jean Bernoulli (*Acta Eruditorum,* année 1697, p. 206).

riable, qui n'est autre que le temps, forment elles-mêmes un système que l'on peut appeler *conjugué* du système des courbes données. Nous n'aurons besoin d'envisager ici que le cas où le système donné est un faisceau de droites issues d'un même point O. La marche à suivre pour obtenir le système de courbes synchrones conjugué de ce faisceau, relativement à un potentiel donné, est très simple.

5. *Courbes synchrones conjuguées d'un faisceau de droites pour un potentiel donné.* — Prenons dans le plan un système d'axes de coordonnées rectangulaires OX, OY ayant pour origine le point O, et désignons respectivement par r et θ le rayon vecteur OM d'un point M quelconque et l'angle XOM de ce rayon vecteur avec OX. En appelant v_0 la vitesse initiale avec laquelle partent du point O les divers mobiles, dont les masses égales peuvent être supposées égales à l'unité, et $V \equiv -\frac{1}{2}f(r, \theta)$ le potentiel des forces qui agissent sur ces mobiles, on a, d'après le théorème de la force vive,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - v_0^2 = f(r, \theta) - f(o, \theta). \tag{1}$$

On en tire

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - f(o, \theta) + f(r, \theta)}}$$

et, par suite,

$$t = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - f(o, \theta) + f(r, \theta)}}, \tag{2}$$

le temps t ayant pour origine l'instant où les mobiles partent du point O. L'équation (2), une fois la quadrature effectuée, sera l'équation du système des courbes synchrones cherchées.

Nous allons, comme exemple, déterminer les courbes synchrones dans deux cas simples que nous aurons à utiliser plus loin.

6. *Courbes synchrones dans le cas de la pesanteur.* — L'axe OX étant supposé vertical et son sens positif de haut en bas, on a

$$\tfrac{1}{2}f(r, \theta) \equiv gr\cos\theta.$$

La formule (2) donne alors

$$t = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 + 2gr\cos\theta}} = \frac{1}{g\cos\theta}\left(\sqrt{v_0^2 + 2gr\cos\theta} - v_0\right);$$

d'où l'on tire, pour l'équation du système des courbes synchrones,

$$(3) \qquad r = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2 \cos\theta.$$

Ce sont, comme on le reconnaît immédiatement, des *limaçons de Pascal*, ayant pour point double le point O et pour axe de symétrie l'axe polaire. Ces limaçons deviennent des cercles tangents en O lorsque la vitesse initiale v_0 est nulle.

On obtient l'équation (3) sans intégration, en remarquant que le mouvement de chaque mobile sur une droite OU, inclinée de l'angle θ sur OX, se fait avec une accélération constante, égale à $g\cos\theta$.

7. *Courbes synchrones dans le cas de forces dirigées vers un point fixe et proportionnelles aux distances des points mobiles à ce point fixe.* — Il serait encore facile, dans ce cas, d'appliquer la formule (2). Mais on arrive plus simplement au résultat de la manière suivante.

Soit C le centre d'action situé sur OX, à une distance $OC = a$, μ^2 l'accélération que subit un mobile à l'unité de distance de C (¹). Sur la droite OU, que doit parcourir l'un des mobiles M, projetons le point C en K. La composante suivant OU de l'accélération $\mu^2 MC$ du point M est évidemment

$$\mu^2 MK = \mu^2 (OK - OM) = \mu^2 (a\cos\theta - r).$$

L'équation différentielle du mouvement du point M sur OU est par suite

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \mu^2 (a\cos\theta - r).$$

(¹) Nous supposons l'action du point C attractive. On raisonnerait d'une manière analogue dans le cas de forces répulsives.

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{d^2(r - a\cos\theta)}{dt^2} + \mu^2(r - a\cos\theta) = 0.$$

Son intégrale est de la forme

$$r - a\cos\theta = \alpha\cos\mu t + \beta\sin\mu t.$$

En exprimant que, pour $t = 0$, on a $r = 0$, $\frac{dr}{dt} = v_0$, on trouve

$$\alpha = -a\cos\theta, \qquad \beta = \frac{v_0}{\mu}.$$

En substituant ces valeurs dans l'intégrale, on a l'équation du système des courbes synchrones, qui est par suite

$$(4) \qquad r = \frac{v_0}{\mu}\sin\mu t + a(1 - \cos\mu t)\sin\theta.$$

De même que dans le cas de la pesanteur, qui n'est d'ailleurs que la limite du cas actuellement considéré, les courbes synchrones trouvées sont des *limaçons de Pascal* ayant O pour point double et OX pour axe de symétrie. Ces limaçons se réduisent encore à des cercles tangents en O lorsque v_0 est nul.

Le résultat est le même, et l'on y parvient aussi aisément, dans le cas où l'action du point C est supposée répulsive. L'équation du système des courbes synchrones est alors

$$(5) \qquad r = v_0\frac{e^{\mu t} - e^{-\mu t}}{2\mu} + a\left(1 - \frac{e^{\mu t} + e^{-\mu t}}{2}\right)\cos\theta.$$

PROBLÈME I.

8. *Propriété relative aux courbes* (C) *et aux courbes synchrones correspondant à un même potentiel.* — Supposons qu'on ait obtenu, en intégrant l'équation (2) ou par tout autre procédé, les courbes *synchrones* relatives à des mobiles de même masse, partant ensemble du point O, avec

la vitesse v_0, et parcourant des droites divergentes sous l'action de forces dérivant du potentiel V. Soient A et B [1] deux points infiniment voisins d'une quelconque des courbes (C) qu'atteint respectivement le mobile qui la décrit au bout des intervalles de temps t et $t+dt$. Deux mobiles M et M′, de même masse, partant au même instant de O, avec la vitesse v_0, et décrivant l'un la courbe (C), l'autre la droite OB, doivent arriver en même temps en B. D'ailleurs, au moment où M est en A, M′ est en D à l'intersection de OB et de la courbe synchrone (S) qui passe par le point A. Par suite, les deux mobiles parcourent respectivement AB et DB dans le même élément de temps dt. D'autre part, ils arrivent en B avec la même vitesse v, en vertu du théorème de la force vive, puisqu'ils sont soumis au même potentiel. On a donc, aux infiniment petits du second ordre près,

$$AB = DB = v\,dt$$

et, par suite, dans le triangle isoscèle ABD,

$$\widehat{ABD} = \pi - 2\widehat{ADB}$$

ou bien

$$\pi + \widehat{ABD} = 2\left(\pi - \widehat{ADB}\right) = 2\widehat{ODA}.$$

De là on conclut, à la limite, lorsque B vient se confondre avec A,

$$\pi + \widehat{OAT} = 2\widehat{OAU}, \tag{6}$$

AT et AU étant les tangentes à (C) et à (S) dirigées en sens inverse de celui où l'angle polaire $\widehat{AOX}$ croît.

Telle est la relation très simple qui lie les angles formés par un rayon vecteur quelconque avec les tangentes, en un même point, à la courbe (C) et à la courbe synchrone qui y passent.

9. *Propriété réciproque.* — Inversement, si une courbe (C), passant

---

[1] Nous laissons au lecteur le soin de faire les figures, qui sont d'une extrême simplicité.

par le point O, satisfait, par rapport à un système de courbes synchrones conjuguées d'un faisceau de droites issues de O, à la condition exprimée par la relation (6), un mobile animé d'une vitesse initiale convenablement choisie (¹) et soumis au potentiel correspondant aux courbes synchrones considérées parcourra, à partir de l'origine O, un arc quelconque de la courbe (C), dans le même temps qu'il mettrait à décrire la corde correspondante.

En effet, de la relation (6) on conclut immédiatement, par une marche inverse de celle que nous avons suivie dans la démonstration précédente,

$$\mathrm{AB} = \mathrm{DB}$$

aux infiniment petits du second ordre près. Mais le mobile, en vertu du théorème de la force vive, arrivant avec une même vitesse v en B, soit par l'arc, soit par la corde, le temps élémentaire $\frac{\mathrm{AB}}{v}$ employé à décrire l'arc AB est égal, aux infiniment petits du second ordre près, au temps $\frac{\mathrm{DB}}{v}$ employé à décrire le segment de corde DB. Le temps total employé par le mobile à parcourir l'arc OB sera, par suite, égal au temps qu'il mettra à parcourir la corde OB, s'il décrit l'arc OA dans le même temps que le segment de corde OD, c'est-à-dire que la corde OA, puisque les points A et D appartiennent à une même courbe synchrone. Ainsi les temps employés par le mobile à parcourir l'arc OB et la corde OB seront égaux s'il en est de même des temps employés à parcourir l'arc OA et la corde OA.

Or, en continuant ce raisonnement, on arrive à un arc et à une corde infiniment petits, qui sont égaux au troisième ordre près et qui, étant parcourus avec la même vitesse, sont décrits dans le même temps. Donc la courbe (C) satisfait bien aux conditions du problème I, pour le potentiel qui correspond aux courbes synchrones considérées.

10. *Relation analytique entre les courbes* (C) *et les courbes synchrones*

(¹) On verra plus loin que cette vitesse doit être nulle.

pour un même potentiel. — Nous venons de démontrer le théorème suivant :

Étant donné, pour un certain potentiel, un système de courbes synchrones conjuguées d'un faisceau de droites issues d'un même point O, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe* (C), *passant par le point* O, *soit parcourue, sous l'action de la force dérivant du même potentiel, suivant la loi indiquée dans l'énoncé du problème I, est que l'on ait, en un point quelconque* M *de* (C), *entre les angles* ω *et* ε *formés par* OM *avec les tangentes en* M *à* (C) *et à la courbe synchrone* (S) *qui y passe, la relation*

$$\pi + \omega = 2\varepsilon. \tag{6}$$

De cette relation on conclut

$$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{tang}2\varepsilon;$$

ou bien, en désignant par ρ et r les rayons vecteurs respectifs de (C) et de (S), par ρ' et r' les dérivées respectives de ρ et r par rapport à θ,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{2\dfrac{r}{r'}}{1 - \left(\dfrac{r}{r'}\right)^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$2\frac{\rho'}{\rho} = \frac{r'}{r} - \frac{r}{r'}. \tag{7}$$

Cette relation est fondamentale pour la résolution des deux problèmes qui font l'objet principal du présent travail.

11. *Solution du problème I.* — Supposons que l'on cherche les courbes (C) répondant à un potentiel donné. Ces courbes, d'après l'énoncé du problème I, devant être homothétiques par rapport au point O, leur équation commune sera de la forme

$$\rho = k\varpi(\theta),$$

k désignant un paramètre variable. Par suite et en vertu de la relation (7), l'équation différentielle des courbes synchrones aura la forme

$$\frac{r'}{r} = \chi(\theta),$$

la fonction $\chi(\theta)$ ne contenant pas t. On déduit de là, en intégrant,

$$\mathrm{L}r = \int \chi(\theta)\, d\theta + \mathrm{L}\lambda$$

ou bien

$$r = \lambda e^{\int \chi(\theta)\, d\theta},$$

λ désignant une fonction arbitraire de t.

Le système des courbes synchrones doit donc avoir une équation, telle que

$$(8) \qquad r = \lambda\, \varphi(\theta),$$

c'est-à-dire que ces courbes doivent être *homothétiques*, par rapport à l'origine O, centre d'homothétie.

Il résulte de là, comme on le verra plus loin, que *le problème I n'est pas possible pour toutes les formes de potentiel.* Nous déterminerons en même temps la forme la plus générale de potentiel à laquelle puisse répondre un système de courbes (C) homothétiques par rapport au point O.

Dans le cas où le potentiel conduit, pour les courbes synchrones, à une équation de la forme (8), on en déduit, en vertu de la relation (7), pour l'équation différentielle de la courbe (C),

$$2\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)}\, d\theta - \frac{\varphi(\theta)}{\varphi'(\theta)}\, d\theta\,;$$

d'où, en intégrant,

$$2\,\mathrm{L}\rho = \mathrm{L}\,\varphi(\theta) - \int \frac{\varphi(\theta)}{\varphi'(\theta)}\, d\theta + \mathrm{L}k^2$$

ou bien

$$(9) \qquad \rho^2 = k^2\, \varphi(\theta)\, e^{-\int \frac{\varphi(\theta)}{\varphi'(\theta)}\, d\theta},$$

k désignant une constante arbitraire.

Telle est l'équation du système des courbes (C) satisfaisant à l'énoncé du problème I.

12. *La vitesse initiale doit être nulle.* — De la condition pour les courbes synchrones d'être homothétiques par rapport au point O, il résulte que la vitesse initiale v_0 doit être nulle, pour que le problème I soit possible.

En effet, s'il en était autrement, ces courbes auraient une équation commune de la forme

$$r = v_0 t + \psi(\theta, t)$$

et, par suite, ne seraient pas homothétiques par rapport au point O, à moins que la fonction $\psi(\theta, t)$ ne fût de la forme $t\varpi(\theta)$. Or cette dernière circonstance ne saurait se présenter; car, si $\psi(\theta, t)$ se réduisait à $t\varpi(\theta)$, les droites issues de O seraient parcourues d'un mouvement uniforme; les forces sollicitant les points mobiles sur ces droites seraient, par suite, normales à celles-ci, et la vitesse de tous les points serait constamment égale à v_0. Or cette conclusion impliquerait que $\varpi(\theta)$ fût identiquement nul. Cette condition n'étant pas admissible, il faut que v_0 soit nul.

13. *Théorèmes de Saladini et de M. O. Bonnet sur la lemniscate.* — Comme application de ce qui précède, supposons que les courbes synchrones soient les cercles

$$r = \lambda \cos\theta.$$

L'équation (8) se réduisant à cette dernière, l'équation (9) devient

$$\rho^2 = k^2 \cos\theta \, e^{\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta},$$

c'est-à-dire, en intégrant et simplifiant,

$$\rho^2 = \tfrac{1}{2} k^2 \sin 2\theta.$$

On reconnaît là l'équation d'une *lemniscate de Bernoulli* ayant pour centre le pôle O et pour axe transverse la droite inclinée à 45° sur l'axe polaire.

Or nous avons trouvé plus haut (nos 6 et 7) un faisceau de cercles tangents, comme système de courbes synchrones, dans les deux cas remarquables de mobiles partant du point O, sans vitesse initiale et soumis soit à une force constante parallèle à OX, soit à une force centrale proportionnelle à la distance à un centre fixe situé sur OX. Nous retrouvons ainsi comme cas très particuliers du problème I les élégantes propriétés de la lemniscate découvertes par Saladini et par M. O. Bonnet.

14. *Remarques sur certaines solutions étrangères.* — Les courbes (C) données par l'équation (9) ne répondront aux conditions du problème I qu'autant qu'elles passeront par l'origine O, c'est-à-dire que ρ s'annulera pour une certaine valeur de θ. La démonstration que nous avons donnée plus haut (n° 9) de la relation fondamentale qui conduit à l'équation (9) repose, en effet, sur cette hypothèse.

Nous allons montrer, par un exemple simple, que la méthode indiquée précédemment pour la solution du problème I peut quelquefois conduire à des courbes ne passant pas par le point O et devant, par suite, être écartées comme ne convenant pas à la question.

Supposons

$$f(r,\theta) \equiv \frac{r}{\cos\theta}.$$

La formule (2) donne, pour les courbes synchrones correspondant au potentiel $V \equiv -\frac{r}{2\cos\theta}$, dans l'hypothèse d'une vitesse initiale nulle,

$$t = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{r}{\cos\theta}}} = 2\cos\theta\sqrt{\frac{r}{\cos\theta}}.$$

L'équation des courbes synchrones peut, par suite, se mettre sous la forme

$$r = \frac{\lambda}{\cos\theta}.$$

En faisant $\varphi(\theta) \equiv \frac{1}{\cos\theta}$ dans l'équation (9) qui donne les courbes (C), quand elles existent, on obtient

$$\rho^2 = \frac{k^2}{\cos\theta} e^{-\int \cot\theta \, d\theta};$$

d'où, en intégrant et simplifiant,

$$\rho^2 = \frac{k^2}{\sin\theta\cos\theta}.$$

Les courbes définies par cette équation sont des hyperboles équilatères asymptotes à OX et à la perpendiculaire à OX menée par le point O. Ces courbes, ne passant pas par le point O, ne répondent pas aux conditions du problème.

PROBLÈME II.

15. *Recherche du potentiel correspondant à un système de courbes* (C) *donné.* — Nous allons maintenant nous occuper du problème inverse de celui que nous avons traité dans les paragraphes précédents. Ce second problème, de même que le premier, n'étant possible qu'autant que la vitesse initiale est nulle (n° **12**), son énoncé se trouve ramené aux termes suivants :

Étant donné un système de courbes planes (C) *homothétiques par rapport à un point* O *et passant par ce point, quel est le potentiel dont doit dériver la force appliquée à un point matériel mobile, pour que, sous l'action de cette force, ce point partant de* O, *sans vitesse, décrive un arc quelconque d'une quelconque des courbes* (C), *dans le même temps qu'il mettrait à décrire la corde correspondante?*

Nous décomposerons la solution de cette question en deux parties : nous déterminerons d'abord le système de courbes synchrones conjugué du faisceau des droites issues du point O, qui correspond au potentiel inconnu. Cela fait, nous chercherons ce potentiel.

16. *Détermination des courbes synchrones correspondant à un système de courbes* (C) *donné.* — La relation (7) peut s'écrire

$$(7) \qquad \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\rho'}{\rho}\frac{r'}{r} - 1 = 0.$$

Si

$$\rho = k\varpi(\theta)$$

est l'équation du système des courbes (C), on aura, pour l'équation différentielle des courbes synchrones,

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\varpi'(\theta)}{\varpi(\theta)}\frac{r'}{r} - 1 = 0.$$

On en tire, après avoir résolu par rapport à $\frac{r'}{r}$,

$$\frac{dr}{r} = \frac{\varpi'(\theta)}{\varpi(\theta)}d\theta \pm \sqrt{\left[\frac{\varpi'(\theta)}{\varpi(\theta)}\right]^2 + 1}\,d\theta;$$

d'où, en intégrant,

$$\mathrm{L}r = \mathrm{L}\varpi(\theta) \pm \int\sqrt{\left[\frac{\varpi'(\theta)}{\varpi(\theta)}\right]^2 + 1}\,d\theta + \mathrm{L}\lambda$$

ou bien

$$r = \lambda\varpi(\theta)e^{\pm\int\sqrt{\left[\frac{\varpi'(\theta)}{\varpi(\theta)}\right]^2+1}\,d\theta},$$

λ désignant un paramètre arbitraire, fonction du temps t.

Il est facile de voir que le signe (—) devant le radical est le seul qui convienne. En effet, en conservant aux angles ω et ε la signification que nous leur avons donnée précédemment (n° **10**), on peut écrire la relation (7) sous la forme

$$\cot^2\varepsilon - 2\cot\omega\cot\varepsilon - 1 = 0.$$

Les racines de cette équation en $\cot\varepsilon$

$$\cot\varepsilon = \cot\omega \pm \sqrt{\cot^2\omega + 1}$$

sont, comme on le sait, égales, celle qui correspond au signe (+) à $\cot\frac{\omega}{2}$, celle qui correspond au signe (—) à $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}\right)$. Or, d'après la relation (6), l'angle ε que nous avons à considérer en ce moment est égal à $\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}$; il faut donc prendre le signe (—) devant le radical et, par suite, devant le signe $\int$.

L'équation des courbes synchrones cherchées est en conséquence

$$(10)\qquad r = \lambda\varpi(\theta)\, e^{-\int\sqrt{\left[\frac{\varpi'(\theta)}{\varpi(\theta)}\right]^2+1}\,d\theta}.$$

Leur détermination complète ne dépend, comme on le voit, que d'une quadrature.

17. *Détermination du potentiel capable d'un système de courbes synchrones déterminé.* — Pour achever de résoudre le problème II, nous sommes amenés à chercher le potentiel qui correspond au système de courbes synchrones défini par l'équation (10).

Le temps t n'entrant dans l'équation (10) que par λ, qui en est une fonction arbitraire, nous pouvons supposer cette équation résolue par rapport à t. On en déduit

$$(11)\qquad t = \chi(u),$$

en désignant par χ une fonction arbitraire et posant, pour abréger l'écriture,

$$(12)\qquad u = \frac{r}{\varphi(\theta)},$$

$$(13)\qquad \varphi(\theta) = \varpi(\theta)\, e^{-\int\sqrt{\left[\frac{\varpi'(\theta)}{\varpi(\theta)}\right]^2+1}\,d\theta}.$$

De l'équation (11) on tire, en tenant compte de (12),

$$(14)\qquad \frac{dt}{dr} = \frac{\partial\chi}{\partial u}\,\frac{1}{\varphi(\theta)}.$$

Mais $\frac{\partial\chi}{\partial u}$ est comme χ une fonction de u, qui peut être choisie arbitrairement. Nous pouvons par suite poser

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)^2} = -\tfrac{1}{2}\psi(u),$$

ψ désignant une fonction arbitraire, satisfaisant toutefois à la condition d'être nulle pour $u = 0$, c'est-à-dire pour $r = 0$, afin que la vitesse au point O soit nulle.

De (14) on déduit, en conséquence,

$$\frac{dr}{dt} = \varphi(\theta)\sqrt{-\tfrac{1}{2}\psi\left[\frac{r}{\varphi(\theta)}\right]},$$

et, en transportant cette expression dans l'équation (1) de la force vive, on en conclut, pour l'expression du potentiel cherché,

$$(15) \qquad V = -\tfrac{1}{2}f(r,\theta) = \psi\left[\frac{r}{\varphi(\theta)}\right]\varphi^2(\theta) + C,$$

C désignant une constante arbitraire, que l'on peut d'ailleurs supposer nulle, sans restreindre la généralité de la solution.

Le problème II se trouve ainsi complètement résolu. On voit que *le potentiel répondant à un système de courbes* (C) *donné dépend d'une fonction arbitraire*. Dans le cas où les courbes (C) sont des lemniscates, par exemple, il existe une infinité de formes de potentiel dont nous donnerons plus loin l'expression générale, et dont les solutions, dues à Saladini et à M. Bonnet, ne sont que les cas particuliers les plus simples en même temps que les plus marquants.

De l'analyse qui précède, nous concluons encore que *le problème I traité précédemment n'est possible que dans le cas où l'expression du potentiel donné est de la forme* (15).

