COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PUBLIÉS PAR

L'ASSOCIATION AMICALE

DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS

DE

MR H. POINCARÉ

PROFESSÉ PENDANT L'ANNÉE 1885-1886

SECONDE PARTIE :

POTENTIEL-MÉCANIQUE DES FLUIDES

PARIS

AU SIÈGE SOCIAL DE L'ASSOCIATION, A LA SORBONNE

1886

Cours professé à la Faculté des Sciences

par Mr. H. Poincaré.

1885-1886.

2e Semestre.

Potentiel.

1ère Leçon.

Soit un point de coordonnées x, y, z, soumis à l'action d'une force ayant pour projections sur les axes X, Y, Z, fonctions de x y et z. Supposons qu'il existe une fonction $V(x, y, z)$ telle que :

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{on a alors: } X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dV.$$

La fonction V se nomme fonction des forces ; dans la théorie de l'attraction, elle prend le nom de potentiel.

Surfaces de niveau. — On appelle surfaces de niveau celles qui ont pour équation $V = C^{te}$. Les Cosinus directeurs des normales à ces surfaces sont proportionnels à $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ et par suite, d'après la définition de V à X, Y, Z, donc la force est normale aux surfaces de niveau.

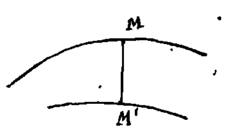
On appelle lignes de force les trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau ; elles sont, d'après ce qui précède tangentes à la force.

Remarque. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la la force F on a :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \alpha F, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \beta F, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \gamma F$$

d'où en faisant la somme des carrés : $F^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$.

Considérons une surface de niveau $V = V_0$, soit M un point sur cette surface ; la normale en M rencontre la surface infiniment voisine dont l'équation est $V = V_0 + dV$ en un point M'. La longueur MM' est la distance normale des deux surfaces. Désignons MM' pour dn. On a $F = \frac{dV}{dn}$. Soient en effet x, y, z les coordonnées du point M ; $x+dx, y+dy, z+dz$ celles



de M'. MM' a pour projections sur les axes de coordonnées dx, dy, dz, donc : $dx = \alpha\, dn$, $dy = \beta\, dn$, $dz = \gamma\, dn$. En passant de M à M', V, x, y, z subissent les accroissements respectifs dV, dx, dy, dz, donc on a :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Et en remplaçant $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, dx, dy, dz$, par $\alpha F, \beta F, \gamma F, \alpha dn, \beta dn, \gamma dn$.
il vient $dV = F\,dn\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ donc on a bien $F = \frac{dV}{dn}$.

La force appliquée au point M d'une surface de niveau est égale au quotient de l'accroissement de V lorsqu'on passe de la surface de niveau $V=V_0$ à la surface infiniment voisine par la distance MM' de ces deux surfaces, cette distance étant comptée sur la normale en M.

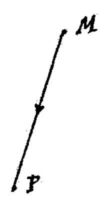
Le point M sera en équilibre si la force qui le sollicite est nulle ; on a dans ce cas :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

L'équilibre est-il alors stable ou instable ?

Théorème de Dirichlet. Lorsqu'on cherche les maxima et les minima d'une fonction V, on écrit d'abord que les trois premières dérivées sont nulles. Ces conditions nécessaires pour un minimum ou un maximum de V ne sont pas suffisantes ; ces conditions sont aussi celles de l'équilibre : Celui-ci sera stable pour un maximum de la fonction V et instable pour un minimum ou plus généralement s'il n'y a pas maximum. Ce théorème sera démontré à la fin du cours de Dynamique.

Attraction.