18. *Détermination de la force.* — Nous allons maintenant déduire de l'expression (15) du potentiel la force qui répond aux conditions du problème I. Nous déterminerons cette force par son intensité F et par son inclinaison i sur OX. Cherchons pour cela les composantes X et Y de F suivant les directions rectangulaires OX et OY. Ces composantes, comme on le sait, sont respectivement égales aux dérivées partielles V'_x, V'_y du potentiel V. On a d'ailleurs

$$(16) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

et, par suite,

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

De ces dernières formules on déduit, en différentiant,

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{y}{r^2}, \qquad \frac{d\theta}{dy} = \frac{x}{r^2}.$$

On a, d'autre part, en prenant le logarithme népérien du potentiel (15)

$$\mathrm{LV} = \mathrm{L}\psi\left[\frac{r}{\varphi(\theta)}\right] + 2\mathrm{L}\varphi(\theta) + \mathrm{LC}.$$

On en tire, en prenant les dérivées des deux membres successivement par rapport à x et par rapport à y,

$$\frac{\mathrm{V}'_x}{\mathrm{V}} = \frac{\frac{x}{r}\varphi + \frac{y}{r}\varphi'}{\varphi^2}\frac{\psi'}{\psi} - \frac{2y}{r^2}\frac{\varphi'}{\varphi},$$

$$\frac{\mathrm{V}'_y}{\mathrm{V}} = \frac{\frac{y}{r}\varphi - \frac{x}{r}\varphi'}{\varphi^2}\frac{\psi'}{\psi} + \frac{2x}{r^2}\frac{\varphi'}{\varphi};$$

par suite,

$$\mathrm{X} = \mathrm{V}'_x = \left(\frac{x}{r}\varphi + \frac{y}{r}\varphi'\right)\psi' - 2\frac{y}{r^2}\varphi\varphi'\psi,$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{V}'_y = \left(\frac{y}{r}\varphi - \frac{x}{r}\varphi'\right)\psi' + 2\frac{x}{r^2}\varphi\varphi'\psi.$$

De là on conclut

$$\mathrm{F}^2 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = (\varphi^2 + \varphi'^2)\psi'^2 - 4\frac{1}{r}\varphi\varphi'^2\psi\psi' + 4\frac{1}{r^2}\varphi^2\varphi'^2\psi^2,$$

ce qui peut s'écrire

$$(17) \qquad \mathrm{F}^2 = \varphi^2\psi'^2 + \varphi'^2\left(\psi' - 2\frac{1}{r}\varphi\psi\right)^2.$$

On a, d'autre part,

$$\operatorname{tang} i = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} = \frac{(y\varphi - x\varphi')r\psi' + 2x\varphi\varphi'\psi}{(x\varphi + y\varphi')r\psi' - 2y\varphi\varphi'\psi},$$

ou bien, en tenant compte des formules (16),

$$(18) \qquad \operatorname{tang} i = \frac{(\varphi \sin\theta - \varphi' \cos\theta)\, r\psi' + 2\varphi\varphi'\psi \cos\theta}{(\varphi \cos\theta + \varphi' \sin\theta)\, r\psi' - 2\varphi\varphi'\psi \sin\theta}.$$

Les formules (17) et (18) déterminent complètement la force dans les circonstances les plus générales que puisse présenter le problème II.

19. *Cas où l'expression du potentiel est quadratique par rapport à r.* — Suivant le choix que l'on fait de la fonction arbitraire $\psi(u)$ qui entre dans l'expression (15) du potentiel, on aura une solution plus ou moins simple du problème II.

Prenons

$$\psi(u) \equiv \alpha u^2 + \beta u,$$

d'où

$$\psi'(u) \equiv 2\alpha u + \beta.$$

On obtient alors aisément, en substituant les expressions précédentes de ψ et de ψ' dans les formules (15), (17) et (18),

$$(19) \qquad V_1 \equiv \alpha r^2 + \beta r \varphi(\theta),$$

$$(20) \qquad F_1^2 \equiv 4\alpha^2 r^2 + 4\alpha\beta r \varphi(\theta) + \beta^2[\varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta)],$$

$$(21) \qquad \operatorname{tang} i_1 \equiv \frac{[2\alpha r + \beta\varphi(\theta)]\sin\theta + \beta\varphi'(\theta)\cos\theta}{[2\alpha r + \beta\varphi(\theta)]\cos\theta - \beta\varphi'(\theta)\sin\theta}.$$

Les deux dernières formules donnent lieu à une interprétation géométrique assez élégante. La formule (21) peut s'écrire

$$(22) \qquad \operatorname{tang} i_1 \equiv \frac{\operatorname{tang}\theta + \operatorname{tang}\eta}{1 - \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\eta},$$

en posant

$$\operatorname{tang}\eta \equiv \frac{\dfrac{\beta}{2\alpha}\varphi'(\theta)}{\dfrac{\beta}{2\alpha}\varphi(\theta) + r}.$$

Cela fait, sur la droite OU, inclinée de l'angle θ sur OX, prenons

$$\mathrm{OH} = -\frac{\beta}{2\alpha}\varphi(\theta),$$

et, sur la perpendiculaire en H à OU, portons

$$\mathrm{HI} = -\frac{\beta}{2\alpha}\varphi'(\theta),$$

du côté où les angles polaires croissent, si cette dernière expression est positive, du côté opposé dans le cas contraire ([1]). L'angle τ_1 est alors l'angle $\widehat{\mathrm{IMU}}$, M étant le point de OU situé à la distance r de O. Entre l'angle i_1 d'inclinaison sur OX de la force F_1 appliquée en M, l'angle τ_1 construit comme on vient de le voir et l'angle θ, il existe, en vertu de la formule (22), la relation très simple

$$i_1 = \theta + \tau_1.$$

On en conclut immédiatement que *les forces appliquées aux divers points de la droite* OU, *correspondant à l'angle polaire* θ, *sont dirigés suivant des droites passant par un même point* I.

D'autre part, en remarquant que l'on a

$$\overline{\mathrm{MI}}^2 = \overline{\mathrm{MH}}^2 + \overline{\mathrm{HI}}^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\varphi^2(\theta) + r^2 + \frac{\beta}{\alpha} r\varphi(\theta) + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\varphi'^2(\theta),$$

on conclut de la formule (20)

$$\mathrm{F}_1 = 2\alpha\,\mathrm{MI}.$$

Par conséquent, *les forces appliquées aux divers points* M *de la droite* OU *sont proportionnelles aux distances de ces points au point* I.

Les courbes équipotentielles ont pour équation

$$\alpha r^2 + \beta r\varphi(\theta) = \mathrm{C},$$

C désignant une constante arbitraire. Ce sont, comme on le voit aisément, des *anallagmatiques* qui ont en commun pour *pôle principal d'in-*

([1]) Deux directions répondant à des valeurs de θ différant entre elles d'un multiple de π doivent, en général, au point de vue où l'on se place ici, être considérées comme différentes.

version le point O et pour *déférente* la podaire négative de la courbe

$$r = -\frac{\beta}{2\alpha}\varphi(\theta)$$

prise par rapport au point O.

Il résulte immédiatement des propriétés précédentes que, *dans le cas où l'expression du potentiel a la forme* (19), *les cordes des courbes* (C) *sont parcourues suivant la loi du mouvement pendulaire.*

20. *Cas où l'expression du potentiel est linéaire par rapport à r.* — Une solution encore plus simple, et même la plus simple de toutes les solutions du problème I, est celle qui correspond au cas où la fonction $\psi(u)$ a la forme linéaire βu. Les formules qui conviennent à ce cas se déduisent immédiatement des formules (19), (20) et (21), en y faisant α nul. On obtient ainsi

$$V_2 = \beta r \varphi(\theta), \tag{23}$$

$$F_2^2 = \beta^2[\varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta)], \tag{24}$$

$$\operatorname{tang} i_2 = \frac{\varphi(\theta)\sin\theta + \varphi'(\theta)\cos\theta}{\varphi(\theta)\cos\theta - \varphi'(\theta)\sin\theta}. \tag{25}$$

Les expressions de F_2 et de $\operatorname{tang} i_2$ présentent cette particularité d'être indépendantes de r, de sorte que *la force reste constante en grandeur, direction et sens, lorsque le point d'application se déplace sur une droite* OU *déterminée par une valeur particulière de* θ. Il résulte de là que *les cordes des courbes* (C) *sont décrites d'un mouvement uniformément accéléré.*

La formule (25) peut s'écrire

$$\operatorname{tang} i_2 = \frac{\operatorname{tang}\theta + \dfrac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)}}{1 - \operatorname{tang}\theta\,\dfrac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)}};$$

d'où l'on conclut

$$i_2 = \theta + \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \tag{26}$$

en posant

$$\tang \varepsilon = \frac{\varphi(\theta)}{\varphi'(\theta)},$$

c'est-à-dire en désignant par ε l'angle de la tangente à la courbe synchrone

$$r = \lambda\varphi(\theta)$$

avec le rayon vecteur, cet angle étant évalué suivant la convention généralement adoptée. Mais on a vu précédemment (n° **10**) que l'on a

$$(6) \qquad \pi + \omega = 2\varepsilon,$$

ω désignant l'angle de la tangente à la courbe (C) avec le rayon vecteur. Des relations (6) et (26), on conclut la relation très simple

$$(27) \qquad i_2 = \theta - \frac{\omega}{2}.$$

Les courbes équipotentielles, dans le cas où le potentiel a la forme (23), ont pour équation

$$\rho = \frac{C}{\varphi(\theta)},$$

C désignant un paramètre variable.

On voit que, dans le cas considéré, *les courbes équipotentielles sont les inverses des courbes synchrones par rapport au point* O *pris pour pôle d'inversion.* En se servant de cette propriété et s'appuyant sur ce que la direction de la force, appliquée en chaque point, est normale à la courbe équipotentielle qui y passe, on retrouve aisément la relation (27).

21. *Remarque sur la force agissant au point de départ.* — Les valeurs du potentiel V, de la force F et de $\tang i$, telles que les donnent les formules (15), (17) et (18), pour $r = 0$, dépendront le plus souvent de θ, de sorte qu'au point O le potentiel et la force seront généralement indéterminés. Mais, relativement au problème que l'on a en vue de résoudre, cette indétermination n'est qu'apparente. Il est clair, en effet, que la continuité exige que l'on prenne, pour les valeurs initiales de V, F et tang$i$, celles qui correspondent à $r = 0$ et à la valeur de θ égale à l'angle que fait avec OX la tangente en O à la courbe (C). De même et pour la même raison de continuité, les forces faisant parcourir au mobile les diverses droites issues de O varieront au point de départ O, avec les angles polaires de ces droites, et auront les grandeurs et les inclinaisons données par les formules (17) et (18). Nous allons faire une application simple des théories précédentes, dans laquelle la particularité que nous venons de signaler se présentera.

22. *Application à un système de spirales d'Archimède.* — Supposons que les courbes (C) soient les spirales d'Archimède

$$\rho = k\theta,$$

dépendant du paramètre arbitraire k.

La formule (13) donne alors

$$\varphi(\theta) \equiv \theta e^{-\int \sqrt{1+\frac{1}{\theta^2}}\,d\theta}.$$

Or on a

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{\theta^2}}\,d\theta = \int \frac{\sqrt{\theta^2+1}}{\theta}\,d\theta = \int \frac{\theta\,d\theta}{\sqrt{\theta^2+1}} + \int \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta^2+1}}$$

$$= \sqrt{\theta^2+1} + \int \frac{\frac{d\theta}{\theta^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{\theta^2}}} = \sqrt{\theta^2+1} - \mathrm{L}\left[\frac{1}{\theta} + \sqrt{1+\frac{1}{\theta^2}}\right].$$

Par suite,

$$\varphi(\theta) \equiv \theta\left(\frac{1}{\theta} + \sqrt{1+\frac{1}{\theta^2}}\right)e^{-\sqrt{\theta^2+1}} \equiv \left(1+\sqrt{\theta^2+1}\right)e^{-\sqrt{\theta^2+1}}.$$

On conclut de là, d'après la formule (15), pour l'expression générale du potentiel cherché,

$$\mathrm{V} \equiv \psi\left(\frac{r e^{\sqrt{\theta^2+1}}}{1+\sqrt{\theta^2+1}}\right)\frac{\left(1+\sqrt{\theta^2+1}\right)^2}{e^{\theta^2+1}}.$$

On déduirait facilement des formules (17) et (18) l'expression de la force F qui dérive de ce potentiel et son inclinaison sur OX. En se bornant au cas où la fonction $\psi(u)$ est de la forme βu, on trouve, par des calculs très simples,

$$F^2 = \beta^2 k^2 \frac{\theta^2 + 1 + \sqrt{\theta^2 + 1}}{e^{\theta^2}},$$

$$\operatorname{tang} i = \frac{(1 + \sqrt{\theta^2 + 1}) \operatorname{tang} \theta - \theta}{1 + \sqrt{\theta^2 + 1} + \theta \operatorname{tang} \theta}.$$

D'après ces dernières formules, la grandeur et la direction de la force semblent indéterminées au point O, puisque F et $\operatorname{tang} i$ dépendent de θ. Mais, si l'on considère un mobile décrivant une des spirales sous l'action de cette force, il est clair que sa grandeur et son inclinaison, pour la position initiale du mobile en O, s'obtiennent en faisant, dans les formules, $\theta = 0$, ce qui donne $F = \beta k \sqrt{2}$ et $i = 0$.

En un même point d'une droite quelconque OU passant par le pôle O, il existe une infinité de forces déterminées par les dernières formules. Ces forces résultent des diverses valeurs de θ comprises dans la formule $2n\pi + \gamma$, n désignant un entier quelconque, positif ou négatif, et γ le plus petit angle positif formé par OU avec OX. Mais, pour le problème dont nous avons à nous occuper ici, cette indétermination disparaît : la force appliquée en un point M de la spirale, ou du rayon vecteur OM qui y aboutit, est la force unique et bien déterminée qui répond à l'angle polaire également bien déterminé du point M.

25. *Application au problème II de la transformation de M. W. Roberts.* — Étant donnée une courbe rapportée à des coordonnées polaires et définie par une équation telle que

$$f(\rho, \theta) = 0,$$

si l'on remplace, dans cette équation, r par r_1^n et θ par $n\theta_1$, n désignant un nombre positif quelconque, mais commensurable, on obtient une nouvelle courbe

$$f(\rho_1^n, n\theta_1) = 0,$$

transformée de la première et jouissant de cette propriété remarquable et bien connue, signalée pour la première fois par M. W. Roberts, à qui est due cette transformation, qu'en l'un quelconque de ses points, la tangente fait, avec le rayon vecteur qui y aboutit, un angle égal à l'angle homologue formé au point correspondant de la première courbe.

Par suite, si l'on applique simultanément la transformation de M. W. Roberts à un système de courbes synchrones (S) et à un système de courbes (C) correspondant l'un et l'autre à un même potentiel, on obtiendra deux nouveaux systèmes de courbes (S_1) et (C_1) qui jouiront des propriétés suivantes : 1° les courbes (S_1) et (C_1) seront respectivement, comme les courbes (S) et (C), homothétiques deux à deux par rapport à l'origine O, considérée comme centre d'homothétie; 2° les courbes (C_1), de même que les courbes (C), passeront par le point O; 3° entre les angles ω_1 et ε_1, formés respectivement en un même point M_1 par OM_1 avec les tangentes en ce point à la courbe (C_1) et à la courbe (S_1) qui y passent, on aura la relation

$$\pi + \omega_1 = 2\varepsilon_1.$$

Les deux premières propriétés s'aperçoivent immédiatement. Quant à la troisième, elle résulte de la relation analogue (6) qui existe entre les courbes (S) et (C), et que nous avons établie précédemment (n^{os} 8 et 9), et de la propriété de conserver les angles, que possède la transformation de M. W. Roberts.

24. *Potentiel correspondant aux courbes transformées.* — Des conditions remplies par les systèmes de courbes transformées (S_1) et (C_1), résulte immédiatement la solution du problème II pour les courbes (C_1).

Soit

$$\rho = k\varpi(\theta)$$

l'équation du système des courbes (C). La transformation indiquée plus haut donne, pour équation du système des courbes (C_1),

$$\rho_1 = k^{\frac{1}{n}}\varpi^{\frac{1}{n}}(n\theta_1).$$

Or l'analyse développée précédemment (nos **16** et **17**) est applicable, ainsi que les formules qui en sont résultées, à cette dernière équation. On en conclut, en vertu de la formule (15), pour l'expression générale du potentiel qui correspond aux courbes (C_1),

$$V = \psi\left[\frac{r_1}{\varphi(\theta_1)}\right]\varphi^2(\theta_1),$$

en désignant par ψ une fonction arbitraire et posant, d'après la formule (13),

$$\varphi(\theta_1) = \varpi^{\frac{1}{n}}(n\theta_1)e^{-\int\sqrt{\left[\frac{\varpi'(n\theta_1)}{\varpi(n\theta_1)}\right]^{\frac{2}{n}}+1}\,d\theta_1}.$$

On voit ainsi qu'en résolvant le problème II pour le système des courbes (C), on le résout en même temps pour l'un quelconque de ceux qu'on en déduit par la transformation de M. W. Roberts. Seulement la quadrature, dont dépend la solution, sera plus ou moins facile à effectuer suivant la valeur attribuée à n.

Nous allons appliquer les résultats généraux obtenus dans les paragraphes précédents à une classe intéressante de courbes qui se transforment les unes dans les autres par le mode de transformation que nous venons de rappeler.

SOLUTION DU PROBLÈME II POUR UNE CLASSE ASSEZ ÉTENDUE DE COURBES.

25. *Courbes définies par l'équation* $\rho^n = k^n \sin n\theta$. — Les courbes définies, en coordonnées polaires, par une équation de la forme

$$(28) \qquad \rho^n = k^n \sin n\theta,$$

possèdent un grand nombre de propriétés géométriques et mécaniques remarquables, qui ont fait l'objet des recherches de plusieurs géomètres [1],

[1] *Voir*, au sujet de ces courbes, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XV, p. 97, une Notice intéressante de M. Haton de la Goupillière. — *Voir* également, sur le même sujet, une Note plus récente de M. Bassani, dans le *Journal de Battaglini*, t. XXIV, p. 23.

parmi lesquels on doit notamment citer Maclaurin, Euler, L'Hôpital, Fagnano, Riccati, Lamé, Serret, MM. O. Bonnet, Halphen, Haton de la Goupillière, W. Roberts [1]. Cette classe de courbes comprend, d'ailleurs, quelques types plus particulièrement connus, pour leurs propriétés, et notamment la *lemniscate de Bernoulli,* le *cercle,* la *cardioïde,* la *parabole,* la *ligne droite*, l'*hyperbole équilatère,* que l'on obtient respectivement, en donnant à n, dans l'équation (28), les valeurs 2, 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, -1, -2. Nous allons appliquer à celles de ces courbes, pour lesquelles n est positif et qui passent, en conséquence, par l'origine O, la solution générale du problème II que nous avons développée précédemment. La quadrature, dont dépend cette solution, s'effectue alors d'une manière très simple et conduit à des résultats qui nous ont paru mériter d'être signalés.

26. *Application de la solution générale du problème II.* — La formule (13), appliquée aux courbes (28), donne immédiatement

$$\varphi(\theta) = \sin^{\frac{1}{n}} n\theta \, e^{\int \frac{d\theta}{\sin n\theta}}.$$

Or on a

$$\int \frac{d\theta}{\sin n\theta} = \frac{1}{n}\int \frac{\dfrac{d\frac{n\theta}{2}}{\cos^2\frac{n\theta}{2}}}{\tang\frac{n\theta}{2}} = \frac{1}{n}\,\mathrm{L}\,\tang\frac{n\theta}{2} = \mathrm{L}\,\tang^{\frac{1}{n}}\frac{n\theta}{2}.$$

Par suite,

$$\varphi(\theta) = 2^{\frac{1}{n}}\cos^{\frac{2}{n}}\frac{n\theta}{2}.$$

En conséquence, le potentiel donné par la formule (15) aura pour expression générale

$$\mathrm{V} = \psi\left(\frac{r}{\cos^{\frac{2}{n}}\frac{n\theta}{2}}\right)\cos^{\frac{1}{n}}\frac{n\theta}{2}, \tag{29}$$

ψ désignant toujours une fonction arbitraire.

---

[1] M. Humbert, dans un travail encore inédit, a également rencontré quelques propriétés nouvelles de ces courbes.

L'équation des courbes synchrones relatives à ce potentiel est, d'ailleurs,

$$(30) \qquad r^{\frac{n}{2}} = \lambda^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\theta}{2}.$$

27. *Autre méthode.* — L'équation, que nous venons de trouver, des courbes synchrones peut se déduire d'une manière un peu plus directe de l'équation (28), grâce à une propriété connue de la tangente à la courbe définie par cette équation. On a effectivement, pour la tangente AT en un point quelconque A de cette courbe,

$$\operatorname{tang} \widehat{OAT} = \frac{\rho\, d\theta}{d\rho} = \operatorname{tang} n\theta\,;$$

par conséquent

$$\widehat{OAT} = \nu\pi + n\theta,$$

ν désignant un entier, positif ou négatif, choisi de manière que l'angle $\widehat{OAU}$ soit compris entre zéro et π.

En remplaçant, dans la relation (6) [n° 8], $\widehat{OAT}$ par son expression que nous venons de trouver, on obtient

$$\widehat{OAU} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{OAT}}{2} = (2\nu + 1)\frac{\pi}{2} + \frac{n\theta}{2},$$

AU étant la tangente en A à la courbe synchrone qui y passe. On en conclut

$$\operatorname{tang} \widehat{OAU} = -\cot \frac{n\theta}{2}.$$

Mais on a

$$\operatorname{tang} \widehat{OAU} = \frac{r\, d\theta}{dr}.$$

L'équation différentielle des courbes synchrones est, par suite,

$$\frac{r\, d\theta}{dr} = -\cot \frac{n\theta}{2}$$

ou bien

$$\frac{n}{2}\frac{dr}{r} = -\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\cos\frac{n\theta}{2}}d\frac{n\theta}{2};$$

d'où l'on conclut, en intégrant,

$$\mathrm{L}r^{\frac{n}{2}} = \mathrm{L}\cos\frac{n\theta}{2} + \text{const}.$$

et, par suite,

$$r^{\frac{n}{2}} = \lambda^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\theta}{2}, \tag{30}$$

λ désignant une constante arbitraire. Ayant ainsi trouvé l'équation (30) des courbes synchrones, on en conclut immédiatement, au moyen de la formule (15), l'expression (29) du potentiel cherché.

Il est à remarquer que les courbes synchrones définies par l'équation (30) appartiennent à la famille des courbes (28). On reconnaît en effet facilement que, si l'on fait tourner l'axe polaire de l'angle $-\frac{\pi}{n}$, l'équation (30) se change en

$$r^{\frac{n}{2}} = \lambda^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\theta}{2}.$$

28. *Généralisation par application du problème I.* — Avant de pousser plus loin l'étude de la solution que nous venons d'obtenir, nous allons l'étendre à une classe de courbes plus générale. Considérons, dans ce but, comme courbes synchrones, celles qui sont définies par l'équation

$$r = \lambda\cos^p m\theta, \tag{31}$$

dans laquelle m et p désignent des nombres positifs quelconques, mais commensurables, et qui se réduit à l'équation (30) dans le cas particulier où $m = \frac{n}{2}$, $p = \frac{2}{n}$. Cherchons *sur quelles courbes, formant un système homothétique, doit se mouvoir un mobile partant de* O, *sans vitesse ini-*

tiale, pour que, sous l'influence du potentiel capable du système des courbes synchrones (31), *il décrive à partir du point* O *un arc quelconque de ces courbes, dans le même temps qu'il mettrait à décrire la corde correspondante*. Il s'agit, comme on le voit, d'appliquer aux courbes (31), considérées comme courbes synchrones, la solution générale du problème I (n° **11**). En posant

$$\varphi(\theta) = \cos^p m\theta,$$

on aura l'équation de la courbe cherchée, en effectuant l'intégration indiquée dans l'équation (9), c'est-à-dire

$$\int \frac{\varphi(\theta)}{\varphi'(\theta)} d\theta = -\frac{1}{mp}\int \cot m\theta\, d\theta = -\frac{1}{m^2 p} \operatorname{L} \sin m\theta + \text{const.};$$

d'où, pour l'équation de la courbe cherchée,

$$(32) \qquad \rho^{2m^2 p} = 2k^{2m^2 p} \sin m\theta \cos^{m^2 p^2} m\theta,$$

k étant un paramètre arbitraire.