Soit M un point de coordonnées x, y, z attiré vers un point fixe P de coordonnées x_0, y_0, z_0. La force F est fonction de la distance MP que nous désignerons par r ; soit donc $F = f'(r)$.
$f'(r)$ étant la dérivée d'une certaine fonction $f(r)$, $f'(r) = \frac{d}{dr}(f(r))$
Cherchons les composantes X, Y, Z de la force F on a :

$$X = F \times \text{le } 1^{er} \text{ Cosinus Directeur de } MP$$

ou $X = F\frac{x_0-x}{r}$ De même

$$Y = F\frac{y_0-y}{r}$$

$$Z = F\frac{z_0-z}{r}$$ par suite.

$$X = f'(r)\frac{x_0-x}{r}, \quad Y = f'(r)\frac{y_0-y}{r}, \quad Z = f'(r)\frac{z_0-z}{r}.$$

L'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ devient donc :

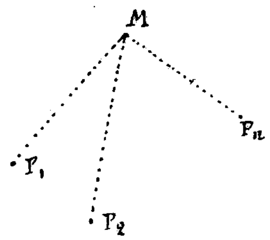
$$-\frac{f'(r)}{r}\left[(x-x_0)dx + (y-y_0)dy + (z-z_0)dz\right]$$

et comme $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$ la parenthèse est égale à $r\,dr$, par suite,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -f'(r)\,dr = -d\,f(r).$$

$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est ici une différentielle exacte, celle de $-f(r)$; donc le potentiel est $V = -f(r)$.

Supposons maintenant M attiré par n points fixes $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$. Désignons par $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_n$, les distances $P_1 M$, $P_2 M, \ldots\, P_n M$ et par $f_1'(r_1)$, $f_2'(r_2) \ldots\ldots f_n'(r_n)$, les attractions respectives de ces points sur le point M.



Si le point P_1 existait seul, le potentiel en M serait V_1 et la composante de la force parallèle à ox serait $\frac{\partial V_1}{\partial x}$; de même pour chacun des autres points : le potentiel relatif à P_n serait V_n et la composante de la force dans la direction ox $\frac{\partial V_n}{\partial x}$. La composante suivant ox de l'action simultanée des n points sera la somme algébrique des composantes.

$\frac{\partial V_1}{\partial x}$, $\frac{\partial V_2}{\partial x}$, ... $\frac{\partial V_n}{\partial x}$ ou $\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} + \ldots\ldots + \frac{\partial V_n}{\partial x}$ et en posant : $V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\ldots\ldots + V_n$ cette composante aurait pour expression $\frac{\partial V}{\partial x}$. On aura de même pour les projections de la force sur les axes des y et des z, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$.

Ici encore il y a un potentiel qui est égal à la somme des potentiels relatifs à chaque point attirant.

Considérons maintenant diverses lois d'attraction, nous étudierons seulement les suivantes :

1° L'attraction est proportionnelle à la distance r, $f'(r) = m\,r$, m étant un coefficient constant : la masse du point attirant par exemple.

2° L'attraction est inversement proportionnelle à la distance : $f'(r) = \frac{m}{r}$.

3° L'attraction est en raison inverse du carré de la distance : $f'(r) = \frac{m}{r^2}$; c'est la loi de Newton.

Cas où l'attraction est proportionnelle à la première puissance de la distance.

Soient n points attirants $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots P_n$ de masses $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$, et ayant pour coordonnées (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \ldots\ldots (x_n, y_n, z_n)$. Soient de plus $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$ les distances $P_1 M$, $P_2 M$, ... $P_n M$.

L'attraction due à P_1 est		$m_1 r_1$
celle due à	P_2 est	$m_2 r_2$
etc		....
celle due à	P_n est	$m_n r_n$

Potentiel N.1

Comme on a d'une manière générale $f'(r) = mr$, $fr = \frac{m}{2} r^2$;
Le potentiel V est donc dans ce cas : $V = V_1 + V_2 + \dots\dots + V_n$;

$$\text{où } V = -\frac{m_1}{2} r_1^2 \quad \frac{m_2}{2} r_2^2 \dots\dots\dots \frac{m_n}{2} r_n^2$$

Soit $M = m_1 + m_2 + \dots\dots m_n$, la somme des masses des points attirants.

$$\text{Posons} \quad MX = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n$$
$$MY = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n$$
$$MZ = m_1 z_1 + m_1 z_2 + \dots + m_n z_n$$

Le point (X, Y, Z) se nomme centre de gravité des masses attirantes.
Supposons que l'on ait pris le centre de gravité pour origine ; la distance de P_1 à l'origine est $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ nous la désignerons par ρ_1. De même pour $P_2, \dots P_n$. On a alors.