L'équation (32), que nous venons de trouver, se réduit d'ailleurs, comme on devait s'y attendre, à l'équation (28) lorsqu'on y fait $m = \frac{n}{2}$, $p = \frac{2}{n}$.

Le potentiel, sous l'action duquel la courbe (32) est décrite dans les conditions du problème I, s'obtient immédiatement au moyen de la formule (15) et de l'équation (31) des courbes synchrones correspondantes. Il a pour expression générale

$$(33) \qquad V = \psi\left(\frac{r}{\cos^p m\theta}\right)\cos^{2p} m\theta.$$

29. *Détermination de la force.* — L'application des formules (17) et (18) (n° **18**) aux courbes définies par l'équation (32) donne immédiatement

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} F^2 &= m^2p^2\sin^2 m\theta\cos^{2p-2}m\theta\left[\frac{2\cos^p m\theta}{r}\psi\left(\frac{r}{\cos^p m\theta}\right)-\psi'\left(\frac{r}{\cos^p m\theta}\right)\right]^2\\ &\quad+\cos^{2p}m\theta\,\psi'^2\left(\frac{r}{\cos^p m\theta}\right)\end{aligned}\right.$$

et

$$(35)\quad \operatorname{tang} i = \frac{(\cos m\theta\sin\theta + mp\sin m\theta\cos\theta)\,r\,\psi' - 2mp\cos^{p-1}m\theta\sin m\theta\cos\theta.\psi}{(\cos m\theta\cos\theta - mp\sin m\theta\sin\theta)\,r\,\psi' + 2mp\cos^{p-1}m\theta\sin m\theta\sin\theta.\psi}.$$

Les formules (33), (34) et (35) deviennent, dans le cas où la fonction $\psi(u)$ est de la forme $\alpha u^2 + \beta u$ (n° **19**),

$$(36)\qquad V_1 = \alpha r^2 + \beta r\cos^p m\theta,$$

$$(37)\quad F_1^2 = 4\alpha^2 r^2 + 4\alpha\beta r\cos^p m\theta + \beta^2(\cos^2 m\theta + m^2p^2\sin^2 m\theta)\cos^{2p-2}m\theta,$$

$$(38)\qquad \operatorname{tang} i_1 = \frac{(2\alpha r + \beta\cos^p m\theta)\sin\theta - mp\beta\cos^{p-1}m\theta\sin m\theta\cos\theta}{(2\alpha r + \beta\cos^p m\theta)\cos\theta + mp\beta\cos^{p-1}m\theta\sin m\theta\sin\theta}.$$

Le point I, qui donne une représentation simple des forces agissant aux divers points d'une droite OU (n° **19**), s'obtient en prenant sur OU

$$OH = -\frac{\beta}{2\alpha}\cos^p m\theta,$$

et, perpendiculairement à OI, dans le sens où les angles polaires croissent,

$$HI = mp\frac{\beta}{2\alpha}\cos^{p-1}m\theta\sin m\theta.$$

Dans le cas de $m = \frac{1}{p} = \frac{n}{2}$, on peut construire le point I plus simplement encore, en remarquant que l'on a alors

$$OH = -\frac{\beta}{2\alpha}\cos^{\frac{2}{n}}\frac{n\theta}{2},\qquad HI = \frac{\beta}{2\alpha}\cos^{\frac{2}{n}-1}\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2};$$

on en conclut

$$OI = a\cos^{\frac{2}{n}-1}\frac{n\theta}{2},\qquad \operatorname{tang}\widehat{UOI} = -\operatorname{tang}\frac{n\theta}{2},$$

en posant, pour abréger,

$$a = -\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Le point I s'obtient, par suite, en portant la longueur $a\cos^{\frac{2}{n}-1}\frac{n\theta}{2}$ sur une droite faisant avec OU, dans le sens des angles polaires décroissants, un angle égal à $\frac{n\theta}{2}$.

Il est facile d'avoir l'équation polaire du lieu du point I. L'angle $\widehat{XOI}$ est en effet égal à $\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta$. En posant

$$\rho_1 = a\cos^{\frac{2}{n}-1}\frac{n\theta}{2}$$

et

$$\theta_1 = \left(\frac{n}{2}-1\right)\theta,$$

on en conclut, par l'élimination de θ, pour l'équation cherchée,

$$\rho_1^{\frac{n}{2-n}} = a^{\frac{n}{2-n}}\cos\frac{n}{2-n}\theta_1.$$

Le lieu du point I est, comme on le voit, de la famille des courbes définies par l'équation (28).

Les courbes équipotentielles ont pour équation

$$\alpha r^2 + \beta r\cos^{\frac{2}{n}}\frac{n}{2}\theta = C,$$

C désignant une constante arbitraire. Ce sont des *anallagmatiques* ayant pour pôle principal d'inversion commun le point O et pour *déférente* commune la podaire négative de la courbe

$$r = -\frac{\beta}{2\alpha}\cos^{\frac{2}{n}}\frac{n}{2}\theta,$$

laquelle est précisément, comme on le voit facilement, la courbe lieu du point I dont l'équation a été obtenue plus haut.

En revenant au cas où m et p sont quelconques et supposant $\alpha = 0$ (nº **20**), on a

$$(39) \qquad V_2 = \beta r \cos^p m\theta,$$

$$(40) \qquad F_2 = \beta \cos^{p-1} m\theta \sqrt{\cos^2 m\theta + m^2 p^2 \sin^2 m\theta},$$

$$(41) \qquad \operatorname{tang} i_2 = \frac{\cos m\theta \sin\theta - mp \sin m\theta \cos\theta}{\cos m\theta \cos\theta + mp \sin m\theta \sin\theta}.$$

Les formules précédentes se simplifient, quand on fait $m = \frac{1}{p} = \frac{n}{2}$. Il est facile de voir ce qu'elles deviennent. On déduit notamment de la formule (41)

$$(42) \qquad i_2 = \left(1 - \frac{n}{2}\right)\theta.$$

Ce dernier résultat s'explique aisément, en s'appuyant sur la construction de la tangente aux courbes équipotentielles, lesquelles ont pour équation

$$(43) \qquad r^{\frac{n}{2}} = \frac{C^{\frac{n}{2}}}{\cos\frac{n}{2}\theta}$$

et appartiennent, par conséquent, à la famille de courbes définies par l'équation (28).

Nous allons appliquer les résultats précédents aux deux cas particulièrement intéressants où l'on a $n = 2$ (lemniscates) et $n = 1$ (cercles).

30. *Cas où les courbes* (C) *sont des lemniscates* ($n = 2$). — De la formule (37), on déduit, en y faisant $m = \frac{1}{p} = 1$,

$$F_1^2 = 4\alpha^2 r^2 + 4\alpha\beta r \cos\theta + \beta^2$$

ou bien

$$F_1^2 = \mu^2 (r^2 - 2ar\cos\theta + a^2),$$

en posant $\frac{\beta}{2\alpha} = -a$.

Or, si l'on considère le point I de OX situé à une distance a de O, on a

$$\overline{\mathrm{MI}}^2 = r^2 - 2ar\cos\theta + a^2,$$

M étant le point d'application de la force F_1 et, par suite,

$$F_1 = 2\alpha\,\mathrm{MI}.$$

D'autre part, l'équation des courbes équipotentielles est alors

$$\alpha r^2 + \beta r\cos\theta = \gamma,$$

ou bien

$$r^2 - 2ar\cos\theta = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ce sont des cercles ayant pour centre commun le point I. Donc la force F est constamment dirigée vers un point fixe I et proportionnelle à la distance de son point d'application à ce point fixe. Nous retrouvons ainsi le théorème de M. Bonnet (n° **15**).

On a vu précédemment (n° **19**) que, dans le cas d'un potentiel quadratique, il existe, quelle que soit la courbe (C), pour chaque droite OU, un point I tel que les forces appliquées aux divers points de OU concourent en I et sont proportionnelles aux distances des points d'application à ce point I. Ce qui distingue spécialement le cas de la lemniscate, c'est que le point I est le même pour toutes les droites OU. Cela résulte de ce que l'on a alors

$$\mathrm{OH} = a\cos\theta, \qquad \mathrm{HI} = -a\sin\theta.$$

En appliquant au cas de la lemniscate les formules (40) et (41), on en déduirait aisément le théorème de Saladini (n° **15**).

La lemniscate peut être décrite, dans les conditions envisagées par Saladini et par M. Bonnet, sous l'action d'une force d'une nature plus générale déterminée par les formules

$$V \equiv \psi\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)\cos^2\theta,$$

$$F^2 \equiv \sin^2\theta\left[\frac{2\cos\theta}{r}\psi\left(\frac{r}{\cos\theta}\right) - \psi'\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)\right]^2 + \cos^2\theta\,\psi'^2\left(\frac{r}{\cos\theta}\right),$$

$$\operatorname{tang} i \equiv \frac{\left[r\psi'\left(\frac{r}{\cos\theta}\right) - \psi\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)\right]\sin 2\theta}{\psi\left(\frac{r}{\cos\theta}\right) + \left[r\psi'\left(\frac{r}{\cos\theta}\right) - \psi\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)\right]\cos 2\theta}.$$

51. *Cas où les courbes* (C) *sont des cercles* ($n = 1$). — L'équation (28), lorsqu'on y fait $n = 1$, devient

$$\rho = k\sin\theta.$$

Les courbes définies sont alors des cercles tangents à OX (¹).

La détermination de la force, qui résout le problème II dans ce cas, se déduit immédiatement des formules générales données plus haut (n° **29**), en y faisant $m = \frac{1}{2}$, $p = 2$. Il est inutile de transcrire ici les résultats qu'on obtient. Nous allons seulement considérer les deux cas les plus simples où l'expression du potentiel est quadratique ou linéaire, pour en conclure une représentation géométrique assez élégante de la force.

Dans le cas où le potentiel est quadratique et de la forme

$$V_1 \equiv \alpha r^2 + \beta r\cos^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

prenons, sur une droite quelconque OU passant par O,

$$OH = a\cos^2\tfrac{1}{2}\theta, \qquad HI = -a\cos\tfrac{1}{2}\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

en posant $-\frac{\beta}{2\alpha} = a$. Le point I obtenu est sur la bissectrice de l'angle XOU, à une distance OI du point O égale à $a\cos\frac{1}{2}\theta$. Il résulte de là

(¹) Les courbes synchrones correspondantes sont des *cardioïdes*

$$r = \lambda\cos^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

ayant pour point de rebroussement le point O et pour axe la droite OX.

qu'en prenant sur OX OA $= a$, on aura constamment

$$OI = a \cos \tfrac{1}{2}\theta,$$

ce qui montre que le lieu du point I est le cercle décrit sur OA comme diamètre. On a ainsi une représentation complète de la force appliquée en un point quelconque M de la droite variable OU. Cette force est constamment dirigée vers le point I, déterminé plus haut, et égale à 2α MI.

Dans le cas où le potentiel est linéaire et de la forme

$$V_2 = \beta r \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta,$$

l'application des formules (40) et (42) donne immédiatement

$$F_2 = \beta \cos \tfrac{1}{2}\theta, \qquad i_2 = \tfrac{1}{2}\theta.$$

On en conclut que la force appliquée en un point quelconque M est parallèle à la bissectrice de l'angle $\widehat{MOX}$. On la construit en grandeur et en direction en prenant sur OX, OB $= \beta$, et projetant orthogonalement OB sur la bissectrice de l'angle $\widehat{MOX}$.

On peut remarquer que, dans le cas qui vient d'être examiné, les courbes équipotentielles sont les *paraboles homofocales* définies par l'équation

$$r = \frac{C}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta}.$$

Les courbes équipotentielles, dans le cas du potentiel quadratique, ont pour équation

$$\alpha r^2 + \beta r \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta = C.$$

Ce sont des anallagmatiques, ayant pour pôle principal d'inversion commun le point O et pour déférente commune la podaire négative par rapport au point O de la cardioïde

$$r = -\frac{\beta}{2\alpha} \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta.$$

Cette podaire négative, comme on le sait, est un cercle. Par suite, les courbes équipotentielles sont des *ovales de Descartes*.

Ces ovales présentent d'ailleurs cette particularité que le pôle principal d'inversion O se trouve sur le cercle qui lui correspond comme déférente.

32. *Nouvelle généralisation du cas de la lemniscate et du cas du cercle.* — Les cas où les courbes (C) sont des cercles ou des lemniscates peuvent encore être considérés comme des cas particuliers de celui où la fonction $\varphi(\theta)$ est de la forme $a+b\cos\theta+c\sin\theta$, ou plus simplement de la forme $a+b\cos\theta$ à laquelle se ramène la précédente par une rotation convenable de l'axe polaire.

Les courbes synchrones correspondant au potentiel, qui est alors

$$\psi\left(\frac{r}{a+b\cos\theta}\right)(a+b\cos\theta)^2,$$

sont formées des *limaçons de Pascal*

$$r=\lambda(a+b\cos\theta)$$

ayant pour point double commun le point O et homothétiques par rapport à ce point.

De

$$\varphi(\theta)\equiv a+b\cos\theta,$$

on déduit

$$\varphi'(\theta)\equiv -b\sin\theta.$$

On a par suite

$$\int\frac{\varphi(\theta)}{\varphi'(\theta)}d\theta\equiv-\frac{a}{b}\int\frac{d\theta}{\sin\theta}-\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta.$$

On trouve d'ailleurs immédiatement

$$\int\frac{d\theta}{\sin\theta}\equiv \mathrm{L}\,\mathrm{tang}\,\frac{\theta}{2},\qquad \int\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta\equiv \mathrm{L}\sin\theta.$$

On en conclut

$$\int\frac{\varphi(\theta)}{\varphi'(\theta)}d\theta\equiv-\mathrm{L}\sin\theta\left(\mathrm{tang}\,\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{a}{b}}.$$

En transportant l'intégrale ainsi obtenue dans l'équation (9), on a pour l'équation du système des courbes (C)

$$\rho^2 = k^2(a + b\cos\theta)\sin\theta\left(\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{a}{b}}.$$

On voit immédiatement que la dernière équation ([1]) donne des lemniscates, lorsque a est nul, et des cercles, lorsque a et b sont égaux. On retombe ainsi sur les deux cas étudiés dans les deux derniers paragraphes.

Si l'on prend $\psi(u) \equiv \alpha u^2 + \beta u$, on construit le point I qui détermine pour les courbes trouvées les forces agissant aux divers points d'une droite OU, inclinée d'un certain angle θ sur OX, en portant sur OU, comme on l'a vu précédemment (n° **19**),

$$\mathrm{OH} = -\frac{\beta}{2\alpha}(a + b\cos\theta), \qquad \mathrm{HI} = \frac{\beta}{2\alpha} b\sin\theta.$$

Ce point se construit très aisément, en prenant sur OX

$$\mathrm{OC} = -\frac{\beta}{2\alpha} b$$

et portant sur une parallèle à OU

$$\mathrm{CI} = -\frac{\beta}{2\alpha} a.$$

Il résulte de cette construction que le lieu du point I est un *cercle* de centre C et de rayon égal à $-\frac{\beta}{2\alpha}a$.

Les courbes équipotentielles ont pour équation

$$\alpha r^2 + \beta r(a + b\cos\theta) = \mathrm{C};$$

ce sont des *ovales de Descartes* de la forme la plus générale.

En supposant $\psi(u) \equiv \beta u$, on obtient, en appliquant les formules (24)

([1]) Les courbes définies par cette équation seront algébriques ou transcendantes, suivant que $\frac{a}{b}$ sera commensurable ou incommensurable.

et (25),

$$F_2^2 = \beta^2(a^2 + 2ab\cos\theta + b^2), \qquad \operatorname{tang} i_2 = \frac{a\sin\theta}{a\cos\theta + b}.$$

De là on conclut la construction suivante pour la force constante, en grandeur, direction et sens, qui agit aux divers points d'une même droite OU. Sur OU on porte $OA = \beta a$ et, sur une parallèle à OX menée par le point A obtenu, on prend $AB = \beta b$; OB est la représentation géométrique de la force F_2.

Les courbes équipotentielles sont d'ailleurs les coniques homothétiques et confocales définies par l'équation

$$r = \frac{C}{a + b\cos\theta},$$

C désignant un paramètre variable.

Remarque. — On traiterait, sans plus de difficultés, au point de vue des intégrations qui peuvent se faire jusqu'au bout, le cas plus général que ceux que nous avons étudiés et qui les comprend tous, où la fonction $\varphi(\theta)$ qui entre dans l'expression du potentiel est de la forme

$$(a + b\cos m\theta + c\sin m\theta)^p,$$

que l'on ramène à $(a + b\cos m\theta)^p$ par une rotation convenable de l'axe polaire. Les résultats ne donnant lieu à aucune interprétation géométrique digne d'être remarquée, nous ne nous y arrêterons pas.

Les intégrations se feraient encore complètement dans le cas où l'on aurait

$$\varphi(\theta) = a + \sum_m (b\cos m\theta + c\sin m\theta),$$

en supposant les coefficients m commensurables.

EXAMEN DE CERTAINES CATÉGORIES DE FORCES POUR LESQUELLES LE PROBLÈME I EST IMPOSSIBLE.

33. *Impossibilité du problème I dans le cas d'une force centrale.* — Le problème I est impossible dans le cas d'une force centrale, sauf dans le cas d'une force centrale proportionnelle à la distance qui a été traité par M. O. Bonnet. Pour le démontrer, considérons un centre d'action C, à une certaine distance a de O sur OX. Le carré de la distance du point M d'application de la force au point C est

$$\overline{\mathrm{MC}}^2 = r^2 - 2ar\cos\theta + a^2.$$

Le potentiel, dont dérive la force centrale considérée, peut se représenter par une fonction quelconque continue et bien déterminée de $\overline{\mathrm{MC}}^2$

$$\chi(r^2 - 2ar\cos\theta + a^2).$$

Voyons dans quel cas on pourra avoir

$$\psi\left[\frac{r}{\varphi(\theta)}\right]\varphi^2(\theta) + \mathrm{C} \equiv \chi(r^2 - 2ar\cos\theta + a^2),$$

en choisissant convenablement les fonctions φ, ψ, χ et la constante C.

En admettant cette identité, on en déduit, en prenant les dérivées deux fois de suite par rapport à r,

$$\psi''\left[\frac{r}{\varphi(\theta)}\right] \equiv 2\chi'(r^2 - 2ar\cos\theta + a^2) \\ + 4(r - a\cos\theta)^2\chi''(r^2 - 2ar\cos\theta + a^2).$$

Pour $r = 0$, cette dernière identité se réduit à

$$\psi''(0) \equiv 2\chi'(a^2) + 4a^2\cos^2\theta\,\chi''(a^2).$$

Le premier membre étant alors indépendant de θ, il doit en être de même du second.

Supposons d'abord $a \gtrless 0$, c'est-à-dire le centre d'action C distinct de l'origine O du mouvement. Il faut, dans cette hypothèse, pour que la dernière identité ait lieu, que la dérivée seconde de la fonction χ soit identiquement nulle, c'est-à-dire que cette fonction soit, à une constante arbitraire près, que l'on peut d'ailleurs négliger, de la forme $\mu(r^2 - 2ar\cos\theta + a^2)$, μ désignant un coefficient constant. C'est, comme on le voit, l'expression du potentiel correspondant à une force proportionnelle à la distance. On a alors

$$\psi(u) \equiv \mu(u^2 - 2au), \qquad \varphi(\theta) \equiv \cos\theta, \qquad C \equiv \mu a^2.$$

Nous venons de supposer $a \gtrless 0$. Il est facile de faire voir l'impossibilité du problème I, dans le cas où a serait nul, c'est-à-dire où le centre d'action C coïnciderait avec le point de départ O. En effet, décrivons de O comme centre un cercle quelconque coupant à la fois l'arc en M et la corde en N. Les forces, nécessairement répulsives d'ailleurs, appliquées en ces deux points, seraient égales. Mais celle appliquée en M, n'agissant que par sa composante tangentielle, produirait une accélération moindre que celle appliquée en N, qui agit dans son intégralité. Il est clair que, dans ces conditions, le mobile mettrait forcément plus de temps à décrire l'arc qu'à décrire la corde.

34. *Impossibilité du problème I dans le cas d'une force de direction fixe, fonction de la distance de son point d'application à une droite fixe.* — Prenons l'axe polaire OX parallèle à la direction de la force, et désignons par α l'inclinaison de la droite fixe Δ sur OX, par a la distance au point O de l'intersection de ces deux droites. La distance à Δ, comptée parallèlement à l'axe polaire, d'un point M de coordonnées r, θ, a, comme on le voit aisément, pour expression

$$r\frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin\alpha} - a.$$

Nous allons démontrer que le problème I ne comporte aucune solution dans le cas d'une force parallèle à OX, et fonction de la distance du point mobile à la droite Δ.

Cette distance pouvant évidemment, sans qu'il en résulte de restriction, être évaluée parallèlement à OX, le potentiel relatif à la force considérée est de la forme

$$\chi\left[r\frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin\alpha} - a\right],$$

χ désignant une fonction continue et bien déterminée.

Voyons si l'on peut avoir identiquement

$$\psi\left[\frac{r}{\varphi(\theta)}\right]\varphi^2(\theta)+C\equiv\chi\left[r\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}-a\right],$$

en choisissant convenablement les fonctions φ, ψ, χ et la constante C.

On déduit de là, en prenant les dérivées secondes des deux membres par rapport à r,

$$\psi''\left[\frac{r}{\varphi(\theta)}\right]\equiv\chi''\left[r\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}-a\right]\frac{\sin^2(\alpha-\theta)}{\sin^2\alpha}.$$

Or, pour $r=0$, on a

$$\psi''(0)\equiv\chi''(-a)\frac{\sin^2(\alpha-\theta)}{\sin^2\alpha}.$$

Le premier membre étant alors indépendant de θ, il doit en être de même du second, ce qui exige que la dérivée seconde de la fonction χ se réduise à zéro identiquement. On en conclut

$$\chi(r\cos\theta-a)\equiv\mu\left[r\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}-a\right]+\nu,$$

μ et ν désignant deux constantes. L'identité, d'où nous sommes partis, est alors effectivement vérifiée, en prenant

$$\psi(u)\equiv\mu u,\qquad \varphi(\theta)\equiv\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha},\qquad C=\nu-\mu a.$$

La force qui dérive du potentiel que nous venons de trouver est constante en grandeur, direction et sens : elle est égale à μ et agit dans la direction et le sens de OX. On retombe sur le cas traité par Saladini. Sauf ce cas limite, on voit que le problème I est impossible pour la catégorie de forces que nous venons d'examiner.

Remarque. — Les questions qui ont été traitées dans le présent travail se prêtent à une généralisation très étendue, ainsi que nous l'avons indiqué déjà dans une Note *Sur certains problèmes d'isochronisme,* publiée dernièrement dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. CIII, p. 1174). Nous comptons en faire l'objet d'un autre Mémoire.

EDMOND LAGUERRE

SA VIE ET SES TRAVAUX,

Par M. Eugène ROUCHÉ,

Examinateur de sortie à l'École Polytechnique, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

I.

Edmond Laguerre a vécu modeste et tranquille, loin des agitations mondaines, entre ses livres, sa famille et quelques amis dévoués. Ses recherches scientifiques, les exigences du devoir professionnel, son affection pour son aimable compagne, enfin l'éducation de ses deux filles l'ont absorbé pleinement; aucun autre plaisir n'a eu d'attraits pour lui, et, à notre époque de désirs impatients et d'ambition fébrile, Laguerre a su ne puiser ses joies qu'aux sources pures du devoir et du travail.

Né à Bar-le-Duc, le 9 avril 1834, il a fait ses études dans divers établissements d'instruction publique, ses parents l'ayant successivement déplacé pour qu'il eût sans cesse auprès de lui un compagnon chargé de veiller sur sa santé déjà précaire. Partout, au collège Stanislas, au lycée de Metz, à l'institution Barbet, à l'École Polytechnique, il se fit remarquer par sa rare intelligence et par une aptitude singulière pour les langues vivantes et pour les sciences mathématiques. Certes, il n'était pas un de ces élèves qu'aucune étude ne captive au delà de l'heure réglementaire, et qui s'appliquent à toute chose avec une ardeur égale et prudemment contenue. Ses camarades, il faut bien le dire, l'ont vu plus d'une fois planter là son lavis ou son dessin graphique pour courir après une idée qui hantait son esprit. C'est pourquoi, entré à l'École le quatrième, il n'était classé que le quarante-sixième à la sortie; mais, en revanche, il avait déjà débuté dans la carrière scientifique par un coup de maître, et nous admirions tous cet étonnant garçon qui, étant encore sur les bancs, trouvait la solution complète du problème de la transformation homographique des relations angulaires, solution qui avait échappé à Chasles et à Poncelet et qui constituait une lacune regrettable de la *Géométrie supérieure*. Le bon Terquem entrevit immédiatement toute la portée de ce brillant début. « Profond investigateur en Géométrie et en Analyse », écrivait-il dès lors dans ses *Annales* », le jeune Laguerre possède un esprit d'abstraction excessivement rare, et l'on ne saurait trop encourager les travaux de cet homme d'avenir. »

Cependant, Laguerre se tut pendant dix ans. Homme de devoir avant tout, son métier d'officier d'artillerie le prit d'abord tout entier, et ses camarades de garnison pourraient dire avec quel zèle il s'appliquait à tous les détails d'un service si peu en harmonie avec ses allures et avec ses goûts. Puis, envoyé à la manufacture d'armes de Mutzig, il put à loisir s'y livrer à ses études favorites; son isolement, comme autrefois le séjour de Poncelet à Saratof, lui fut éminemment favorable, et, en 1864, lors de sa nomination comme répétiteur à l'École Polytechnique, il revint à Paris solidement armé pour reparaître sur l'arène scientifique.

De 1865 à 1886, Laguerre n'a cessé d'émettre des idées originales et profondes sur les diverses branches des Mathématiques pures. Si la variété des sujets rend ses Mémoires difficiles à classer, la concision avec laquelle il les rédigeait les rend encore plus impropres à l'analyse; et, pour mettre son œuvre dans tout son jour, il faudrait en reproduire entièrement la majeure partie. Mais, si nul, mieux que lui, n'a observé les prescriptions de Boileau, nul aussi, il faut le reconnaître, n'a su, en se bornant, mettre dans des écrits plus de précision et de clarté. Que de fois l'ai-je entendu s'élever vivement contre la prolixité de certains auteurs plus sobres d'idées que de mots ! « Quand on veut être lu », répétait-il sans cesse, « on ne délaye pas en cent pages un sujet dont le développement en exige à peine dix. » Qu'on me pardonne ces détails; mon esprit est encore plein du souvenir de ces causeries intarissables et charmantes dont nos tournées pour l'admission à l'École Polytechnique nous fournissaient l'heureuse occasion. Déjà liés d'amitié avant notre entrée à l'École, puis associés pendant longtemps à la même besogne, nous avions un profond attachement l'un pour l'autre, et j'ai pu, mieux que personne, je le dis non sans fierté, apprécier son savoir si étendu et sa loyauté si parfaite, constater sa bienveillance inépuisable sous des dehors parfois un peu brusques, et pénétrer les nobles qualités de ce cœur peu prodigue de ses trésors.

II.

L'œuvre de Laguerre se compose de 140 Notes ou Mémoires [1] que l'on peut rattacher à huit chefs principaux :

Emploi des imaginaires en Géométrie;
Application du Calcul intégral et de la théorie des formes à la Géométrie;
Géométrie infinitésimale ;
Géométrie de direction ;
Méthodes d'approximation pour certaines fonctions analytiques ;
Résolution numérique des équations ;
Équations différentielles et fonctions elliptiques.

Nous consacrerons un paragraphe à chacune de ces séries de travaux, en suivant l'ordre même que nous venons d'indiquer.

---

[1] *Voir* la liste placée à la suite de cette Notice.

III.

Le premier travail de Laguerre, nous l'avons déjà dit, est relatif à la transformation homographique des relations angulaires.

On sait, depuis Poncelet, que tous les cercles tracés dans un même plan passent par deux points fixes imaginaires situés sur la droite à l'infini de ce plan. Laguerre donne à ces points I et J le nom d'*ombilics* du plan, et il appelle *droite isotrope* toute droite menée par un ombilic. Les droites isotropes d'un plan forment deux systèmes distincts; le premier est composé de droites parallèles entre elles et passant par I, le second de droites aussi parallèles entre elles, mais passant par J. De chaque point du plan partent deux droites isotropes de systèmes différents et dont l'ensemble forme un cercle de rayon nul. Le plan étant réel, toute droite isotrope renferme un point réel, mais un seul; c'est celui où elle coupe la droite isotrope qui lui est imaginairement conjuguée.

Cela posé, voici le principe sur lequel repose la solution du problème de la transformation homographique des relations angulaires :

Le rapport anharmonique ρ *du faisceau formé par les deux côtés d'un angle* θ *et par les droites isotropes passant par son sommet est égal à*

$$e^{2\theta i};$$

d'où l'on déduit

$$\theta = \frac{1}{2i}\log\rho,$$

les logarithmes étant népériens et la lettre i désignant le symbole $\sqrt{-1}$.

D'après cela et en vertu de la projectivité du rapport anharmonique, si plusieurs angles $A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n$, situés dans un même plan, satisfont à une relation d'ailleurs quelconque

$$F(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n) = 0,$$

les angles correspondants $A'_1, \ldots, A'_k, \ldots, A'_n$ de la figure homographique seront liés par la relation

$$F\left(\frac{1}{2i}\log a_1, \ldots, \frac{1}{2i}\log a_k, \ldots, \frac{1}{2i}\log a_n\right) = 0.$$

a_k désignant en général le rapport anharmonique que les deux côtés de l'angle A'_k forment avec les droites qui joignent son sommet aux points qui correspondent aux ombilics de la première figure.

Par exemple, si l'on applique la transformation à ce théorème élémentaire, *la somme des angles d'un polygone plan est un multiple de deux angles droits,* on tombe sur le théorème de Carnot relatif aux segments qu'une transversale détermine sur les côtés d'un polygone.

Laguerre exposa, quinze ans plus tard, sa doctrine sur l'*emploi des imaginaires en Géométrie* dans un Cours qu'il professa à la salle Gerson et dont il n'a malheureusement publié que quelques Extraits, se contentant d'y puiser, à diverses reprises, le sujet d'importants travaux. Cette doctrine repose, en dernière analyse, sur trois notions fondamentales : la notion de l'angle rattachée, comme nous venons de le dire, à celle du rapport anharmonique, la distinction entre les foyers réels et les foyers singuliers, et enfin une représentation géométrique des points imaginaires situés soit dans un plan, soit dans l'espace. Nous avons développé la première idée ; voici quelques explications sur les deux autres.

On nomme, d'après Plücker, foyer d'une courbe plane tout point tel, que deux des tangentes menées par ce point à la courbe passent respectivement par les ombilics du plan. Si la courbe ne passe pas par les points I et J, on peut mener, par chacun de ces ombilics, un nombre de tangentes égal à la classe μ de la courbe, d'où résultent deux faisceaux dont les intersections sont les μ^2 foyers de cette ligne ; μ de ces foyers sont réels et suffisent, d'ailleurs, pour déterminer les autres. Mais, si la courbe passe par I et J, les faisceaux des tangentes menées par ces deux points forment deux groupes ; le premier groupe est composé des tangentes dont le point de contact n'est pas un ombilic, et si k est le nombre des branches de la courbe qui passent par chacun des points I et J, ce premier groupe contient $\mu - 2k$ foyers réels que Laguerre nomme *foyers ordinaires,* comme les foyers trouvés dans le cas précédent. Le second groupe, formé par les tangentes ayant leur point de contact en l'un des ombilics sur la droite de l'infini, donne k foyers réels que l'on doit compter comme doubles et que Laguerre nomme *foyers singuliers*. Telle est la distinction entre les foyers ordinaires et les foyers singuliers dont Laguerre a révélé l'importance en montrant combien différents étaient leurs rôles en Géométrie plane et particulièrement dans la théorie des courbes du quatrième ordre qui ont les ombilics pour points doubles, et que M. Moutard, en les considérant à un autre point de vue, avait qualifiées d'*anallagmatiques*.

Quant au mode de représentation géométrique des points imaginaires, il découle immédiatement, pour le plan, de la considération des droites isotropes; il consiste à représenter tout point imaginaire A par le segment aa' que déterminent les deux points réels a et a' situés respectivement sur les deux droites isotropes passant par A. On montre aisément que la position de ce segment représentatif est indépendante du choix des axes de coordonnées, et l'on voit en outre que, lorsque le point A est réel, les points a et a' se confondent avec lui, en sorte que le cas d'un point réel est contenu dans le cas général du point imaginaire. L'étude complète d'une courbe consistera dans la recherche du mode de distribution des segments représentatifs de ces divers points. Ainsi, l'on trouve que : *pour qu'un segment* (aa') *représente un point situé sur un cercle réel, il faut et il suffit que les points* a *et* a' *soient réciproques par rapport à ce cercle,* et que, *pour qu'un segment* (aa') *représente un point situé sur une ellipse réelle, il faut et il suffit que les deux points* a *et* a' *appartiennent à une hyperbole homofocale à l'ellipse et que la droite* aa' *soit parallèle à l'une des normales à l'ellipse en l'un des points où cette courbe rencontre l'hyperbole.* Le cas de la droite est le plus important : *Pour que plusieurs segments représentent des points situés sur une même ligne droite, il faut et il suffit que le polygone formé par les origines de ces segments et le polygone formé par leurs extrémités soient semblables et inversement placés.* Laguerre en déduit la solution graphique des problèmes relatifs à la ligne droite déterminée par les segments représentatifs de deux de ses points et donne ainsi le moyen de *réaliser* les constructions où entrent des données imaginaires. Là est en effet le nœud de la question, attendu que certains problèmes, dont la considération des imaginaires donne une solution théorique simple et souvent immédiate, ne sont *résolus effectivement* qu'autant que les constructions auxquelles conduit le mode de démonstration sont *réalisables*.

La représentation géométrique des points imaginaires dans l'espace n'est guère moins simple, mais il faut auparavant définir les plans et les cônes isotropes, ainsi que la conique ombilicale. Si par un point réel ou imaginaire on mène divers plans, chacun de ces plans contient deux droites isotropes passant par le point; ces droites sont situées sur un même cône du second degré, qu'on nomme *cône isotrope* et que l'on peut aussi considérer comme une sphère de rayon nul ayant le point donné pour centre, en sorte que toute section plane de ce cône est un cercle dont le centre est la projection du sommet du cône sur le plan. Tous les plans isotropes coupent le plan de l'infini suivant un même cercle commun à toutes les sphères de l'espace, et que Laguerre nomme *conique ombilicale*. Par une droite on peut, en général, mener deux plans tangents à l'ombilicale : ce sont des *plans isotropes*. Le couple de plans isotropes passant par une droite donnée est coupé, suivant deux droites isotropes, par un plan perpendiculaire à cette droite. Enfin, par une droite isotrope, on ne peut mener qu'un seul plan isotrope, puisque cette droite coupe le plan de l'infini en un point de l'ombilicale.

Cela posé, soient a un point imaginaire de l'espace et a' son conjugué; ces deux points sont les sommets de deux cônes isotropes qui se coupent suivant un cercle réel A dont le plan est perpendiculaire sur la droite réelle aa', dont le centre est le milieu O du segment aa' et dont le rayon est égal à R, Ri étant l'expression du segment Oa. Il est clair que les deux points imaginaires conjugués, a et a', définissent complètement le cercle A, et réciproquement; c'est ce cercle réel A que Laguerre nomme le *cercle représentatif du couple* aa'. Il est vrai que, dans certaines questions, on peut vouloir distinguer ces deux points l'un de l'autre; il suffit, à cet effet, d'imaginer que le cercle A soit parcouru dans un certain sens ; ce sens déterminera celui des deux points dont on veut que le cercle soit la représentation. Pour étudier une courbe donnée par des équations supposées réelles, il suffira d'étudier les conditions auxquelles doit satisfaire le cercle réel A pour que les points imaginaires conjugués a et a', qu'il représente, appartiennent à la courbe. Ainsi, *pour qu'un cercle réel représente un couple de points imaginaires conjugués situés sur une ellipse réelle, il faut et il suffit que ce cercle appartienne à un hyperboloïde à deux nappes ayant cette ellipse pour focale.*

Nous ne pouvons suivre Laguerre dans les déductions si nombreuses qu'il n'a cessé, pendant vingt ans, de tirer de ces principes fondamentaux; pour ne pas dépasser notre but, qui est surtout de mettre en évidence les idées originales de l'auteur, nous nous bornerons à citer les résultats les plus saillants parmi ceux auxquels cette voie l'a conduit.

Ce sont :

1° Des théorèmes généraux sur les courbes algébriques, tels que les deux suivants :

Si par un point M, *pris dans le plan d'une courbe de degré* n, *on trace un cercle quelconque, de rayon* R, *le produit des distances de ce point aux* $2n$ *points communs au cercle et à la courbe est égal à la puissance du point* M *par rapport à la courbe, multipliée par le facteur* R^n.

Si par un point M, *pris dans le plan d'une courbe de classe* m, *on mène des tangentes à la courbe, l'orientation de ces tangentes est la même que celle du faisceau des droites joignant le point* M *aux* m *foyers de la courbe, et le centre harmonique du point* M *relativement aux points de contact est le même que le centre harmonique de ce point relativement aux* m *foyers.*

De ces propriétés métriques découlent de nombreuses conséquences relatives à la courbure des lignes et des surfaces ; voici les plus curieuses :

Si d'un point A *de l'hypocycloïde à trois rebroussements on mène à la courbe la tangente dont le point de contact* T *diffère de* A, *il suffit de prolonger* TA *d'une quantité égale à elle-même pour obtenir le foyer de la parabole qui suroscule en* A *l'hypocycloïde.*

Si d'un point M *d'une conique sphérique on abaisse sur les deux focales réelles des perpendiculaires rencontrant la sphère en m et m', le conjugué harmonique* M, *par rapport à m et à m', appartient au plan osculateur de la courbe en* M. Ce théorème élégant n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une proposition relative à la *biquadratique sphérique,* c'est-à-dire à la ligne d'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre.

MT *étant la tangente en un point quelconque* M *d'une surface anallagmatique du quatrième ordre, et* P *et* Q *les deux autres points communs à la droite* MT *et à la surface; C désignant en outre le centre de la surface et* I *le milieu de la droite joignant les centres des deux sphères qui, passant par* M, *touchent respectivement la surface en* P *et* Q; *on aura le centre de courbure en* M *de la section normale passant par* MT *en menant par* M *une droite parallèle à* IC, *de même sens et de longueur double.* Pour l'intelligence de ce théorème, nous rappellerons qu'une surface anallagmatique du quatrième ordre peut être considérée de cinq manières différentes, comme l'enveloppe de sphères qui coupent orthogonalement une sphère fixe, tandis que leur centre décrit une surface du second ordre; les cinq quadriques au moyen desquelles on peut aussi décrire la surface sont homofocales, et c'est leur centre commun qu'on nomme *centre de la surface anallagmatique.* Ajoutons que précédemment, et presque simultanément, Laguerre et M. Darboux avaient trouvé une autre solution, mais bien moins élégante, du problème de la courbure des surfaces anallagmatiques.

2° Une étude ayant pour objet d'étendre aux courbes sphériques les notions des *foyers ordinaires* et des *foyers singuliers* et de montrer le rôle important que jouent, dans la théorie de la projection stéréographique, les génératrices imaginaires de la sphère.

Lorsqu'on projette stéréographiquement une courbe, *les foyers ordinaires de la courbe se projettent suivant les foyers ordinaires de sa transformée.* Mais il n'en est pas de même pour les foyers singuliers. *Les foyers singuliers de la transformée sont situés sur les polaires, par rapport à la sphère, des droites conjointes du pôle de transformation relativement à la courbe que le plan tangent à ce pôle détermine dans l'une quelconque des surfaces qui, avec la sphère, définissent la courbe.*

3° Des recherches générales sur les surfaces à génératrices circulaires et leur application aux surfaces anallagmatiques du quatrième ordre.

Laguerre est revenu plusieurs fois sur la théorie des lignes et des surfaces anallagmatiques. Dans une première Note, il a retrouvé le mode de description donné par M. Moutard pour les anallagmatiques planes considérées comme enveloppes de cercles, en le déduisant de l'existence des quatre cônes qui passent par une biquadratique sphérique; puis, dans deux autres écrits, après avoir démontré, relativement aux surfaces anallagmatiques, plusieurs beaux théorèmes déjà énoncés par M. Moutard, Laguerre a fait connaître des propriétés toutes nouvelles des *focales ordinaires et singulières* de ces surfaces, ainsi que les curieuses relations qui existent entre les quadriques homofocales qui permettent leur génération; de là résultent diverses propositions sur les surfaces homofocales du second ordre, par exemple la suivante :

Étant deux surfaces homofocales du second degré et un plan arbitraire P, *si l'on prend respectivement sur chacune de ces surfaces un point m et un point m', tels que les plans tangents en ces points se coupent sur une droite située dans le plan* P, *toutes les droites telles que mm' sont normales à une même surface.*

4° Un Mémoire sur la *cyclide de Dupin*, renfermant beaucoup de propositions nouvelles sur les surfaces de tous les ordres; nous signalerons spécialement la partie de ce travail qui concerne les *surfaces douées d'un axe de rotation.*

On dit qu'une surface Σ est douée d'un axe de rotation s'il existe une droite D telle, qu'en faisant tourner Σ autour de D d'un angle arbitraire et désignant par Σ' sa nouvelle position, les surfaces Σ et Σ' se coupent sous un angle constant le long de leur intersection, et cela quel que soit l'angle de rotation. La recherche des surfaces douées d'un axe de rotation est un problème difficile. Laguerre a trouvé d'abord une solution contenant une fonction arbitraire; elle est fournie par des surfaces déjà étudiées par M. O. Bonnet et dont les deux systèmes de lignes de courbure sont composés l'un de cercles, l'autre de courbes sphériques; puis il a trouvé une deuxième solution entièrement distincte de la première et renfermant aussi une fonction arbitraire. La cyclide de Dupin jouit de la singulière propriété d'appartenir à la fois aux deux espèces de surfaces et elle possède quatre axes de rotation, deux de la première espèce, deux de la seconde.

5° Des recherches sur les biquadratiques gauches, c'est-à-dire sur les lignes d'intersection de deux surfaces du second ordre, dont voici le point le plus important :

Étant données une surface du second ordre et deux droites fixes, Chasles avait démontré que, si une droite mobile rencontre les deux droites fixes en s'appuyant sur la surface, la courbe de contact était une biquadratique gauche. On pouvait se demander si, inversement, toute biquadratique gauche pouvait résulter d'un tel mode de génération et comment, dans le cas de l'affirmative, on pourrait déterminer la quadrique et les deux droites fixes. En empruntant à Clebsch ses principes sur l'application des fonctions elliptiques à la géométrie des courbes gauches, Laguerre a fait voir que, pour une biquadratique donnée, on peut toujours faire passer six quadriques permettant la génération indiquée par Chasles et que, l'une des surfaces étant choisie, on peut encore prendre d'une infinité de manières les deux droites fixes; une circonstance assez remarquable est la rencontre en cette étude des *surfaces quadricuspidales,* déjà étudiées par de la Gournerie, et dont plusieurs belles propriétés ont été ainsi rattachées incidemment à la théorie des intégrales elliptiques.

Laguerre a en outre étendu à ces surfaces un beau théorème qu'il avait donné sur les surfaces du second ordre : *si par une ligne de courbure quelconque* K *d'une quadrique* A *on mène une autre quadrique* A′, *la surface développable circonscrite à* A *et* A′ *touche* A *suivant une de ses lignes de courbure;* de même, *si par la biquadratique* K *on mène une quadricuspidale quelconque* A″, *la développable circonscrite à* A *et* A″ *touche* A *suivant une de ses lignes de courbure.*

6° Une étude pleine d'intérêt sur les lignes que Laguerre a nommées *cassiniennes*. Ces courbes, dont le type est l'ellipse de Cassini, sont les anallagmatiques planes ou sphériques jouissant de cette propriété, que l'on peut circonscrire à la conique qui les définit un quadrilatère inscrit dans le cercle directeur correspondant. Laguerre a fait connaître pour ces lignes plusieurs modes de génération fort élégants; par exemple :

Si une biquadratique sphérique est telle qu'une droite passant par deux points de cette courbe ait pour polaire, relativement à la sphère sur laquelle elle est tracée, une droite rencontrant la courbe en deux points, cette ligne est une cassinienne.

Si une droite s'appuie sur deux droites fixes en restant tangente à une sphère, cette courbe de contact est une cassinienne.

Il a, de plus, indiqué une manière d'associer deux à deux les points d'une cassinienne qui facilite extrêmement l'étude de la courbe et conduit à des propriétés fort remarquables :

Si l'on prend la conjuguée harmonique d'un point fixe quelconque de la sphère relativement à chacun des couples de points associés d'une cassinienne, le lieu de ces points conjugués est un cercle.

Si a et b, c et d sont les points diamétralement opposés à deux couples quelconques A *et* B, C *et* D *de points associés d'une cassinienne, et si* M *désigne un point quelconque de la courbe, la différence des aires des triangles sphériques* M*ab*, M*cd reste constante.*

7° Laguerre retrouve les cassiniennes en partant d'un point de vue tout autre dans un Mémoire *sur quelques propriétés des foyers des courbes algébriques et des focales des cônes algébriques.*

La proposition fondamentale, dans ces nouvelles recherches, est la suivante :

La polaire d'un point quelconque M *du plan d'une courbe de* $m^{\text{ième}}$ *classe, par rapport aux droites obtenues en menant par chacun des* m *foyers réels une perpendiculaire sur la droite qui joint ce foyer au point* M, *se confond avec la polaire de ce même point* M *par rapport aux normales à la courbe, qui ont pour pieds les points de contact des tangentes issues du point* M.