$$r_1^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = x^2+y^2+z^2-2xx_1-2yy_1-2zz_1+\rho_1^2$$
$$r_2^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = x^2+y^2+z^2-2xx_2-2yy_2-2zz_2+\rho_2^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$r_n^2 = (x-x_n)^2 + (y-y_n)^2 + (z-z_n)^2 = x^2+y^2+z^2-2xx_n-2yy_n-2zz_n+\rho_n^2$$

Multipliant la 1ère de ces égalités par $\frac{-m_1}{2}$, la 2e par $\frac{-m_2}{2}$ .... etc, la $n^{\text{ème}}$ partie par $\frac{-m_n}{2}$ et ajoutant on obtient le potentiel V.

$$\begin{aligned} V = -\tfrac{1}{2}(m_1+m_2+\dots+m_n)(x^2+y^2+z^2) + x\,&(m_1x_1+m_2x_2+\dots\dots+m_nx_n) \\ +\, y\,&(m_1y_1+m_2y_2+\dots\dots+m_ny_n) \\ +\, z\,&(m_1z_1+m_2z_2+\dots\dots+m_nz_n) \\ -\, \tfrac{1}{2}&\sum_1^n m_i\rho_i^2 . \end{aligned}$$

Mais d'après le choix de l'origine des coordonnées les coefficients d'x, d'y et de z sont nuls, donc :

$$V = -\frac{M}{2}(x^2+y^2+z^2) - \frac{1}{2}\sum_1^n m_i\rho_i^2 .$$

Comme $\sum_1^n m_i\rho_i^2$ est une quantité constante, on voit que l'équation $V = C^{te}$, représente des sphères ayant pour centre l'origine c'est-à-dire le centre de gravité du système des points attirants. Les lignes de forces qui sont les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau seront donc des droites passant par l'origine. Sans changer $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ on peut ajouter ou retrancher une constante à la fonction V. Si donc nous observons que $-\frac{1}{2}\sum m_i\rho_i^2$ est une constante nous pourrons écrire :

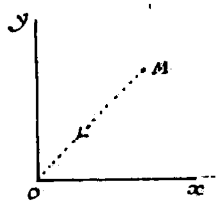
$$V = -\frac{M}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

ou en désignant par r la distance du point M à l'origine $V = -\frac{Mr^2}{2}$. Tout se passe donc comme si toute la masse du système était concentrée au centre de gravité car l'attraction de ce point sur M serait alors Mr.

Les composantes de la force sont: $\frac{\partial V}{\partial x} = -Mx$, $\frac{\partial V}{\partial y} = -My$, $\frac{\partial V}{\partial z} = -Mz$

Il n'y a donc qu'une seule position d'équilibre à savoir l'origine et l'équilibre est stable, car V est maximum à l'origine puisque pour tout autre point V est négatif.

Attraction en raison inverse de la distance.



Cette loi n'a d'intérêt que dans le cas où tous les points sont dans un même plan xoy.

Soit M un point quelconque du plan et supposons que le point qui l'attire soit à l'origine des coordonnées.

On a $f(r) = \frac{m}{r}$ et $V = -\int \frac{m}{r}$, donc $V = -m \,\text{Log.}\, r$, par suite:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{m}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{m}{r}\,\frac{\partial r}{\partial y}.$$

Or $r^2 = x^2 + y^2$ donc $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ car $r\,dr = x\,dx + y\,dy$; alors:

$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{mx}{r^2}$, $\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{my}{r^2}$. Les dérivées secondes sont:

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{m}{r^2} + \frac{2mx^2}{r^4}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{m}{r^2} + \frac{2my^2}{r^4}$ en les ajoutant on obtient:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{2m}{r^2} + \frac{2m}{r^4}(x^2+y^2) = 0$$

Supposons maintenant que le point attirant ait pour coordonnées $x_0\, y_0$. Faisons le changement d'axes défini par les formules $x' = x - x_0$; $y' = y - y_0$ qui donnent $dx' = dx$, $dy' = dy$. La fonction V devra alors satisfaire à l'équation différentielle $\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = 0$. Or $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x'}\cdot\frac{dx'}{dx}$, $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y'}\cdot\frac{dy'}{dy}$. Comme $\frac{dx'}{dx} = \frac{dy'}{dy} = 1$, si l'équation $\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = 0$ est satisfaite, il en sera de même de l'équation $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$. Cette équation subsiste donc, quelle que soit la position du point dans le plan.