Après avoir déduit de là ce beau théorème de Liouville : *Si aux points de rencontre d'un cercle et d'une courbe plane on mène les normales à la courbe, la polaire du centre du cercle par rapport à ces normales est située à l'infini.* Laguerre en fait l'application aux coniques homofocales, ce qui le conduit à cette proposition remarquable :

Si l'on abaisse d'un point des normales à l'une quelconque des coniques ayant pour foyers deux points donnés F *et* F', *les tangentes menées aux pieds des normales forment un quadrilatère complet, dont les six sommets sont trois couples de points associés d'une cassinienne cubique, que ces sommets décrivent lorsque la conique varie. Ces tangentes roulent en même temps sur une parabole dont le foyer est le conjugué harmonique du point* M *par rapport à* F *et* F'.

L'auteur étend ensuite aux cônes algébriques les propriétés qui précèdent et déduit de là le moyen de construire, relativement à une arête donnée, l'axe de courbure et même l'accélération de courbure d'un cône de second ordre dont on connaît les focales.

8° Un Mémoire sur *la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés.*

Cette courbe, du quatrième degré et de la troisième classe, doublement tangente à la droite de l'infini, renferme dans son équation six constantes arbitraires, et, comme quatre points donnés introduisent huit constantes, il en résulte que la même courbe peut être regardée d'une infinité de manières, comme l'enveloppe des axes d'une conique assujettie à passer par quatre points. Laguerre se propose de déterminer, pour une courbe donnée de la troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini, les divers systèmes de quatre points qui donnent lieu au mode de génération indiqué. La solution repose sur cette propriété curieuse :

L'enveloppe des axes des coniques circonscrites à un quadrangle donné ABCD *est l'enveloppe des asymptotes des coniques circonscrites au quadrangle dérivé, c'est-à-dire du quadrangle dont les sommets sont les centres des cercles circonscrits aux triangles* ABC, BCD, CDA, DAB.

Parmi les théorèmes qu'il en déduit, nous remarquerons le suivant :

Les asymptotes des coniques passant par les sommets d'un triangle et par le point de concours des hauteurs enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements, tandis que les axes de ces courbes enveloppent la ligne symétrique de cette hypocycloïde relativement à son centre.

Étendant ensuite ses recherches à la géométrie à trois dimensions, l'auteur étudie la distribution dans l'espace des axes des quadriques de révolution, passant par quatre ou cinq points donnés; il démontre en particulier cette proposition :

Cinq points étant donnés sur une quadrique de révolution, les centres des cinq sphères circonscrites aux cinq tétraèdres que l'on peut former en groupant ces points quatre à quatre sont situés sur une cubique gauche ayant pour asymptote l'axe de la surface.

Il montre enfin que la plupart des résultats obtenus ne sont que des cas particuliers de théorèmes plus généraux, relatifs aux lignes spiriques et aux surfaces engendrées par la rotation de ces lignes autour de leur axe.

Ces *lignes spiriques*, dont il avait signalé dans un travail antérieur une série de propriétés, sont des anallagmatiques planes du quatrième ordre, possédant un axe de symétrie. Une telle courbe a deux foyers singuliers situés sur l'axe de symétrie : si ces foyers coïncident, elle devient un ovale de Descartes; si l'un des foyers singuliers est rejeté à l'infini, elle s'abaisse au troisième degré; enfin, elle se réduit à une conique, si les deux foyers singuliers passent à l'infini. Nous citerons seulement, parmi les propriétés que Laguerre a fait connaître, celle qu'il considérait comme fondamentale :

Si l'on joint un point mobile sur une spirique à deux points fixes de la courbe, les perpendiculaires élevées sur les milieux des deux cordes ainsi obtenues tracent sur l'axe de symétrie deux divisions homographiques ayant pour points doubles les foyers singuliers de la courbe; d'où l'on déduit aisément que, *un quadrangle étant inscrit dans une spirique, les sommets du quadrangle dérivé et les deux foyers singuliers de la courbe appartiennent à une même conique.*

9° A cette étude sur la spirique se rattache une monographie intéressante sur la *cardioïde,* renfermant beaucoup de propriétés nouvelles.

La cardioïde est l'épicycloïde engendrée par un point d'un cercle mobile qui roule sans glisser sur un cercle de même rayon. Elle dérive de la spirique générale, lorsque les points doubles à l'infini deviennent des points de rebroussement et que les deux foyers singuliers se confondent en un seul F. La division homographique dont nous avons parlé à la fin de l'alinéa précédent a ses deux points doubles réunis en F, et l'on obtient ce théorème :

Si l'on joint un point mobile de la cardioïde à deux points fixes de la courbe, et qu'on nomme I *et* K *les points où l'axe de symétrie rencontre les perpendiculaires élevées sur les milieux des cordes ainsi obtenues, la différence,*

$$\frac{1}{\mathrm{FI}} - \frac{1}{\mathrm{FX}}$$

reste constante.

D'autres propriétés résultent d'ailleurs de l'application à la cardioïde des théorèmes généraux que nous avons énoncés ci-dessus (1°). De la combinaison des deux points de vue résulte une théorie simple et élégante de cette courbe qui rentre d'ailleurs dans le groupe des unicursales de troisième classe, dont Laguerre a donné un mode de génération digne d'être remarqué :

Une courbe de troisième classe est unicursale, si un cercle jouit de la propriété que deux tangentes, menées à la courbe par chacun de ses points, soient à angle droit. Le cercle touche la courbe en trois points et les normales menées au cercle en ces points sont tangentes à la courbe.

10° Citons enfin deux Notes à laquelle Laguerre attachait quelque prix et qui ont pour objet *la relation qui existe entre un cercle circonscrit à un triangle ou à un quadrilatère, et les éléments d'une conique inscrite dans le même polygone.*

Poncelet a montré que, si un triangle est à la fois inscrit dans un cercle C et circonscrit à une conique, on peut inscrire et circonscrire à ces deux courbes une infinité de triangles. Mais quelle relation doit-il exister dans ce cas entre les éléments de la conique et du cercle ? Telle est la question que Laguerre s'est posée, et voici la solution qu'il a donnée : F et G étant les deux foyers de la conique, O le centre du cercle, F′ et G′ les points réciproques de F et G relativement au cercle, si l'on mène, par F, la parallèle à OG jusqu'à sa rencontre R avec GF′, la longueur de l'axe focal est moyenne proportionnelle entre GR et GF′.

Dans le cas du quadrilatère, D étant le point de rencontre de FG′ et GF′, si l'on mène par F la parallèle à OD jusqu'à sa rencontre R avec GF′, la longueur de l'axe focal est moyenne proportionnelle entre GR et GF′.

IV.

Passons maintenant à l'application du Calcul intégral et de la théorie des formes à la Géométrie.

En développant la belle interprétation géométrique, donnée par

Jacobi, de l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

où f désigne un polynôme du quatrième degré, Laguerre a été conduit à donner à l'intégrale une forme remarquable par sa simplicité :

Si l'on décompose, d'une façon quelconque, le polynôme $f(x)$ en deux facteurs du second degré $\theta(x)$ et $\varphi(x)$, l'intégrale générale de l'équation d'Euler est

$$\sqrt{\theta(x)\varphi(y)} - \sqrt{\theta(y)\varphi(x)} = C(x-y),$$

C *désignant une constante arbitraire.*

Parmi les propriétés des cubiques gauches et des cônes du second degré, que Laguerre a rattachées à cette intégration, nous appellerons surtout l'attention sur une construction géométrique fort ingénieuse et relative à l'addition des fonctions ultra-elliptiques de première espèce ; cette construction repose sur le théorème suivant :

Étant donnés sur une cubique gauche six points dont les paramètres sont les racines de l'équation du sixième degré $V = 0$, *si l'on considère un quelconque des cônes du second ordre qui passent par ces six points et deux plans tangents à ce cône, on aura les deux relations*

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{V(x)}} + \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{V(y)}} + \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{V(z)}} = 0,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{V(x)}} + \int_{y_0}^{y_1} \frac{y\,dy}{\sqrt{V(y)}} + \int_{z_0}^{z_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{V(z)}} = 0,$$

où x_0, y_0, z_0 désignent les paramètres des points où le premier plan coupe la cubique et x_1, y_1, z_1 les paramètres des points où la cubique est rencontrée par le second plan.

On remarquera l'analogie de ces résultats avec ceux donnés par Jacobi relativement aux fonctions elliptiques : Jacobi obtenait la construction de l'addition des fonctions elliptiques en faisant rouler une droite sur l'une quelconque des coniques qui passent par quatre points fixes dont la position détermine un polynôme du quatrième degré; Laguerre effectue géométriquement la construction des fonctions ultra-elliptiques de première espèce en faisant rouler un plan sur l'un quelconque des cônes du second degré qui passent par six points fixes dont la position, sur la cubique gauche qui les renferme, détermine un polynôme du sixième degré.

C'est au lien intime qui existe entre la décomposition en trois carrés du polynôme du sixième degré et le problème relatif à la construction des cônes du second degré qui passent par six points de l'espace, qu'est due ici l'introduction, à côté du Calcul intégral, de la théorie des formes algébriques.

Voici maintenant des recherches géométriques où cette dernière théorie intervient d'une manière exclusive et plus complète. Ces recherches concernent successivement les lignes planes, les surfaces réglées du second ordre, et enfin la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner.

Considérons d'abord les lignes planes.

Une première étude est fondée sur la considération de l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$ qui a pour racines les coefficients angulaires des tangentes menées du point (x, y) à une courbe de classe n dont on a l'équation tangentielle $F(u, v, w) = 0$. Laguerre donne à l'équation $U = 0$, qui est du degré n et dont les coefficients sont des polynômes entiers en x et y, le nom d'*équation mixte* de la courbe, et il indique le moyen de former les équations mixtes des courbes que l'on obtient en égalant à zéro les covariants de $F(u, v, w)$, ce qui le conduit, en particulier, à une méthode simple pour trouver l'équation de la cayleyenne d'une courbe algébrique.

L'équation mixte joue un rôle considérable dans l'étude des singularités des courbes planes de quatrième classe; on sait qu'une telle courbe K possède 28 points doubles δ et 24 points de rebroussement ρ; il existe en outre dans son plan 21 droites P, telles que la première polaire de chacune d'elles, relativement à K, se décompose en un point p

et une conique résiduelle ; aux 21 droites P correspondent 21 points p, et les 73 points δ, ρ, p sont les points communs à trois courbes dont les équations s'expriment simplement en fonction de

$$\frac{\partial S}{\partial x}, \quad \frac{\partial S}{\partial y}, \quad \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial y},$$

S et T désignant l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la force $U(\lambda, \mu)$ qui, égalée à zéro, constitue l'équation mixte de la courbe K. Soient K et K′ deux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe, ayant pour équations mixtes $U = 0$ et $U' = 0$, on dit que les faisceaux de droite dont ces équations donnent les coefficients angulaires sont harmoniques lorsque l'invariant quadratique I des deux formes U et U′ est égal à zéro ; le lieu des points d'où l'on voit les courbes K et K′ sous deux faisceaux harmoniques est, d'après cela, une courbe $I = 0$ de degré n; Laguerre lui donne le nom de *courbe harmonique* du couple K et K′ ; si n est impair, cette ligne est également la courbe harmonique de deux quelconques des courbes du faisceau que K et K′ déterminent, et elle prend alors le nom de *courbe harmonique* de ce faisceau. On déduit de là plusieurs propositions remarquables :

Si l'on considère les différentes droites que l'on peut mener par un point M *et si l'on prend leurs premières polaires par rapport à une courbe* K *de quatrième classe, ces polaires forment un faisceau de courbes de troisième classe dont la courbe harmonique est la droite polaire du point* M *par rapport à la courbe du quatrième ordre* Σ *qui passe par les* 24 *points de rebroussement de* K. En particulier, *les* 21 *droites* P *sont les droites polaires relativement à* Σ *des* 21 *points* p.

Une courbe quelconque de troisième classe et sa hessienne sont vues d'un point quelconque du plan suivant deux faisceaux harmoniques.

Laguerre donne en outre la *condition pour que les* 28 *points doubles d'une courbe de quatrième classe soient situés sur une courbe du sixième ordre.*

Ajoutons, pour achever de montrer l'importance de l'*équation mixte* dans la théorie des courbes, que Laguerre en déduit pour l'hypocycloïde à trois points de rebroussement, un nombre très considérable de propriétés nouvelles, parmi lesquelles nous énoncerons seulement les deux suivantes :

P *et* Q *étant les points où une droite* D, *tangente à une hypocycloïde à trois rebroussements, coupe cette courbe, si le sommet d'un angle de grandeur constante décrit la droite* D, *tandis que l'un des côtés reste tangent à la courbe, l'autre côté de l'angle enveloppe une autre hypocycloïde égale à la première, tangente à* D *et passant par les points* P *et* Q.

M *étant un point mobile sur une ellipse* E *qui passe par un point fixe* A *et qui se projette sur un plan* P *suivant un cercle, le plan perpendiculaire sur le milieu de la corde* AM *coupe le plan* P *suivant une droite qui enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. Si le point* A *se déplace sur l'ellipse, l'hypocycloïde se déplace dans le plan* P *en restant égale à elle-même. Les traces, sur le plan* P, *des plans normaux à l'ellipse enveloppent une hypocycloïde à quatre points de rebroussement, et les deux tangentes doubles de rebroussement de cette courbe sont le lieu des centres des sphères doublement tangentes à l'ellipse.*

Il faut encore rattacher à ces études deux Mémoires : l'un *Sur les courbes du quatrième ordre qui ont trois points doubles d'inflexion,* l'autre *Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes.*

La courbe K du quatrième degré, étudiée dans le premier de ces Mémoires, jouit de nombreuses propriétés qui prennent surtout une forme simple dans le cas particulier où deux des points doubles d'inflexion sont les ombilics du plan; la courbe est alors le lieu des projections du centre d'une hyperbole équilatère sur ses tangentes, c'est-à-dire sur la *lemniscate* de Bernoulli. Sans entrer dans les détails de cette monographie si bien faite, nous indiquerons seulement les propriétés fondamentales de la courbe K.

La cubique polaire d'un point M *de la courbe se décompose en une droite,* qu'on appelle la droite harmonique du point M, *et en une* *conique qui passe par les trois points doubles et touche la courbe au point* M.

Si d'un point M *de la courbe on mène les quatre tangentes dont le point de contact est distinct de* M, *les quatre points de contact sont sur la droite harmonique de* M.

Les six pôles d'une droite par rapport à la courbe sont les sommets du quadrilatère complet formé par les droites harmoniques des points où la droite considérée rencontre la courbe.

La développée d'une conique ayant trois tangentes doubles, sa corrélative rentre dans l'espèce étudiée. Les propriétés obtenues peuvent donc être regardées comme des propriétés relatives aux développées des coniques. Nous citerons seulement celle-ci :

Si l'on considère les quatre points où une tangente quelconque à la développée K *d'une ellipse coupe cette courbe* K, *les tangentes menées en ces points à cette développée concourent en un même point.*

Le dernier Mémoire a un caractère plus général. Il a pour objet l'étude du réseau des courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre que représente, lorsqu'on fait varier les paramètres ξ et η, l'équation

$$A\xi + B\eta + C = 0,$$

dans laquelle A, B, C désignent trois polynômes du $n^{\text{ième}}$ degré en x et y, liés d'ailleurs par la relation

$$Ax + By + C = 0.$$

Par deux points quelconques du plan passe une courbe du réseau. Une telle courbe est déterminée par les valeurs de ξ et η; elle passe d'ailleurs par le point qui a pour coordonnées ξ et η et qui prend le nom de *point principal*. Cela posé, on a les propositions suivantes :

Toutes les courbes du réseau passent par $(n^2 - n + 1)$ *points fixes ou pivots. Deux courbes quelconques du réseau ont en commun, outre les pivots,* $n - 1$ *points, qui sont situés en ligne droite, et le* $n^{\text{ième}}$ *point où* *cette droite rencontre l'une quelconque des courbes est le point principal de cette courbe.*

Les courbes du réseau, qui ont pour points principaux les points d'une droite, ont en commun $n-1$ points situés sur cette droite et qu'on nomme points centraux de la droite. *Si une droite tourne autour d'un point fixe, le lieu de ses points centraux est la courbe du réseau ayant ce point fixe pour point principal.*

Si par chaque point du plan on mène à la courbe du réseau ayant ce point pour point principal les tangentes dont le point de contact est distinct de M : 1° *toutes ces droites enveloppent une courbe* K *de la classe* (n^2-n+1) *et du degré* $3(n-1)$, *qui est le lieu des points principaux des courbes du réseau ayant un point double;* 2° *les points de contact de toutes ces tangentes appartiennent à une courbe* H, *qui est le lieu des points doubles du réseau.*

Si deux courbes de degré n ont $n-1$ points communs en ligne droite, leurs n^2-n+1 autres points communs sont les pivots d'un réseau de l'espèce considérée. En particulier, *les courbes du troisième degré passant par sept points fixes forment un réseau de cette espèce;* c'est des propriétés de ce réseau spécial que M. Aronhold a déduit sa belle *construction de la courbe du quatrième ordre ayant pour tangentes doubles sept droites données.*

Si des seize points communs à deux courbes du quatrième ordre trois sont situés en ligne droite, deux courbes quelconques du même ordre passant par les treize autres points communs se rencontrent en trois nouveaux points situés en ligne droite.

Considérons maintenant les courbes tracées sur une surface du second ordre S.

La surface S possède un double système de génératrices rectilignes; pour la commodité du langage, on nommera *directrices* les génératrices d'un système en conservant le nom de *génératrices* à celles du système opposé. Soit enfin K une conique prise arbitrairement sur la surface et qu'on appellera *conique fondamentale :* les points de cette conique répondent respectivement aux valeurs successives d'un paramètre variable. Par chaque point M de la surface S passe une directrice coupant la conique fondamentale en un seul point dont le paramètre sera désigné par x; de même, par le point M passera une génératrice coupant la conique K en un seul point dont le paramètre sera désigné par y. Laguerre prend les quantités x et y comme les coordonnées du point M, en sorte que l'équation $f(x, y) = 0$ d'une courbe tracée sur la quadrique S indique, par son degré p par rapport à x, en combien de points la courbe coupe une génératrice quelconque, et par son degré q par rapport à y, en combien de points la courbe rencontre l'une quelconque des directrices. Après avoir rendu cette équation homogène en remplaçant x et y par $\frac{x}{x'}$ et $\frac{y}{y'}$, il parvient, par la considération des émanants d'une forme binaire, à montrer qu'on obtient cette équation en égalant à zéro un polynôme ordonné suivant la puissance de $xy' - yx'$ et qui est un covariant double de certains polynômes U, V, W, ... entiers en x et x' et de degrés $p+q$, $p+q-2$, $p+q-4$, ... L'étude de la courbe considérée se trouve ainsi rattachée à l'étude simultanée de ces formes; on pourra toujours, dans un calcul relatif à un système de courbes, faire en sorte qu'on n'ait à considérer que des invariants ou des covariants d'un système de formes binaires et profiter de leurs propriétés connues pour en déduire des propriétés géométriques du système des courbes, ou pour simplifier les opérations. Suivant le choix de la conique fondamentale, l'équation d'une courbe donnée varie, et l'art consiste à obtenir l'équation qui renferme le moins de formes possible. Ainsi, l'équation des cubiques gauches peut, d'une infinité de manières, être ramenée à ne contenir qu'une forme binaire cubique; celle de la biquadratique (intersection de la surface S et d'une autre quadrique n'ayant aucune génératrice commune avec la première) peut être mise, de quatre façons différentes, sous une forme où n'apparaît qu'un seul polynôme du quatrième degré; enfin, pour la quartique gauche (courbe du quatrième ordre par laquelle on ne peut faire passer qu'une surface du second degré), on peut, mais d'une seule manière, ramener son équation à ne renfermer qu'une seule forme biquadratique.

La surface réciproque de celle de Steiner est la surface S du troisième degré qui contient les six arêtes d'un tétraèdre. On voit, en effet, immédiatement que sa réciproque, c'est-à-dire le lieu des pôles de ses plans tangents, par rapport à une quadrique, est une surface S′ du quatrième ordre jouissant de la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ces plans tangents, c'est-à-dire la surface qu'on nomme habituellement *surface de Steiner*. Laguerre a consacré à la surface S deux beaux Mémoires, l'un d'Analyse, l'autre de Géométrie. Le premier a pour point de départ les considérations suivantes : Si l'on désigne par a, b, c, d, e des fonctions linéaires des coordonnées x, y, z, u, l'équation

$$U \equiv (a, b, c, d, e)(\lambda, \mu) = 0$$

représente un plan mobile enveloppant la surface développable

$$I^3 - 27 J^2 = 0,$$

où I et J représentent l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme U; les polynômes a, b, c, d, e sont d'ailleurs reliés par une relation linéaire et homogène dont Laguerre rattache habilement les coefficients numériques à une autre forme binaire. L'équation $J = 0$ représente précisément la surface du troisième ordre S réciproque de celle de Steiner, et l'on voit ainsi que l'étude de cette surface se ramène à la théorie de deux formes biquadratiques simultanées dont l'invariant quadratique est nul. En particulier, comme la quadrique $I = 0$ coupe évidemment la surface S suivant une de ses lignes asymptotiques, on voit que la recherche du système complet de ces courbes, dont la découverte appartient d'ailleurs à Clebsch, revient à la solution du problème suivant : *En donnant aux polynômes a, b, c, d, e toutes les valeurs telles que* J *conserve la même forme, quelles sont les valeurs que peut prendre l'invariant* I? Laguerre résout ce problème et donne en outre un très grand nombre de propriétés nouvelles de la surface et des courbes gauches qui s'y rattachent; comme il faut se borner, nous mentionnerons seulement la propriété suivante, à cause de sa simplicité :

Si, par un point de la surface S, *on mène le cône circonscrit à cette surface, ce cône se décompose en deux cônes du second degré; chacun d'eux touche la surface suivant une cubique gauche, et les surfaces développables ayant ces cubiques pour arêtes de rebroussement coupent la surface* S *suivant les deux lignes asymptotiques qui se croisent au point* M.

Quant au Mémoire de Géométrie pure que Laguerre a écrit sur le même sujet, il a pour point de départ un mode particulier de représentation de la surface S sur un plan ; de ce mode résultent la plupart des théorèmes auxquels l'auteur avait déjà été conduit par l'analyse ci-dessus, ainsi que d'autres propositions, par exemple :

Si les trois faces d'un trièdre touchent la surface S *en trois points situés en ligne droite, parmi les neuf points où les arêtes du trièdre rencontrent la surface, il en est trois qui sont situés sur une même ligne asymptotique.*

Pour achever le compte rendu de la partie de l'œuvre de Laguerre qui est relative à la Géométrie analytique, il nous reste à parler des travaux sur les normales aux courbes et aux surfaces du second ordre.

On aperçoit de suite comment la théorie des formes s'introduit naturellement dans cette étude. En général, trois droites passant par un même point M ne sont pas normales à une conique ayant pour axes deux droites données; $u = 0$ étant l'équation du troisième degré qui détermine les directions des axes et celle de la droite qui joint leur intersection au point M, et $u' = 0$ étant l'équation qui détermine les directions des trois droites issues du point M, la condition nécessaire et suffisante pour que ces trois droites soient normales à la conique ayant pour axes les deux droites données est $\Delta = 0$; Δ désigne l'invariant des formes cubiques u et u', invariant qui s'offre d'ailleurs dans beaucoup d'autres questions de Géométrie, notamment dans la théorie des cubiques gauches.

Après avoir retrouvé par une voie nouvelle les résultats si élégants de Joachimsthal sur les normales aux coniques et aux quadriques, Laguerre obtient une série de propriétés nouvelles parmi lesquelles nous citerons, d'abord relativement aux coniques, les théorèmes suivants :

Si l'on joint un point quelconque M *au centre d'une conique et si l'on mène par ce point des parallèles aux axes de cette courbe, les trois droites ainsi obtenues sont telles que la conjuguée harmonique de chacune d'elles relativement aux deux autres se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux quatre normales que l'on peut mener du point* M *à la conique.*

U *étant la forme du quatrième degré qui, égalée à zéro, détermine les directions des normales menées du point* M *à une conique, et* H *et* S *étant le hessien et l'invariant quadratique de cette forme, l'équation*

$$U+\sqrt{\frac{S}{3}}H=0$$

détermine les directions des droites joignant le point M *aux centres des cercles circonscrits aux quatre triangles formés par les pieds des quatre normales pris trois à trois.*

Puis, sur les surfaces du second ordre, outre la généralisation du premier des deux théorèmes qui précèdent, les propositions que voici :

Le centre de la sphère qui contient les pieds de quatre des normales abaissées d'un point M *sur une quadrique est le milieu du segment qui sépare le point* M *du point dont la projection sur les axes de la quadrique sont les intersections de ces axes avec le plan des deux autres normales.*

Les pieds des six normales que l'on peut abaisser d'un point M *sur une quadrique, ainsi que le point* M *et le centre* O *de la surface, appartiennent à une même cubique gauche; et, si, par le point* O*, on mène un plan parallèle à deux quelconques des normales, ce plan coupe les cubiques en deux points situés sur la sphère qui contient les pieds des quatre autres normales.*

Mentionnons enfin le problème suivant, qui a quatre solutions et que Laguerre résout à l'aide de la règle et du compas : *Déterminer toutes les coniques qui, passant par un point donné, sont normales à quatre droites concourantes.*

V.

C'est un théorème de M. Bertrand qui a provoqué les premières études de Laguerre sur la Géométrie infinitésimale.

M. Bertrand avait démontré depuis longtemps que les normales principales d'une courbe gauche ne peuvent être les normales principales d'une autre courbe, à moins qu'il n'existe une relation linéaire entre les deux courbures de la ligne donnée. Laguerre a fait voir que, si une surface réglée est applicable sur un hyperboloïde de révolution, sa ligne de striction est une des courbes étudiées par M. Bertrand, et que, réciproquement, on peut toujours considérer une telle courbe comme la ligne de striction d'une surface réglée applicable sur un hyperboloïde de révolution.

Nous ne pouvons citer tous les résultats, souvent utilisés depuis, dont Laguerre a enrichi cette branche des Sciences mathématiques. Nous devons surtout attirer l'attention sur l'introduction en Géométrie infinitésimale d'un élément nouveau, qui semble appelé à jouer un rôle important dans la Géométrie des lignes tracées sur les surfaces, si l'on en juge du moins par l'heureux parti que l'auteur en a tiré pour la solution de plusieurs problèmes difficiles.

Que l'on imagine en chaque point d'une courbe gauche un segment normal dont la longueur et la direction soient fixées chaque fois par la position du point pris sur la courbe, puis que l'on projette sur une corde infiniment petite les segments normaux relatifs à ses extrémités ; la somme algébrique ω de ces projections est l'élément dont nous voulons parler.

C'est un infiniment petit d'ordre impair, en général du troisième ordre; sinon il est du cinquième ou du septième; enfin, il ne peut être supérieur au septième ordre sans être absolument nul, et alors la courbe *peut être placée sur une surface du second ordre.* Ce beau théorème permet à l'auteur de définir directement et indépendamment de toute surface du second ordre, les lignes qui peuvent être placées sur une telle surface, par exemple les cubiques et les biquadratiques gauches, et ce qui est plus remarquable encore, les lignes géodésiques. Ces lignes sont caractérisées par la propriété suivante : *Si, en deux points* M *et* M′ *d'une géodésique tracée sur une surface du second ordre, on prend sur les normales principales des longueurs* MN *et* M′N′ *proportionnelles aux racines cubiques des rayons de courbure correspondants, les projections de ces segments sur la corde* MM′ *sont égales.* De là résultent deux équations différentielles qui lient l'arc, la courbure et la torsion; Laguerre écrit explicitement l'une d'elles, qui offre cette particularité remarquable, de pouvoir être intégrée sans qu'on établisse aucune relation entre la torsion et la courbure, en sorte que le carré de la torsion s'exprime algébriquement en fonction de la courbure et de ses deux premières dérivées.

Il convient en outre de signaler, sur les lignes géodésiques des surfaces du second ordre, une curieuse extension d'un théorème de Maclaurin relatif à l'ellipse. Si l'on nomme *axe de courbure,* en un point d'une telle géodésique, la droite qui a respectivement pour projections sur la tangente, la binormale et la normale principale, les quantités

$$\frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{r}, \quad -\frac{1}{3\rho}\frac{d\rho}{ds},$$

ρ et r désignant les rayons de courbure et de torsion au point considéré, Laguerre montre que :

1° *L'axe de courbure en un point* M *est perpendiculaire au plan diamétral conjugué de la tangente en ce point;*

2° *Si le point* M *se déplace sur la géodésique, tandis qu'un autre point* M′ *décrit une autre géodésique de la même surface, le rapport de la projection de l'axe de courbure en* M *sur la tangente en* M′ *à la projection de l'axe de courbure en* M′ *sur la tangente en* M *reste constant;*

il est d'ailleurs égal à l'unité, si les deux lignes géodésiques touchent une même ligne de courbure.

De là résulte une construction facile de l'axe de courbure en un point quelconque d'une ligne géodésique d'une surface du second ordre et, par suite, le moyen d'obtenir les valeurs en ce point des quantités r, ρ et $\frac{d\rho}{ds}$.

Mentionnons encore, au sujet des surfaces du second ordre, la solution graphique que Laguerre a donnée pour la détermination, en un point quelconque M, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux. *La normale en* M *rencontre les plans principaux de la surface en trois points; les trois droites* (D), *menées par ces points perpendiculairement aux plans principaux correspondants, déterminent un hyperboloïde. On peut construire deux génératrices de cet hyperboloïde appartenant au système* (D) *et perpendiculaires au diamètre passant par* M ; *ces génératrices rencontrent la normale en* M *aux deux centres de courbure principaux relatifs à ce point, et les plans, menés par le diamètre perpendiculairement à ces deux génératrices, coupent le plan tangent en* M *suivant les axes de l'indicatrice.*

Nous devons enfin citer, avant de clore ce paragraphe :

1° Une Note sur la détermination des lignes géodésiques des surfaces dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{du^2}{v} + \frac{dv^2}{u};$$

ces lignes sont déterminées par la relation

$$\frac{\cos^3 i}{\sqrt{v^3}} + \frac{\sin^3 i}{\sqrt{u^3}} = \text{const.},$$

i désignant l'inclinaison de la géodésique sur la courbe $v = \text{const.}$;

2° Une exposition simple et lumineuse des formules fondamentales de la théorie des surfaces, telles qu'elles résultent des travaux de MM. O. Bonnet et Codazzi. Laguerre a déduit de ces formules certaines propriétés des systèmes de droites normales à une surface qui méritent d'être remarquées :

Si des rayons émanants d'une surface S *sont normaux à une même surface et si chacun d'eux fait un angle constant avec la surface* S, *la projection de ce système de rayons sur* S *est un système de lignes géodésiques de cette surface.*

Étant donnés un système de lignes géodésiques tracées sur une surface et leurs trajectoires orthogonales, si par chaque point M *de l'une de ces lignes on mène une droite située dans le plan de la tangente à cette ligne en* M *et de la normale à la surface, l'angle de cette droite avec le plan tangent étant d'ailleurs constant le long d'une trajectoire orthogonale* (*mais pouvant varier quand on passe d'une trajectoire à l'autre*), *toutes ces droites sont normales à une même surface.*

VI.

Tout théorème de Géométrie concernant des segments ou des angles comporte l'emploi des signes; mais ces théorèmes se distribuent en deux genres bien distincts.

Dans les uns, le sens positif que l'on doit attribuer à chacune des droites de la figure est arbitraire, et les énoncés, s'ils sont corrects, doivent se vérifier de quelque manière qu'on fasse cette attribution.

Dans les autres, le sens positif n'est arbitraire que pour certaines droites de la figure; et le sens positif des autres droites est déterminé par le théorème lui-même dont il est un élément essentiel. Ce sont les propositions de ce dernier genre qui constituent ce que Laguerre appelait la *Géométrie de direction.*

Laguerre donne le nom de *semi-droite* à une droite décrite dans un sens donné; une droite, pouvant être parcourue en deux sens différents, détermine donc deux *semi-droites opposées.* De même, un cercle décrit dans un sens indiqué reçoit le nom de *cycle,* et un même cercle détermine deux *cycles opposés.* En outre, une semi-droite et un cycle sont dits *tangents,* si la droite et le cercle correspondants se touchent, et si, de plus, sur l'élément commun, le sens est le même pour la droite et pour le cercle ; si les sens sont inverses, on dit que la semi-droite est une tangente apparente du cycle.

Il résulte immédiatement de là qu'*on ne peut mener à un cycle donné qu'une tangente parallèle à une semi-droite donnée* et que *deux cycles donnés n'ont que deux tangentes communes et,* par suite, *qu'un seul centre de similitude.* D'ailleurs, les trois centres de similitude de trois cycles considérés deux à deux sont sur une même droite qui est l'*axe de similitude* de ces trois cycles.

On nomme *distance tangentielle de deux cycles* la distance comprise, sur l'une des deux tangentes communes, entre les deux points de contact ; elle n'est déterminée qu'en valeur absolue.

Le rayon d'un cycle sera considéré comme positif si le cycle est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre et comme négatif dans le cas contraire. Par suite, T étant la distance tangentielle de deux cycles, R et R′ leurs rayons et D la distance des centres, on a la relation

$$T^2 = D^2 - (R - R')^2,$$

qui se réduit à

$$T^2 = -4R^2$$

pour deux cycles opposés.

Le cycle qui a pour centre un point donné et qui touche une semi-droite donnée est bien déterminé ; la distance du point à la semi-droite est le rayon du cercle ; elle est donc déterminée en grandeur et en signe.

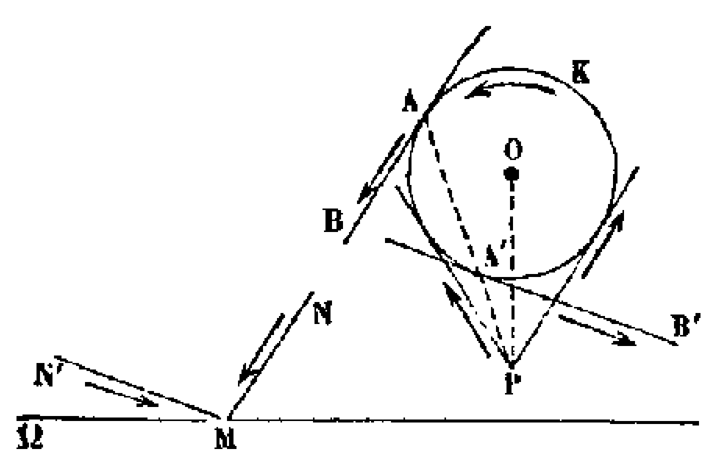
Un point doit être considéré comme un cycle infiniment petit et toutes les semi-droites passant par ce point comme des tangentes à ce cycle.

Étant données deux semi-droites, le lieu des centres des cycles qui leur sont tangents est une droite qu'on nommera la *bissectrice des deux semi-droites.* Par suite, le cycle astreint à toucher trois semi-droites données est unique, et son centre est à la rencontre des trois bissectrices des semi-droites prises deux à deux.

Il importe d'observer que les cycles qui touchent deux semi-droites opposées sont les divers points de la droite qu'elles déterminent. On le voit, en supposant que, le point d'intersection de deux semi-droites restant fixe, l'angle de ces semi-droites décroisse indéfiniment de façon que les deux semi-droites viennent se confondre avec leurs bissectrices; à la limite, les cycles inscrits se réduisent à des points, tandis que les deux semi-droites deviennent des semi-droites opposées.

Ces définitions étant établies, voici en quoi consiste la *méthode de transformation par semi-droites réciproques* qui constitue, sans contredit, l'une des plus ingénieuses créations de Laguerre.

Considérons une droite fixe Ω et un cycle K situés dans un même plan; soit P un point choisi arbitrairement sur la perpendiculaire abaissée du centre O du cycle sur la droite Ω; à chaque semi-droite MN du plan, on peut faire correspondre une autre semi-droite de la façon suivante. Menons au cycle K la tangente AB parallèle à MN, joignons le



point de contact A au point P; puis, au point A′ où la droite AP coupe le cycle, menons la tangente A′B′; la semi-droite MN′ menée parallèlement à A′B′ par le point M où MN rencontre Ω sera la semi-droite correspondante à MN. Il est évident, d'après les constructions indiquées, que MN correspond réciproquement à MN′; on dit, d'après cela, que ces semi-droites sont *réciproques*.

On démontre aisément que *deux couples quelconques de semi-droites réciproques sont tangentes à un même cycle*. La transformation se trouve caractérisée par cette propriété et par celle qui est contenue dans la définition même et qui consiste en ce que *deux semi-droites réciproques se croisent sur l'axe Ω de la transformation*.

Il est clair que la transformation est définie quand on se donne l'axe Ω de transformation et deux semi-droites réciproques D et D'; pour obtenir la semi-droite Δ' réciproque d'une semi-droite quelconque Δ, il suffira de construire le cycle tangent à D, D' et Δ; la seconde tangente menée au cycle par le point M où Δ coupe l'axe Ω sera la semi-droite demandée Δ'.

Si l'on considère une courbe C comme l'enveloppe d'une semi-droite mobile Δ, la réciproque Δ' de Δ enveloppera une courbe C' qu'on nomme la *transformée* de la courbe C.

On démontre :

1° Que des semi-droites parallèles ont pour réciproques des semi-droites parallèles et qu'il y a deux séries de semi-droites parallèles qui se transforment en elles-mêmes ;

2° Que, si une semi-droite touche deux courbes en deux points P et Q et si la semi-droite réciproque Δ' touche la transformée aux points P' et Q', les deux longueurs PQ et P'Q' sont égales ;

3° Qu'un cycle K a pour transformée un cycle K'; l'axe radical de K et K' est l'axe de transformation ; leurs tangentes communes sont parallèles à deux directions fixes (directions des semi-droites qui se transforment en elles-mêmes); la distance tangentielle de deux cycles est d'ailleurs égale à la distance tangentielle des deux cycles correspondants.

Désignons par R et R' les rayons des deux cycles et par D et D' les distances de leurs centres à l'axe Ω ; R et R' sont donnés en grandeur et en signe, et il en est de même de D et D', l'axe de transformation étant ici considéré comme une semi-droite dont on fixe le sens arbitrairement. Les rapports

$$\frac{D-D'}{R-R'}, \quad \frac{D+D'}{R+R'}$$

ont une même valeur constante qu'on nomme *module de la transformation*. Une transformation étant définie par son axe et son module, il existe une infinité de cycles qui se transforment en simples points ;

leur propriété caractéristique consiste dans la proportionnalité de leur rayon R à la distance D de leur centre à l'axe. On peut transformer en trois points trois cycles qui ne sont pas rencontrés par leur axe de similitude.

Tels sont les principes fort simples qui servent de fondement à la transformation par semi-droites réciproques.

Cette transformation peut servir, comme la transformation par rayons vecteurs réciproques, soit à simplifier la solution de certains problèmes, soit à généraliser certaines propriétés géométriques.

Si l'on propose, par exemple, de construire un *cycle tangent à trois cycles donnés,* on transformera ces cycles en trois points en prenant pour axe de transformation l'axe de similitude. Le cercle passant par ces points déterminera deux cycles opposés dont les réciproques sont les solutions du problème. D'ailleurs, comme deux cycles opposés rencontrent l'axe de transformation aux mêmes points, il en est de même de leurs réciproques, d'où l'on voit que la question proposée a deux solutions.

Le problème de mener un *cercle tangent à trois cercles donnés* se ramène immédiatement au précédent en attribuant un sens à chaque cercle de manière à le transformer en cycle; cette attribution pouvant se faire de quatre manières différentes, on voit qu'il y a huit solutions.

Observons encore qu'on peut souvent avec avantage employer simultanément la transformation par semi-droites réciproques et la transformation par rayons vecteurs réciproques. Par cette double transformation, on peut transformer cinq cycles en deux semi-droites et trois points.

C'est dans la géométrie de la sphère que Laguerre a puisé l'idée de sa théorie des cycles; voici comment :

Lorsqu'un point M se déplace sur une sphère, le grand cercle dont ce point est le pôle enveloppe une courbe sphérique C′ corrélative de la courbe C décrite par le point M. Mais, si à un pôle M répond un grand cercle polaire unique, à un grand cercle correspondent deux pôles, en sorte que la théorie des courbes sphériques ainsi présentée offre quelque chose de défectueux. C'est pour faire disparaître cette imperfection que Laguerre a imaginé de faire correspondre à un point M, non plus le grand cercle polaire, mais ce cercle parcouru dans un sens déterminé pour un spectateur placé sur la sphère et ayant ses pieds en M ; en appelant *grand cycle* le cercle ainsi défini de position et de direction, on voit qu'à un point de la sphère répond un grand cycle polaire bien déterminé, et, réciproquement, qu'à un grand cycle correspond un pôle unique. De cette manière, la corrélative d'une courbe algébrique décrite par un point mobile sur la sphère est l'enveloppe de grands cycles et, par suite, une *courbe de direction*, c'est-à-dire une courbe telle qu'en chaque point sa tangente sphérique (arc de grand cercle) ait non seulement sa position, mais encore sa direction déterminées. Ces notions s'imposent évidemment quand on veut approfondir la géométrie de la sphère. Si maintenant on suppose que, le rayon de la sphère croissant au delà de toute limite, la sphère dégénère en un plan, les grands cycles deviendront des semi-droites, et l'on voit même ainsi comment Laguerre a été conduit à considérer les courbes planes de la quatrième classe, auxquelles il a donné le nom d'*hypercycles*. Ces courbes ne pouvaient sans doute lui échapper puisqu'elles sont les transformées par semi-droites réciproques de la parabole et qu'il était naturel d'appliquer le mode de transformation à cette ligne, la plus simple après le cercle. Mais, par le fait, c'est en étudiant les courbes de direction corrélatives des cassiniennes sphériques dont nous avons parlé au § III, puis en faisant dégénérer la sphère en un plan, que Laguerre a obtenu les premières propriétés des hypercycles.

Nous ne voudrions pas être trop longs; mais quelques indications sont encore nécessaires pour montrer l'extension que Laguerre a su donner à cette théorie.

Le cycle et l'hypercycle sont des courbes de direction, mais il n'en est pas ainsi d'une courbe algébrique quelconque. Pour qu'on puisse transformer une courbe algébrique C de classe n en une courbe de direction C_0, en la supposant décrite dans un certain sens, il faut que, parmi les $2n$ tangentes communes à la courbe C et à un cycle quelconque K, il y en ait seulement n qui soient des tangentes effectives à C_0, les n autres étant des tangentes apparentes. L'équation qui détermine les tangentes communes à K et à C doit donc, par l'extraction d'une racine carrée, se ramener à la résolution de deux équations de degré n, et comme, en coordonnées rectangulaires, l'équation tangentielle d'un cercle quelconque est

$$u^2 + v^2 = (\alpha u + \beta v + \gamma)^2,$$

il en résulte que *l'équation tangentielle la plus générale d'une courbe de direction est de la forme*

$$F^2(u, v) - (u^2 + v^2)\,\Phi^2(u, v) = 0,$$

F *et* Φ *désignant des fonctions rationnelles de* u *et de* v. Dans tout autre cas, et tel est celui d'une conique quelconque différente du cercle, pour transformer une courbe algébrique C en une courbe de direction, il faut la considérer comme double, c'est-à-dire comme résultant de la superposition de deux courbes opposées qui sont l'enveloppe d'un cycle de rayon infiniment petit dont le centre décrit la ligne C.

Les cycles, qui, ayant leurs centres sur une courbe algébrique, touchent une même semi-droite, enveloppent évidemment une courbe de direction qui est une anticaustique de la ligne primitive, les rayons incidents étant perpendiculaires à la semi-droite considérée. Ainsi toute anticaustique d'une courbe algébrique est une courbe de direction, et réciproquement une courbe de direction quelconque est une anticaustique d'une infinité de lignes algébriques qu'on peut déterminer.

Les courbes parallèles à une courbe de direction sont également des courbes de direction, et il en est de même de l'enveloppe de leurs normales.

Outre de nombreuses propriétés des systèmes de cycles et les conséquences intéressantes qui en résultent relativement aux coniques, Laguerre a donné une théorie complète des hypercycles et en particulier de l'hypercycle cubique. Tandis qu'un hypercycle quelconque peut être défini comme une courbe de la quatrième classe et du sixième ordre, passant par les ombilics du plan et ayant trois tangentes doubles dont l'une est la droite de l'infini, ou encore comme une anticaustique par réfraction de la parabole, les rayons incidents étant parallèles, l'hypercycle cubique peut être défini comme une courbe de troisième classe, passant par les ombilics, touchant la droite de l'infini et ayant une tangente double apparente, ou encore comme une anticaustique par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles; c'est la courbe de direction la plus générale de la troisième classe, et, par suite, la première à étudier après les cycles, qui constituent à eux seuls les courbes de direction de la seconde classe. Laguerre a résolu, relativement à l'hypercycle cubique, les divers problèmes qui n'exigent que l'emploi de la règle et du compas et a indiqué un grand nombre de propriétés, parmi lesquelles il faut surtout signaler une relation remarquable entre six tangentes quelconques.

Toutes les notions qui précèdent peuvent d'ailleurs être étendues à l'espace, notamment la méthode de transformation qui est alors une *transformation par semi-plans réciproques* et d'où Laguerre a déduit, entre autres applications, les beaux théorèmes de M. Darboux sur les anticaustiques des surfaces du second ordre.

VII.

Passons maintenant aux travaux d'Analyse pure.