Si l'on a plusieurs points attirants $P_1, P_2 \ldots\ldots P_n$, ayant pour potentiels respectifs, $V_1, V_2, \ldots\ldots V_n$, le potentiel total est:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots\ldots\ldots + V_n.$$

On a en prenant chaque point isolément:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} = 0$$

ou en ajoutant:

$$\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V^2}{\partial y^2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}\right) = 0$$

c'est-à-dire: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$

donc cette équation différentielle est vérifiée dans le cas général.

2e Leçon.

Soient $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$ les masses des n points $P_1, P_2, \ldots P_n$ situés dans le plan xoy et ayant respectivement pour coordonnées (a_1, b_1) $(a_2 b_2) \ldots$ (a_n, b_n). Désignons par $r_1, r_2 \ldots r_n$ les distances de ces points à un point M de coordonnées x et y. Le potentiel est alors représenté par la formule

$$V = -m_1 L r_1 - m_2 L r_2 - \ldots\ldots\ldots - m_n L r_n.$$

Nous nous proposons de trouver les équations des lignes de force et de démontrer en outre qu'il y a pour le point M, $n-1$ positions d'équilibre qui toutes sont instables.

L'emploi des imaginaires conduit rapidement au résultat. Soient $\omega_1, \omega_2 \ldots\ldots \omega_n$ les angles des droites MP_1, $MP_2, \ldots\ldots MP_n$ avec l'axe des x. On a alors (1) $x - a_1 = r_1 \cos.\omega_1$ $y - b_1 = r_1 \sin.\omega_1$. L'imaginaire $x + iy = z$ représente le point M. Posons de même : $c_1 = a_1 + ib_1$, $c_2 = a_2 + ib_2, \ldots\ldots c_n = a_n + ib_n$, quantités imaginaires représentées par les points fixes $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$: Multipliant par i la 2e des équations (1) et ajoutant il vient

$$(x+iy) - (a_1 + ib_1) = r_1 (\cos\omega_1 + i \sin\omega_1)$$

$$\text{ou} \quad z - c_1 = r_1 e^{i\omega_1}$$

$$\text{De même } z - c_2 = r_2 e^{i\omega_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z - c_n = r_n e^{i\omega_n}$$

Prenons les logarithmes népériens des deux membres de ces égalités on obtient :

$$L(z - c_1) = L r_1 + i\omega_1$$

$$L(z - c_2) = L r_2 + i\omega_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L(z - c_n) = L r_n + i\omega_n$$

Formons la fonction de z suivante : $f(z) = -m_1 L(z-c_1) - m_2 L(z-c_2) - \ldots - m_n L(z-c_n)$

Désignons par V la partie réelle de $f(z)$ et par W le coefficient de i alors $f(z) = V + iW$. $V = -m_1 Lr_1 - m_2 L r_2 - \ldots\ldots - m_n L r_n$, c'est le potentiel du système. La partie imaginaire est :

$$W = -m_1 \omega_1 - m_2 \omega_2 - \ldots\ldots\ldots - m_n \omega_n.$$

En différentiant $f(z)$ par rapport à x, puis par rapport à y il vient :

$$f'_x(z) = \frac{\partial V}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial x}, \quad f'_y(z) = \frac{\partial V}{\partial y} + i\frac{\partial W}{\partial y}.$$

$$\text{donc} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y}; \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Ces relations multipliées membre à membre donnent : $\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial W}{\partial y} = 0$ équation qui exprime que les courbes $V = C^{te}$ se coupent orthogonalement. Or $V = C^{te}$ représentant des courbes de niveau, $W = C^{te}$ est l'équation des lignes de force.

En différentiant les relations on obtient $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y}$; $\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial W}{\partial x}$.

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y.\partial x}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x.\partial y}$ et en ajoutant ces deux expressions membre à membre il vient : $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$. C'est l'équation autrement établie dans la 1ère Leçon.

Recherche des positions d'équilibre. Il faut, pour l'équilibre du point M que l'on ait $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ et par suite $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial W}{\partial y} = 0$; Il faut donc que la dérivée $f'(z)$ soit nulle. Or $f'(z) = -\frac{m_1}{z-c_1} - \frac{m_2}{z-c_2} - \frac{m_3}{z-c_3} - \ldots\ldots - \frac{m_n}{z-c_n}$. En chassant les dénominateurs on obtient une équation de degré $n-1$ en z ; il y a donc $n-1$ racines c'est-à-dire $n-1$ positions d'équilibre.

La condition de stabilité de l'équilibre est que V soit maximum.

Supposons que l'on prenne cette position d'équilibre pour origine des coordonnées.

$$\text{Soit } V = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_K \ldots\ldots + V_n + \ldots\ldots$$

V_K étant un polynôme homogène en x et en y et de degré K. Pour qu'il y ait maximum il faut que $V_1 = 0$ et que de plus le premier polynôme qui ne s'annule pas soit négatif. (Théorie du maximum).

Développons de la même manière la fonction W.

$$W = W_0 + W_1 + W_2 + \ldots\ldots + W_K + \ldots\ldots + W_n + \ldots$$

W_K étant un polynôme homogène et de degré K en x et en y donc :

$$(1) \quad V + iW = V_0 + iW_0 + V_1 + iW_1 \ldots$$

Développons $f(z)$ suivant les puissances croissantes de z $f(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n + \ldots$ où $A_0 = B_0 e^{i\theta_0}$, ..., $A_n = B_n \cdot e^{i\theta_n}$ ..... donc :

$$(2) \quad f(z) = B_0 e^{i\theta_0} + B_1 e^{i\theta_1}(x+iy) + \ldots\ldots + B_n e^{i\theta_n}(x+iy)^n + \ldots$$

En exprimant l'identité des développements (1) et (2) on aura des équations telles que

$$B_n e^{i\theta_n}(x+iy)^n = V_n + iW_n$$

en posant $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$.

Comme $x + iy = r e^{i\omega}$, $(x+iy)^n = r^n e^{ni\omega}$.

il viendra : $V_n + iW_n = B_n r^n e^{ni\omega + i\theta_n}$.

On a donc en égalant les parties réelles $V_n = B_n r^n \cos(n\omega + \theta_n)$.

V_n est par hypothèse le premier polynôme qui ne s'annule pas identiquement. B_n et r_n étant des quantités essentiellement positives et $\cos(n\omega + \theta_n)$ variant de -1 à $+1$, V_n ne peut rester négatif et par suite les positions d'équilibre sont instables.

Il en sera de même dans le cas de l'attraction newtonienne.

Attraction suivant la loi de Newton.

Soit M un point de coordonnées $(x\ y\ z)$ attiré par un point P de coordonnées (a, b, c) en raison inverse du carré de la distance. Posons $MP = r$. L'attraction est alors $F = \frac{m}{r^2}$ où $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$. On a vu que si l'attraction est $f(r)$, le potentiel est égal à $-f(r)$ donc dans le cas présent $V = \frac{m}{r}$ et les composantes de l'attraction ont pour expression $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$. Les surfaces de niveau sont des sphères ayant le point attirant (a, b, c) pour centre commun. Par suite les lignes de forces sont les diamètres de ces sphères.

On désigne par $\Delta V = 0$ l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Établissons que l'expression $V = \frac{m}{r}$ vérifie cette équation. On a

$$r\,dr = (x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz$$

d'où $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r};$

D'autre part $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{m(x-a)}{r^3}$ de même

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{m(y-b)}{r^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{m(z-c)}{r^3}.$$

En prenant une seconde fois les dérivées il vient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{m}{r^3} + \frac{3m(x-a)^2}{r^5}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{m}{r^3} + \frac{3m(y-b)^2}{r^5}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{m}{r^3} + \frac{3m(z-c)^2}{r^5}$$

Ajoutant ces équations membre à membre on a :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{3m}{r^3} + \frac{3m\,\underbrace{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}}{r^5}$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

On a donc bien pour la fonction $V = \frac{m}{r}$, $\Delta V = 0$. De ce que l'expression ΔV est linéaire en V il résulte que

$$\Delta\,(U + V) = \Delta U + \Delta V$$

Voyons ce qui se passe dans le cas de plusieurs points attirants $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n \ldots$ de masses $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n \ldots$ et de potentiels $V_1, V_2, \ldots\ldots V_n \ldots$ Le potentiel V est :

$$V = V_1 + V_2 + \ldots\ldots \quad \text{ou} \quad V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots = \sum \frac{m}{r}.$$