Les premières recherches analytiques de Laguerre ont pour objet des méthodes d'approximation pour des fonctions spéciales. Elles trouvent leur point de départ dans certains Mémoires de Lagrange ou de Jacobi et dans divers travaux de M. Hermite, pour lequel Laguerre professait une si légitime admiration.

Lagrange s'était occupé de la réduction en fraction continue d'une fonction définie par une équation différentielle du premier ordre à coefficients rationnels. Laguerre, considérant le cas particulièrement important où l'équation est linéaire, a résolu la question d'une manière bien plus complète en signalant et utilisant les liens étroits qui rattachent cette recherche à la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre admettant pour intégrales des polynômes algébriques. Soit une fonction z, développable suivant les puissances décroissantes de x et satisfaisant à l'équation différentielle

$$Wz' = 2Vz + U,$$

où U, V, W désignent des polynômes entiers. La réduite de rang $n+1$ étant

$$\frac{\varphi_n}{f_n},$$

Laguerre montre d'abord que f_n satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre dont

$$e^{-\int \frac{V}{W} dx} (\varphi_n - f_n z)$$

est une deuxième solution; il ramène ainsi la question à former cette équation du second ordre et à déterminer les polynômes du premier degré Q_n qui figurent dans la formule de récurrence

$$f_{n+1} - Q_n f_n + f_{n-1} = 0.$$

A cet effet, il introduit des polynômes auxiliaires, dont les uns Θ_n sont du degré de l'expression

$$\frac{V}{x} + \frac{W}{x^2},$$

et les autres Ω_n d'un degré supérieur d'une unité. Ces polynômes satisfont à quatre identités, d'où l'on déduit immédiatement et sans calcul les polynômes Q_n et l'équation différentielle, dans le cas où Θ_n est de degré zéro. Lorsque Θ_n est d'un degré plus élevé, les identités dont nous venons de parler permettent de déduire Θ_{n-1} et Ω_{n-1} de Θ_n et Ω_n et, par suite, de calculer par récurrence les polynômes Q_n, ainsi que les numérateurs et les dénominateurs des réduites.

Laguerre a appliqué cette théorie à diverses fonctions, et notamment aux fonctions

$$e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}}, \quad \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^m, \quad \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

On sait que Laplace a donné, dans la *Mécanique céleste*, le développement en fraction continue de l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\,dx;$$

sa démonstration, reposant sur l'emploi d'une série divergente, est absolument inadmissible, bien que les résultats soient exacts, comme l'a fait voir Jacobi en démontrant ces résultats directement. Laguerre fait observer que la méthode qu'il a appliquée à l'intégrale

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

subsiste entièrement pour l'intégrale de Laplace; ajoutons que sa méthode a l'avantage de montrer avec netteté comment, en partant d'une série divergente, on peut arriver néanmoins à une fraction continue donnant la valeur de la fonction à représenter.

Le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme avait déjà fixé l'attention de Jacobi, mais seulement au point de vue de la détermination des coefficients. Laguerre a montré comment on pouvait rattacher cette théorie difficile à celle beaucoup plus aisée de l'approximation par les fractions rationnelles. Il a traité, en particulier, deux cas fort intéressants : celui de e^z suivant les puissances d'un polynôme $F(z)$, et celui de $f(x+tz)$, f désignant une fonction quelconque, suivant les puissances de $x(x-1)$. Dans le premier cas, il est conduit à une équation différentielle linéaire d'ordre n qu'il intègre complètement, en employant l'équation adjointe de Lagrange.

L'étude du second le conduit à une élégante formule d'interpolation, trouvée antérieurement et de tout autre façon par M. Hermite.

Voici encore, dans le même ordre d'idées, un résultat très important. Après avoir démontré géométriquement ce théorème de M. Hermite : « *Si, pour toutes les racines de l'équation*

$$F(x) + i\Phi(x) = 0,$$

le coefficient de i a le même signe, l'équation

$$pF(x) + q\Phi(x) = 0,$$

où p et q désignent deux nombres réels arbitraires, a toutes ses racines réelles », Laguerre établit la proposition suivante :

$F(x)$ *désignant un polynôme de degré* $n\mu$, *tellement choisi que les fractions*

$$\frac{\Phi_1(x)}{F(x)}, \quad \frac{\Phi_2(x)}{F(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{\Phi_n(x)}{F(x)}$$

approchent le plus des transcendantes

$$e^{a_1 x}, \quad e^{a_2 x}, \quad \ldots, \quad e^{a_n x},$$

le polynôme $F(x)$ *est entièrement caractérisé par cette propriété que, dans le développement de* $F(x)e^{ax}$ *suivant les puissances croissantes de* x, *le coefficient de* $x^{\mu(n-1)}$ *est*

$$z^\mu(z-a_1)^\mu(z-a_2)^\mu, \quad \ldots, \quad (z-a_n)^\mu.$$

L'expression de $F(x)$ résulte de là fort aisément.

Citons enfin, pour ne rien omettre d'essentiel :

1° Une étude sur le développement de l'intégrale

$$\int z^n e^{-\frac{1}{2}z^2 + zx},$$

qui conduit aux polynômes U_n, rencontrés déjà par M. Hermite à propos des dérivées successives de $e^{\frac{x^2}{2}}$;

2° Une démonstration, par la théorie des fractions continues algébriques, du théorème fondamental de la théorie des fonctions symétriques des racines d'une équation, théorème qui, donné d'abord par Cauchy, avait été démontré par Borchardt au moyen de la théorie des fonctions ultra-elliptiques.

3° Une Note sur la partition des nombres, qui se rattache à la décomposition en fractions simples de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)\ldots(1-z^l)},$$

a, b, ..., l étant les coefficients entiers de l'équation

$$ax + by + \ldots + lu = N,$$

dont il s'agit de trouver *approximativement* le nombre $T(N)$ des solutions entières et positives. En appliquant sa théorie générale aux cas simples

$$ax + by = N \qquad \text{et} \qquad ax + by + cz = N.$$

Laguerre obtient les formules

$$T(N) = \frac{N}{ab},$$

$$T(N) = \frac{N}{2abc}(N + a + b + c),$$

dont la première est bien connue et attribuée à Paoli.

VIII.

Les travaux de Laguerre sur la résolution des équations numériques forment par leur ensemble la partie la plus considérable de son œuvre, et peut-être celle à laquelle il attachait le plus de prix. Il se proposait, avant que la mort vînt le surprendre, de coordonner ces recherches et de les réunir en un Volume qui en eût renfermé l'exposition complète. Ce Volume, dont seulement les premiers Chapitres ont été rédigés et publiés dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* eût été divisé en trois Sections ayant trait respectivement à la généralisation et aux applications du théorème de Descartes, aux méthodes d'approximation pour le calcul des racines, enfin à la recherche des racines imaginaires. C'est cet ordre même que nous allons suivre ici.

La première Partie est la plus complète, et Laguerre semble avoir dit son dernier mot sur ce sujet.

Le théorème de Descartes consiste dans la proposition suivante :

$F(x)$ *désignant un polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de* x, *le nombre des racines positives de l'équation* $F(x) = 0$ *est au plus égal au nombre des variations du polynôme* $F(x)$.

Laguerre observe que, la proposition étant évidente lorsque les termes du polynôme ont tous le même signe, il suffit de prouver que le théorème, étant admis dans le cas où $F(x)$ compte $m - 1$ variations, subsiste lorsque $F(x)$ a une variation de plus. A cet effet, il applique le principe de Rolle à l'équation

$$x^{-a} F(x) = 0,$$

dans laquelle a est un nombre arbitraire et dont les racines positives sont d'ailleurs les mêmes que celles de

$$F(x) = 0. \tag{1}$$

Il en conclut que le nombre des racines positives de cette équation (1) est au plus supérieur d'une unité à celui des racines positives de l'équation

$$x F'(x) - a F(x) = 0. \tag{2}$$

Or on voit aisément, en mettant en évidence la composition des polynômes $F(x)$ et $F'(x)$, que le premier membre de l'équation (2) offre, comme $F(x)$, $m - 1$ variations ; l'équation (2) a donc au plus $m - 1$ racines positives, et, par suite, l'équation proposée (1) en renferme un nombre au plus égal à m.

Nous avons indiqué cette démonstration, non seulement à cause de sa simplicité, mais surtout parce qu'on y trouve l'origine de l'extrême généralisation que Laguerre est parvenu à donner au théorème de Descartes. Rien dans cette démonstration, et c'est là le point décisif, ne suppose que $F(x)$ soit un polynôme entier; les exposants pourraient être fractionnaires ou incommensurables; $F(x)$ peut même être une série ordonnée suivant les puissances décroissantes ou croissantes de x. Le théorème de Descartes prend dès lors une extension considérable, et Laguerre l'énonce comme il suit :

W *étant une série ordonnée suivant les puissances entières fractionnaires ou incommensurables de* x, *le nombre des valeurs positives de* x, *pour lesquelles la série* W *est convergente et a pour valeur zéro, est au plus égal au nombre des variations que présente la suite des divers termes de la série.*

De là découlent un grand nombre de règles simples et nouvelles pour certains types d'équations remarquables, telles que

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l} = 0$$

et

$$\int_a^b e^{-zx}\Phi(z)\,dz = 0,$$

$$\int_a^b \frac{\Phi(z)\,dz}{(z-x)^n} = 0,$$

où $\Phi(z)$ désigne une fonction qui peut être discontinue. Nous citerons encore les deux théorèmes suivants :

$F(x)$ *désignant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de* x *et ayant tous ses coefficients positifs ou nuls;* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *désignant, d'autre part, des quantités positives rangées par ordre décroissant de grandeur, le nombre des racines positives de l'équation*

$$A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = 0,$$

c'est-à-dire le nombre des valeurs positives de x, *pour lesquelles le premier membre converge vers zéro, est au plus égal au nombre des variations de la suite*

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n.$$

Étant donnés un polynôme entier $f(x)$ *et un nombre positif quelconque* α, *on peut toujours déterminer un nombre entier* p, *tel que l'équation*

$$(1 + \alpha x)^p f(x) = 0$$

présente autant de variations que l'équation $f(x) = 0$ *a de racines positives.*

Cette seconde proposition a été généralisée depuis par M. Poincaré. Mais Laguerre ne s'est pas arrêté là. Il a étendu d'abord la règle des signes de Descartes, au cas où le premier membre de l'équation est exprimé linéairement au moyen des polynômes de Legendre, et plus généralement au moyen de polynômes entiers satisfaisant à certaines équations différentielles linéaires du second ordre; puis, poursuivant encore le cours de ces recherches, il a étudié les équations dont le premier membre est une fonction entière de x, en introduisant, d'après Weierstrass, la notion du genre d'une fonction. La plupart des propositions relatives aux équations dont le premier membre est un polynôme entier ne s'appliquent plus alors que sous de nombreuses réserves. Tel est, par exemple, le théorème des lacunes; après avoir cité des exemples où cette proposition est en défaut, Laguerre a montré que le théorème subsiste dans le cas où les éléments simples du premier membre de l'équation sont des fonctions du genre zéro ou du genre 1, ou des exponentielles de la forme e^{ax^2+bx+c}, a, b, c désignant des nombres réels quelconques dont le premier est essentiellement négatif. Dans ce même ordre d'idées, il a fait voir encore que :

Si la fonction entière du genre n, $F(x)$, *ne s'annule que pour un nombre limité de valeurs imaginaires, toutes les dérivées de* $F(x)$ *sont du genre* n.

Enfin, il a réussi à démontrer que la transcendante de Bessel est du genre zéro, proposition que Fourier avait trouvée jadis, mais par des raisonnements justement contestés par Poisson et Cauchy.

Passons maintenant à la deuxième Partie, c'est-à-dire aux questions relatives à l'approximation des racines des équations algébriques ou transcendantes.

La méthode de Newton pour déterminer une limite supérieure des racines positives d'une équation

$$(1) \qquad f(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

consiste à trouver une quantité a qui rende positives la fonction $f(x)$ et ses dérivées successives. Mais le calcul des valeurs numériques de la suite

$$(2) \qquad f(x), \quad f'(x), \quad \ldots, \quad f^{(m)}(x)$$

est pénible, d'autant plus que la connaissance des valeurs de plusieurs termes de cette suite ne facilite en rien le calcul des suivants. Laguerre montre qu'on peut atteindre le même but à l'aide des fonctions

$$(3) \qquad \begin{cases} f_m(x) = A_0, \\ f_{m-1}(x) = A_0 x + A_1, \\ f_{m-2}(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_1(x) = A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}, \\ f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m, \end{cases}$$

dont le calcul est beaucoup plus aisé, attendu que les valeurs de ces fonctions se présentent successivement d'elles-mêmes dans le calcul de la valeur que prend la dernière $f(x)$ pour une valeur donnée de x. Ainsi :

Tout nombre positif a, qui rend positifs les polynômes de la suite (3), *est une limite supérieure des racines de l'équation* (1).

Les mêmes observations critiques s'appliquent encore, et avec plus de force, au théorème de Budan qui indique comme limite supérieure du nombre des racines réelles comprises entre deux nombres a et b la différence entre les nombres de variations qu'offre la suite (2) pour $x = a$ et $x = b$. Laguerre résout le même problème, d'une manière bien moins pénible :

Si l'on désigne par a et b deux nombres positifs et par

$$C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-2} x^{m-2}$$

la partie entière du quotient du polynôme $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, le nombre des racines réelles de l'équation (1) *comprises entre a et b est au plus égal au nombre des variations des termes de la suite*

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} f(a), \\ f(b) - b\,(b-a)\,C_0, \\ f(b) - b^2(b-a)\,C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(b) - b^{m-1}(b-a)\,C_{m-2}, \\ f(b); \end{array}\right.$$

et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

Faisant ensuite l'application de ce théorème à la question suivante : *déterminer deux limites entre lesquelles restent comprises les valeurs du polynôme $f(x)$ lorsque x reçoit toutes les valeurs situées entre deux nombres positifs a et b*, il trouve que ces limites sont le plus petit et le plus grand des termes de la suite (4).

Dès qu'on a une valeur suffisamment approchée d'une racine d'une équation, la méthode d'approximation de Newton et la méthode des parties proportionnelles fournissent l'une et l'autre des moyens commodes et rapides pour approcher indéfiniment de cette racine. La difficulté principale est d'obtenir cette valeur assez approchée pour servir de point de départ. Laguerre cherche à l'éviter en posant la question d'autre façon : *Étant donné un nombre arbitraire x, déterminer, sans tâtonnement et par une suite d'opérations régulières, des valeurs de plus* *en plus approchées de la racine immédiatement supérieure ou immédiatement inférieure à x.* Il résout complètement ce problème pour les équations algébriques dont toutes les racines sont réelles, à l'aide de la proposition suivante :

En désignant par $f(x) = 0$ une équation de degré n dont toutes les racines sont réelles et par α une quantité arbitraire, les deux valeurs de x déterminées par l'équation

$$(5) \qquad \frac{1}{x-\alpha} = -\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} + \frac{\varepsilon}{nf(\alpha)}\sqrt{(n-1)\,\mathrm{H}(\alpha)}$$

sont respectivement comprises entre α et les deux racines de l'équation proposée qui avoisinent x.

Dans la formule (5), ε désigne l'unité prise avec le signe de $f(\alpha)$, et $\mathrm{H}(x)$ représente le hessien

$$\mathrm{H}(x) = f'^2(x) - nf(x)f''(x)$$

de $f(x)$; on sait d'ailleurs que ce hessien a une valeur toujours positive.

Ce théorème résout pleinement la question proposée : on tirera de la formule (5) une valeur convenable de $x - \alpha$; puis, en partant de la nouvelle valeur de x, ou, pour faciliter les substitutions, de toute autre valeur comprise entre x et α, on continuera les opérations qui permettront ainsi d'approcher indéfiniment de la racine.

Cette méthode offre sur celle de Newton l'avantage de n'être jamais en défaut, quelle que soit la valeur de départ α, et l'on démontre sans peine que, dans le cas où la méthode de Newton peut être employée avec sûreté, la formule (5) donne toujours une approximation plus grande.

Signalons encore un théorème très important sur la séparation des racines des équations dont toutes les racines sont réelles :

Si l'on désigne par α une quantité réelle arbitraire, les nombres ξ et ξ', *qui satisfont à la relation*

$$(\xi-\alpha)(\xi'-\alpha)[f'^2(\alpha)-f(\alpha)f''(\alpha)] \\ +(\xi+\xi'-2\alpha)f(\alpha)f'(\alpha)+nf(\alpha)^2=0,$$

et dont l'un est arbitraire, séparent les racines de l'équation, de degré n, $f(x)=0$.

Nous appellerons, à ce sujet, l'attention sur le principe élégant qui sert de base à la démonstration de ce théorème et de plusieurs autres propositions du même genre : il consiste à mettre la relation qui exprime la propriété à démontrer sous une forme telle, qu'elle ne renferme que des covariants de la forme binaire $f(x,y)=0$; la propriété ainsi présentée se trouve alors projective et il suffit, pour l'établir généralement, de la démontrer pour deux valeurs particulières des deux variables indépendantes.

Le cas des équations dont toutes les racines sont réelles est très important, les équations de ce genre s'offrant d'une manière fréquente en Analyse. La place nous manque pour suivre Laguerre dans les diverses applications de ses méthodes aux équations qui déterminent $\cos\frac{\alpha}{n}$, $\tang\frac{\alpha}{n}$, ..., ainsi qu'à celles qu'on obtient en égalant à zéro les polynômes X_n de Legendre, les polynômes U_n de M. Hermite, et plus généralement les polynômes $\Phi(x)$ qui satisfont à une équation différentielle linéaire du second ordre. Dans le cas où l'équation $\Phi(x)=0$ a toutes ses racines réelles, Laguerre forme une expression simple Ω qui doit avoir une valeur positive ou nulle toutes les fois qu'on y met pour x une racine de l'équation. Si donc Ω n'est pas positive pour toutes les valeurs de x, on obtiendra par là même des limites comprenant les racines de l'équation; en particulier, si Ω est toujours négative, on pourra affirmer l'existence de racines imaginaires.

La troisième Partie concerne la recherche des racines imaginaires. Elle renferme une notion absolument nouvelle, celle des *points dérivés*, dont nous allons indiquer en quelques mots le sens et l'utilité.

Soit l'équation $f(x,y)=0$, de degré n, où y est égal à l'unité et a été introduit pour rendre le polynôme f homogène; si l'on représente, à la manière de Cauchy, une quantité imaginaire par un point du plan et si M est le point représentatif de x, Laguerre nomme *point dérivé de* M le point m qui représente la quantité ξ définie par la relation

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

d'où il résulte que, si M est le point représentatif d'une valeur x approchée d'une racine et si M′ désigne le point représentatif de la valeur approchée que donne la méthode de Newton, le point dérivé m s'obtiendra en portant à partir de M, dans la direction MM′, une longueur égale à n.MM′.

Cette considération donne lieu à plusieurs propositions nouvelles dont voici les deux plus simples :

Tout cercle passant par un point quelconque du plan et par le point dérivé renferme au moins une racine de l'équation; et il y a aussi au moins une racine en dehors du cercle.

Pour qu'une équation ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que chaque point du plan et son point dérivé soient situés de part et d'autre de l'axe des x.

Du premier théorème résulte le moyen de calculer les racines par approximations successives. Supposons, en effet, qu'on ait déterminé un contour fermé, un cercle par exemple, renfermant dans son intérieur une seule racine. Si l'on a déterminé une valeur suffisamment approchée de la racine, on pourra trouver un point M intérieur au cercle et tel que ce cercle renferme aussi le point dérivé m. Par les points M et m on mènera alors deux cercles C et C′ tangents au cercle donné, et il est clair que la racine cherchée devra se trouver dans la lunule commune à C et à C′; en continuant les mêmes constructions, qui peuvent d'ailleurs être remplacées par des formules analytiques, on parviendra à déterminer la racine avec telle approximation qu'on voudra.

Laguerre a appliqué les considérations qui précèdent à la détermination des racines imaginaires des équations à coefficients réels qui n'ont que deux racines imaginaires.

Cette troisième Partie, on le voit, est la moins complète, sinon la moins remarquable des trois. Nul doute que, si le temps ne lui eût fait défaut, Laguerre n'eût heureusement complété ses belles tentatives dans un genre de recherches si hérissé de difficultés.

IX.

Les travaux de Laguerre sur les équations différentielles comprennent : d'abord un Mémoire sur le facteur intégrant des équations du premier ordre, et deux autres applications intéressantes du principe du dernier multiplicateur de Jacobi ; puis un Mémoire fondamental sur les équations linéaires d'ordre quelconque, enfin une exposition fort ingénieuse et très nette de la méthode de Monge pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Dans le Mémoire relatif à la recherche du facteur d'intégrabilité, il complète d'importants résultats obtenus par Lagrange. Soit

$$dy - z\,dx = 0$$

l'équation du premier ordre à intégrer, dans laquelle z est déterminé par l'équation $V(x, y, z) = \alpha$, où α désigne une constante arbitraire. M étant un facteur propre à rendre $dy - z\,dx$ une différentielle exacte, on peut supposer que, dans son expression, on ait remplacé α par $V(x, y, z)$, en sorte que le multiplicateur M soit une fonction des trois variables indépendantes de x, y, z ; cette fonction satisfait à une équation linéaire aux dérivées partielles dont il suffira de trouver une solution particulière pour intégrer l'équation proposée. Inversement, étant donné un multiplicateur $M(x, y, z)$, on peut demander toutes les fonctions V jouissant de la propriété que, z étant déterminé par la relation $V(x,y,z) = \alpha$, l'équation $dy - z\,dx$ admette M comme facteur intégrant. En se fondant sur la théorie du dernier multiplicateur, Laguerre fait voir que, si l'on connaît une valeur particulière de V, on peut les déterminer toutes par une quadrature pouvant être réellement effectuée. De là résulte, en particulier, que si l'on sait intégrer une équation différentielle du premier ordre renfermant une constante arbitraire ou, ce qui est équivalent, une équation différentielle du second ordre, on saura par là même intégrer un type d'équations différentielles du premier ordre renfermant trois fonctions arbitraires. Lagrange avait déjà donné une proposition semblable, mais où il n'entrait qu'une fonction arbitraire.

Les deux autres applications du principe du dernier multiplicateur ont trait : l'une à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x,y)}}, \tag{1}$$

où F désigne une fonction quelconque et f un polynôme du second degré ; l'autre à l'équation

$$y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 6\psi(x), \tag{2}$$

$\psi(x)$ désignant un polynôme du second degré. Laguerre, en utilisant les propriétés des formes quadratiques, montre qu'on peut intégrer l'équation (1), dès que l'on connaît une solution particulière de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{\varphi(x,y)}},$$

φ désignant un autre polynôme du second degré. Quant à l'équation (2), qui est évidemment satisfaite par tous les polynômes du troisième degré dont le hessien est $f(x)$, Laguerre donne l'expression de son intégrale générale à l'aide des fonctions elliptiques.