On a en considérant chacun des points isolément :

$$\Delta V_1 = 0 \quad , \Delta V_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta V_n = 0 \ .$$

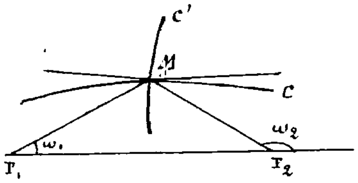
$$\text{et comme } \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots\ldots\ldots + \Delta V_n + \ldots\ldots$$

$$\text{il vient } \Delta V = 0 \ .$$

Cas particulier de deux points attirants $P_1 P_2$. Cherchons à déterminer dans ce cas les surfaces de niveau et les lignes de force. L'équation des surfaces de niveau est

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = C^{te} \ .$$

ce sont des surfaces de révolution autour de la droite $P_1 P_2$. Soit MC la section méridienne de l'une de ces surfaces. Cherchons l'équation de la ligne de force MC'. Considérons un point parcourant la courbe de niveau MC avec une vitesse V_1 et un autre point parcourant la ligne de force avec une vitesse V_2. Soient α et β les angles que fait la ligne de niveau avec les rayons vecteurs au point M ; les angles de la ligne de force avec les mêmes rayons vecteurs seront d'après la définition de ces lignes les compléments de α et β. Or les projections de la vitesse sur le rayon vecteur à la trajectoire et sur la direction perpendiculaire sont $\frac{dr}{dt}$ et $r\frac{d\omega}{dt}$. On a donc en projetant la vitesse V_1 sur les deux rayons vecteurs et la vitesse V_2 sur les deux perpendiculaires à ces rayons :



$$V_1 \cos\alpha = \frac{dr_1}{dt} \quad , V_1 \cos\beta = \frac{dr_2}{dt} \ ; \ r_1 = P_1M \ , r_2 = P_2M \ .$$

$$\text{et } V_2 \cos\alpha = r_1\frac{d\omega_1}{dt} \ , V_2 \cos\beta = r_2\frac{d\omega_2}{dt} \ldots$$

$$\text{et par suite } \frac{r_1\, d\omega_1}{r_2\, d\omega_2} = \frac{dr_1}{dr_2} \ .$$

Il importe de remarquer que les différentielles dr_1 et dr_2 se rapportent aux lignes de niveau et $d\omega_1$, $d\omega_2$ aux lignes de force. En prenant la dérivée des deux membres de l'équation.

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = C^{te} \text{ il vient :}$$

$$\frac{m_1\, dr_1}{r_1^2} + \frac{m_2\, dr_2}{r_2^2} = 0$$

d'où en substituant aux quantités dr_1 . dr_2 les quantités proportionnelles $r_1 d\omega_1 ; r_2 d\omega_2$

$$\frac{m_1\, d\omega_1}{r_1} + \frac{m_2\, d\omega_2}{r_2} = 0$$

Or le triangle $P_1 M P_2$ donne :

$$r_1 \sin\omega_1 = r_2 \sin\omega_2 \ .$$

En remplaçant dans cette relation r_1 et r_2 par les valeurs proportionnelles $m_1 d\omega_1$, $-m_2 d\omega_2$, il vient

$$m_1 d\omega_1 \sin\omega_1 + m_2 d\omega_2 \sin\omega_2 = 0$$

$$\text{d'où en intégrant } m_1 \cos\omega_1 + m_2 \cos\omega_2 = C^{te} \ .$$

Potentiel N°2 .

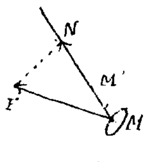
telle est l'équation des lignes de forces.