Arrivons aux équations linéaires d'ordre quelconque. Si, dans une telle équation d'ordre n, on conserve la variable indépendante x, en remplaçant la fonction inconnue y par zu, et si l'on dispose de z de manière à faire évanouir, dans la transformée, le second terme, c'est-à-dire le terme en $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$, les coefficients des termes qui suivent sont des fonctions que Laguerre qualifie de *semi-invariants;* ces fonctions jouissent en effet de la propriété d'invariance lorsque l'on conserve la variable indépendante en prenant une autre fonction pour inconnue. De l'étude de ces semi-invariants, Laguerre déduit, en particulier, que l'on peut toujours, dans une équation différentielle linéaire d'ordre quelconque, faire disparaître le troisième et le quatrième terme par l'intégration d'une équation linéaire du second ordre et une quadrature. Il signale, en outre, pour l'équation linéaire du troisième ordre, un invariant tel que, lorsqu'il s'annule, il existe une relation homogène et du second degré entre trois solutions quelconques de l'équation différentielle proposée.

« Ce remarquable Mémoire », disait M. O. Bonnet dans son rapport si élogieux pour notre ami, lors de la candidature de Laguerre à l'Académie des Sciences, « ce remarquable Mémoire, où se trouve pour la première fois l'idée si originale, si neuve et si féconde des invariants des équations différentielles, contient la plus saillante des découvertes analytiques de Laguerre, qui a ouvert une voie féconde et brillamment parcourue depuis par M. Halphen ».

Dans son exposition si élégante et vraiment curieuse de la méthode de Monge pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, Laguerre commence par observer que le premier membre W de l'équation à intégrer

$$\mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t - \mathrm{M} + \mathrm{N}(rt - s^2) = 0$$

peut être mis, d'une infinité de manières, sous la forme

$$\mathrm{W} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

$a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des quantités dont trois peuvent être choisies arbitrairement. Tous les systèmes de valeurs de ces quantités se distribuent en deux groupes correspondants aux deux signes du radical

$$\sqrt{K^2 - HL - MN}.$$

Représentons, pour abréger l'écriture, par

$$F(A, B, C, D)$$

l'expression

$$A\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + p\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) + B\left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + q\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) + C\frac{\partial\omega}{\partial p} + D\frac{\partial\omega}{\partial q},$$

et désignons par $(a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(a', b', c', d', \alpha', \beta', \gamma', \delta')$ deux systèmes de valeurs des indéterminées n'appartenant pas à un même groupe. Toute la méthode pourra être renfermée dans ce théorème unique :

u et v étant deux solutions communes au système d'équations

$$F(a, b, c, d) = 0,$$
$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0,$$

et u' et v' deux solutions communes au système

$$F(a', b', c', d') = 0,$$
$$F(\alpha', \beta', \gamma', \delta') = 0,$$

si des équations

$$u - f(v) = 0,$$
$$u' - \varphi(v') = 0,$$

où f et φ désignent des fonctions arbitraires, on tire p et q en fonction de x, y, z, ces valeurs, substituées dans

$$p\,dx + q\,dy,$$

rendront cette expression une différentielle exacte, et l'on aura la fonction inconnue z par la formule

$$z = \int (p\,dx + q\,dy).$$

Dans le cas où le radical dont nous avons parlé ci-dessus s'annule, un seul système de valeurs de a, b, c, d, α, β, γ, δ suffit.

Passons maintenant aux travaux sur les transcendantes elliptiques et abéliennes. Nous avons cité déjà la belle construction que Laguerre a donnée pour l'addition des fonctions ultra-elliptiques de première espèce. Nous devons signaler encore diverses recherches sur la transformation des fonctions elliptiques, entreprises surtout dans le but de généraliser des résultats trouvés par M. Hermite relativement à la transformation du troisième ordre.

Le problème de la transformation peut être posé dans les termes suivants :

$U(x, y)$ *étant une fonction homogène du quatrième degré* (y est ici introduit pour l'homogénéité et doit être supposé égal à 1) *et* H *étant son hessien, trouver une intégrale rationnelle* $z = \frac{X}{Y}$ *de l'équation*

$$\frac{dz}{\sqrt{U(z, 1)}} = \frac{dx}{\sqrt{\lambda U + \mu H}},$$

les nombres λ *et* μ *étant convenablement choisis.*

Dans le cas où le degré de la transformation est de la forme $4n \pm 1$, Laguerre ramène la détermination de X et Y à celle de deux polynômes homogènes en U et H, qui ne dépendent des valeurs particulières attribuées à U que par les valeurs des invariants S et T de ce polynôme U ; cette détermination peut s'effectuer par les méthodes données par Jacobi.

Laguerre fait connaître en outre une transformation remarquable de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 4Bx^3 + Cx^2 + 4Dx + E}} = du;$$

en posant $x = \frac{X}{Y}$, on peut remplacer cette équation par un système d'équations renfermant une fonction arbitraire u, et dans le cas où cette fonction se réduit à une constante, les valeurs de X et de Y qui satisfont à ce système d'équations donnent les fonctions Θ de Jacobi et les fonctions Al de Weierstrass. Laguerre déduit de là plusieurs résultats importants déjà trouvés par Jacobi et Eisenstein.

Enfin, tandis que Jacobi avait ramené la réduction en fraction continue de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré à la multiplication des fonctions elliptiques, Laguerre, adoptant le point de vue opposé, montre que l'intégrale algébrique de l'équation

$$\frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi,\eta)}} + \frac{n\,dx}{\sqrt{U(x,y)}} = 0,$$

où n est un nombre impair et où η et y sont introduits pour l'homogénéité, résulte de la connaissance de deux polynômes homogènes dont la détermination se ramène à la réduction en fraction continue de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré. Il donne d'ailleurs cette intégrale algébrique sous forme explicite pour le cas de $n = 3$ et pour celui de $n = 5$.

Laguerre s'est aussi occupé avec succès des fonctions abéliennes. Dans un Mémoire trop peu remarqué sur le calcul des *systèmes linéaires*, après avoir développé les règles de ce nouveau calcul qui a une étroite connexion avec les quaternions d'Hamilton, les clefs algébriques de Cauchy et les imaginaires congruentielles de Galois, Laguerre en fait l'application à la théorie des formes et à celle des fonctions abéliennes. En représentant toutes les variables par ce qu'il appelle une *variable linéaire*, il obtient une notation commode à certains égards, et qui lui permet de condenser en une formule unique les 2^{2n} séries différentes, dont les quotients donnent les fonctions abéliennes d'ordre n. Il parvient ainsi à étendre aux fonctions abéliennes d'ordre quelconque plusieurs propriétés données antérieurement par M. Hermite sur les fonctions du premier ordre, et notamment cette notion capitale des *formes abéliennes* que M. Hermite a introduites dans la Science et qui jouent, dans cette théorie, un rôle analogue à celui des formes binaires dans la théorie des fonctions elliptiques.

Pour achever notre tâche, nous n'avons plus qu'à parler d'un dernier travail concernant l'attraction des ellipsoïdes et où l'on retrouve en quelque sorte inopinément une fort ingénieuse application de cette théorie des imaginaires, qui a toujours été l'étude de prédilection de notre savant ami. La méthode consiste, en effet, à décomposer les ellipsoïdes en tranches comprises entre des plans infiniment voisins et parallèles au plan

$$ix\cos\varphi + iy\sin\varphi + z = 0.$$

Il est vrai que ces plans sont imaginaires et au premier abord la décomposition ne semble avoir aucun sens ; mais il résulte des principes établis par M. Hermite, dans sa belle théorie des coupures des intégrales définies, que, si l'on effectue les calculs en attribuant à i une valeur réelle, les résultats obtenus sont encore valables lorsqu'on fait $i=\sqrt{-1}$. C'est ainsi que Laguerre parvient à une expression du potentiel de deux ellipsoïdes qui est relativement d'une extrême simplicité ; la comparaison de ses formules avec les résultats, déjà si parfaits, qu'avaient obtenus ses nombreux et célèbres devanciers, conduit à des propositions nouvelles dont la démonstration directe offrirait de sérieuses difficultés.

Le théorème de Laguerre peut être énoncé simplement comme il suit :

Soient $\psi(x, y, z)$ et $\psi_0(x, y, z)$ deux formes quadratiques, Ω et Ω_0 leurs discriminants, et Δ et Δ_0 les valeurs que prennent leurs formes adjointes, quand on y remplace respectivement les variables par

$$\frac{i\cos\varphi}{\sqrt{\Omega}},\quad \frac{i\sin\varphi}{\sqrt{\Omega}},\quad \frac{1}{\sqrt{\Omega}}$$

et par

$$\frac{i\cos\varphi}{\sqrt{\Omega_0}},\quad \frac{i\sin\varphi}{\sqrt{\Omega_0}},\quad \frac{1}{\sqrt{\Omega_0}}.$$

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées du centre du second ellipsoïde par rapport à des axes rectangulaires passant par le centre du premier ;

les équations des surfaces extérieures des deux corps étant

$$\psi(x, y, z) = 1,$$
$$\psi_0(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) = 1,$$

représentons par $f(\lambda_2)$ *et* $f_0(\lambda^2)$ *les densités des couches dont les surfaces extérieures ont pour équations*

$$\psi(x, y, z) = \lambda^2,$$
$$\psi(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) = \lambda^2,$$

et posons

$$\int_{t^2}^{1} f(\lambda)\,d\lambda = F(t), \qquad \int_{t_0^2}^{1} f_0(\lambda)\,d\lambda = F_0(t_0).$$

Le potentiel P *des deux ellipsoïdes s'exprime par la formule*

$$P = \frac{9VV_0}{32\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{F(t)F_0(t_0)\,dt\,dt_0\,d\varphi}{i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\pi + \zeta - t\sqrt{\Delta} - t_0\sqrt{\Delta_0}},$$

dans laquelle V *et* V_0 *sont les volumes des deux corps et où l'on suppose* $\zeta > 0$.

La formule se réduit notablement lorsque les ellipsoïdes sont de révolution, Δ et Δ_0 étant alors des carrés parfaits.

Dans le cas où les ellipsoïdes sont homogènes, en appelant ω et ω_0 leurs densités, on a

$$F(t) = \omega(1 - t^2), \qquad F_0(t_0) = \omega_0(1 - t_0^2).$$

Il est aisé de voir que Δ a la même valeur pour des ellipsoïdes homofocaux, ce qui conduit au théorème de Maclaurin. Mais hâtons-nous d'observer, avec Laguerre, pour faire ressortir pleinement la perfection de la méthode, que ce théorème ne résulte pas seulement du résultat final du calcul : il est encore une conséquence immédiate de la marche même suivie pour effectuer les intégrations. Tous les plans parallèles au plan

$$ix\cos\varphi + iy\sin\varphi + z = 0$$

sont des plans isotropes, et, pour déterminer les limites des intégrations relatives à t et à t_0, il suffit de déterminer ceux de ces plans qui touchent chacun des ellipsoïdes. Comme φ prend toutes les valeurs possibles de o à 2π, on a donc à considérer tous les plans isotropes qui sont tangents à chacune des surfaces; et, comme deux surfaces homofocales du second ordre touchent les mêmes plans isotropes, il faut conclure que le potentiel n'est modifié que par l'introduction d'un facteur constant, lorsqu'on substitue à l'un des ellipsoïdes un ellipsoïde homofocal.

Enfin Laguerre montre comment l'expression du potentiel donnée ci-dessus conduit aisément à son développement suivant les puissances de l'inverse de la distance des centres des deux corps.

X.

Tel est l'inventaire des richesses que nous a laissées notre regretté camarade.

On ne saurait s'y méprendre. L'homme que la Science vient de perdre n'était pas seulement un géomètre distingué, habile à trouver d'heureux développements et des solutions élégantes : c'était un inventeur, aux idées neuves et fécondes, dont les écrits sur l'emploi des imaginaires, sur la théorie des équations, sur les cycles, etc., rendront le nom impérissable. « Laguerre », disait un excellent juge, M. O. Bonnet, dans le Rapport déjà cité, « est un des géomètres les plus pénétrants de notre époque; ses découvertes en Géométrie lui assignent le premier rang parmi les successeurs de Chasles et de Poncelet, et ses recherches nombreuses et profondes sur l'Algèbre et le Calcul différentiel et intégral accusent un talent d'analyste de premier ordre. »

Et cependant jamais plus de modestie ne s'allia à un mérite si éclatant. « Edmond Laguerre », écrivait notre illustre et vénéré maître, M. Bertrand, pour les funérailles de son jeune Confrère, « Edmond Laguerre, passionné pour la Science, semblait indifférent au succès. Jamais il n'a négligé un devoir; jamais il n'a sollicité une faveur.....

Toujours oublieux de se faire valoir, il a pris sa retraite, jeune encore, sans avoir atteint dans l'artillerie les hauts grades où son mérite semblait l'appeler..... Ses découvertes l'avaient placé au premier rang des géomètres français avant que l'Académie des Sciences en eût entendu discuter et proclamer l'importance. »

Hélas! ce fauteuil à l'Institut qu'il avait conquis sans coup férir, il devait à peine l'occuper! C'est au moment où tout semblait lui sourire et où la bienveillance de M. Bertrand lui ouvrait les portes du Collège de France que la mort est venue nous le ravir. Son beau travail sur l'attraction des ellipsoïdes a été le chant du cygne. A la fin des examens de février, à l'École Polytechnique, une fièvre violente le prit que rien ne put vaincre, ni les soins les plus affectueux, ni le séjour momentané de Versailles, ni l'air du pays natal, conseillé comme dernier recours. Le 14 août 1886, cette belle intelligence s'éteignit doucement, sans avoir livré tous ses secrets.

Puissent sa veuve et ses enfants puiser quelques consolations dans les paroles éloquentes que M. Halphen a prononcées sur sa tombe, et dans le pieux hommage que j'adresse ici à notre cher camarade, au nom de cette École qu'il aima avec passion, sur laquelle il a fait rejaillir tant d'éclat et qui, par un sort étrange, au moment où l'instruction est partout en honneur, semble avoir à se faire pardonner de produire encore de si glorieux enfants.

LISTE DES TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE E. LAGUERRE.

Nouvelles Annales de Mathématiques.

1. Sur la théorie des foyers; 1853.
2. Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie; 1870.
3. Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements; 1870.
4. Sur la règle des signes en Géométrie; 1870.
5. Sur une formule relative aux courbes tracées sur une surface du second ordre; 1870.
6. Sur les équations du troisième ordre; 1870.
7. Sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace; 1872.
8. Sur les propriétés des sections coniques qui se rattachent à l'intégration de l'équation d'Euler; 1872.
9. Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces; 1872.
10. Recherches analytiques sur la surface réciproque de la surface de Steiner; 1872.
11. Sur les lignes géodésiques des surfaces du second ordre; 1876.
12. Sur la méthode de Monge pour l'intégration des équations linéaires aux différences partielles du second ordre; 1876.
13. Sur les systèmes de droites normales à une surface; 1878.
14. Sur la cardioïde; 1878.
15. Sur les courbes du quatrième degré qui ont trois points doubles d'inflexion, et en particulier sur la lemniscate; 1878.
16. Sur les normales aux surfaces du second ordre; 1878.
17. Sur la résolution des équations numériques; 1878.
18. Sur la relation entre un cercle circonscrit à un triangle et les éléments d'une conique inscrite dans ce triangle; 1879.
19. Sur la relation entre un cercle circonscrit à un quadrilatère et les éléments d'une conique inscrite dans ce quadrilatère; 1879.
20. Sur une propriété du cercle tel que de chacun de ses points on voie une conique donnée sous un angle droit; 1879.

21. Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés; sur les axes des surfaces de révolution qui passent par cinq points donnés; sur les lignes spiriques; 1879.
22. Sur les focales des cônes algébriques; 1879.
23. Sur la règle des signes de Descartes; 1880.
24. Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation et sur la séparation des racines; 1880.
25. Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles; 1880.
26. Sur quelques propriétés des équations qui ont toutes leurs racines réelles; 1880.
27. Théorèmes généraux sur les équations algébriques; 1880.
28. Transformation par semi-droites réciproques; 1882.
29. Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles; 1883.
30. Sur quelques propriétés des cycles; 1883.
31. Sur les courbes de direction de la troisième classe; 1883.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences.

32. Théorèmes généraux sur les courbes algébriques; 1865.
33. Sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles du second ordre; 1868.
34. Sur les normales qu'on peut mener à une surface du second ordre; 1874.
35. Sur les droites qui sont doublement tangentes à la surface lieu des centres de courbure principaux d'une surface du second ordre; 1874.
36. Sur l'application des formes binaires à la Géométrie plane; 1874.
37. Sur la théorie des équations numériques; 1874.
38. Sur une formule nouvelle permettant d'obtenir par approximations successives les racines d'une équation dont toutes les racines sont réelles; 1874.
39. Sur la résolution des équations numériques dont toutes les racines sont réelles; 1874.
40. Sur quelques propriétés des courbes algébriques; 1875.
41. Sur la transformation des fonctions elliptiques; 1876.
42. Sur la développée de l'ellipse; 1877.
43. Sur les normales qu'on peut mener d'un point à une conique; 1877.
44. Sur l'attraction qu'exerce un ellipsoïde homogène sur un point extérieur; 1878.

45. Sur le développement d'une fonction suivant les puissances d'un polynôme; 1878.

46. Sur le développement de $(x - z)^m$ suivant les puissances de $(z^2 - 1)$; 1878.

47. Sur la réduction en fraction continue de $e^{F(x)}$; 1878.

48. Sur les équations différentielles du troisième ordre; 1879.

49. Sur quelques invariants des équations linéaires; 1879.

50. Sur la séparation des racines d'une équation à coefficients numériques; 1879.

51. Sur l'approximation des fonctions circulaires au moyen des fonctions algébriques; 1880.

52. Sur la détermination d'équations numériques ayant un nombre donné de racines imaginaires; 1880.

53. Sur les équations algébriques dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre; 1880.

54. Sur une propriété du polynôme de Legendre; 1880.

55. Sur la transformation par directions réciproques; 1881.

56. Sur la séparation des racines des équations dont le premier membre est décomposable en facteurs réels et satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre; 1881.

57. Sur une extension de la règle des signes de Descartes; 1881.

58. Sur la séparation des racines des équations numériques; 1881.

59. Sur les hypercycles; 1882.

60. Sur quelques équations transcendantes; 1882.

61. Sur les fonctions du genre zéro et du genre un; 1882.

62. Sur la détermination des régions du plan dans lesquelles sont comprises les racines d'une équation dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre; 1882.

63. Sur la représentation des intégrales elliptiques et ultra-elliptiques au moyen des courbes unicursales; 1883.

64. Sur la réduction en fraction continue d'une fonction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients rationnels; 1884.

65. Sur le genre de quelques fonctions entières; 1884.

66. Sur la détermination des limites entre lesquelles reste comprise la valeur d'un polynôme lorsque la variable varie entre des limites données; 1884.

67 Sur le potentiel de deux ellipsoïdes; 1886.

Bulletin de la Société mathématique de France.

68. Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner; 1872.

69. Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre; 1872.

70. Sur les cônes du second degré qui passent par des points donnés de l'espace; 1873.

71. Sur quelques théorèmes d'Arithmétique; 1873.

72. Sur la biquadratique sphérique et sur la détermination du plan osculateur en un point de cette courbe; 1873.

73. Sur la géométrie de la sphère; 1873.

74. Sur un genre particulier de surfaces dont on peut intégrer les lignes géodésiques; 1873.

75. Sur les différentes formes que l'on peut donner à l'intégrale de l'équation d'Euler; 1875.

76. Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques; 1875.

77. Sur les courbes gauches et sur la valeur de la torsion en un point d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre; 1876.

78. Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre; 1876.

79. Sur le lieu des points tels que les tangentes menées de ces points à deux courbes planes soient égales entre elles; 1876.

80. Sur un problème d'Algèbre; 1877.

81. Sur les normales que l'on peut mener d'un point donné à une conique; 1877.

82. Sur la partition des nombres; 1877.

83. Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen de fractions rationnelles; 1877.

84. Sur quelques théorèmes de Joachimsthal; 1877.

85. Sur le développement en fraction continue de $e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}}$; 1877.

86. Sur les courbes unicursales de troisième classe; 1877.

87. Sur la multiplication des fonctions elliptiques; 1877.

88. Sur la transformation des fonctions elliptiques; 1877.

89. Sur l'intégration de l'équation $y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 6f(x)$, $f(x)$ étant un polynôme du second degré; 1877.

90. Sur la recherche du facteur d'intégrabilité des équations différentielles du premier ordre; 1878.

91. Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes; 1878.

92. Sur l'intégrale de $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,dx$; 1878.

93. Sur quelques propriétés des coniques homofocales; 1879.

94. Sur l'intégrale $\int_x^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}$; 1879.

95. Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois points de rebroussement; 1879.

96. Sur la fonction exponentielle; 1879.

97. Sur la réduction en fraction continue d'une fonction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients rationnels; 1879.

98. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre; 1879.

99. Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$; 1879.

100. Sur la géométrie de direction; 1880.

Bulletin de la Société philomathique.

101. Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes; 1867.

102. Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré; 1867.

103. Sur les applications de la Géométrie au Calcul intégral; 1867.

104. Sur quelques propriétés des courbes algébriques et sur leur application à la théorie des courbes et des surfaces anallagmatiques; 1868.

105. Sur les cassiniennes planes ou sphériques; 1868.

106. Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques; 1868.

107. Sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques; 1868.

108. Sur les courbes gauches qui résultent de l'intersection de deux surfaces du second ordre; 1868.

109. Sur quelques propriétés des lignes spiriques; 1869.

110. Sur quelques propriétés des cônes algébriques; 1870.

111. Sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace; 1870. (*Voir* n° 7.)

112. Sur l'intégration d'une équation différentielle du second ordre; 1870.

113. Sur une propriété relative aux courbes que l'on peut tracer sur une surface quelconque; 1870.

114. Sur les courbes que l'on peut tracer sur une surface algébrique; 1870.

115. Sur quelques propriétés des courbes algébriques et sur la détermination des rayons de courbure des sections planes des surfaces anallagmatiques; 1871.

116. Recherches géométriques sur la cyclide; 1871.

117. Sur les covariants doubles des formes binaires; 1872.

118. Sur la théorie des surfaces algébriques; 1872.

119. Sur la représentation des formes binaires dans le plan et dans l'espace; 1872.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.

120. Sur une propriété de l'hyperboloïde de révolution; 1871.

121. Application du principe du dernier multiplicateur à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre; 1871.

Journal de l'École Polytechnique.

122. Mémoire sur le calcul des systèmes linéaires; 1867.

Journal de Mathématiques pures et appliquées.

123. Sur un problème relatif aux courbes gauches du quatrième ordre; 1870.

124. Mémoire de Géométrie analytique; 1870.

125. Mémoire sur l'application des formes binaires à la Géométrie; 1875.

126. Sur les courbes de troisième classe; 1875.

127. Sur les singularités des courbes de quatrième classe; 1875.

128. Sur une surface de quatrième classe dont on peut déterminer les lignes de courbure; 1876.

129. Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux; 1878.

130. Sur la réduction en fraction continue de $e^{F(x)}$; 1878. (*Voir* n° 47.)

131. Mémoire sur la théorie des équations numériques; 1883.

Journal de Crelle et Borchardt.

132. Sur quelques théorèmes de M. Hermite; 1880.

133. Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme; 1880.

FIN DU LVI^e CAHIER.

TABLE DES MATIÈRES.

12249 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.