Remarque. — L'équation $\Delta V = 0$ joue un grand rôle en Physique où on la rencontre dans des circonstances diverses. C'est l'équation du potentiel dans l'attraction newtonienne, c'est aussi l'équation du potentiel en électricité statique. Dans la théorie de la propagation de la chaleur, elle se présente avec une autre signification: soit v la température d'un point, il y a échange de chaleur entre ce point et ses voisins v est donc une fonction du temps et des coordonnées du point définie dans la théorie de la conductibilité par l'équation $K \frac{dv}{dt} = \Delta V$. Dans le cas de l'équilibre mobile de température $\frac{dv}{dt} = 0$ d'où $\Delta V = 0$.

On rencontre encore l'équation $\Delta V = 0$ en électricité dynamique et en hydrodynamique.

3e Leçon.

Flux de force. — Soit $d\omega$ un élément de surface ayant son centre de gravité en M. Si MN est la composante normale à l'élément $d\omega$ de l'attraction exercée au point M le flux de force relatif à $d\omega$ est égal au produit $MN . d\omega$. En passant du point M au point M' infiniment voisin sur la normale MN à $d\omega$, le potentiel passe de la valeur V à la valeur $V + dV$. En appelant dn le déplacement MM', le travail effectué est par définition



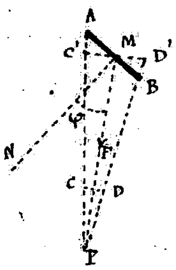
$$dn \times MN$$

ce qui donne $dV = dn \times NM$.

donc le flux de force au point M a aussi pour expression $\frac{dV}{dn} . d\omega$.

La dénomination de flux de force provient de l'analogie qui existe, à certains égards entre la théorie du potentiel et celle de la conductibilité de la chaleur le flux de force rappelle le flux de chaleur envisagé dans la théorie de Fourier.

Cas d'un point attirant unique P. L'attraction du point P sur AB a pour valeur $\frac{m}{r^2}$, m désignant la masse du point P et r la distance de ce point au centre de gravité M de l'élément AB. En désignant par φ l'angle de MF avec la normale MN à AB on a pour la composante normale de l'attraction $MF . \cos\varphi$ ou $\frac{m}{r^2} . \cos\varphi$. Si l'on coupe le cône ayant son sommet en P et pour directrice le contour de l'élément AB par une sphère de rayon 1 et de centre P, il intercepte



sur cette sphère une surface CD appelée angle solide de ce cône infiniment délié, c'est l'angle solide sous lequel on voit du point P l'élément $d\omega$. Considérons une sphère concentrique à la précédente et ayant $PM = r$ pour rayon, le cône y découpe un élément de surface $C'D'$. Les deux systèmes semblables PCD, $PC'D'$ donnent $CD = \frac{C'D'}{r^2}$ ou en posant $CD = d\sigma$. $d\sigma = \frac{C'D'}{r^2}$.

Considérant les éléments superficiels infiniment petits AB, CD comme plans et les projetant sur un plan perpendiculaire à la droite MP on obtient :

$$C'D' = d\omega \, . \cos\varphi$$

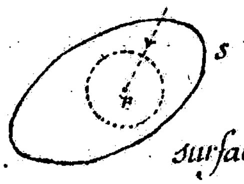
$$\text{ou} \quad d\sigma = \frac{\cos\varphi}{r^2} \, . \, d\omega$$

Comme le flux de force relatif à $d\omega$ est $\frac{m}{r^2} \cos\varphi \, d\omega$ on peut l'exprimer par $m \, d\sigma$ produit de la masse du point attirant par l'angle solide sous lequel on voit de P l'élément $d\omega$ considéré.

Il résulte de là que le flux de force qui traverse une surface finie a pour expression $\int \frac{dV}{dn} . d\omega$ ou $m\,\sigma$, σ étant l'angle solide relatif à la surface donnée ; il est clair que l'intégrale $\int \frac{dV}{dn} d\omega$ doit être étendue à toute l'aire.

Cas d'une surface fermée. — Il y a deux cas à considérer.

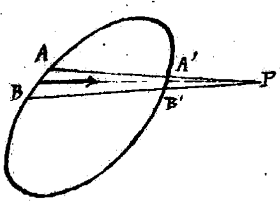
1° Le point P est intérieur à la surface S.



σ est alors égal à 4π ; le flux de force qui traverse S est par suite $4\pi m$ en valeur absolue mais comme il pénètre à l'intérieur de la surface, on devra faire précéder $4\pi m$ du signe — donc

$$\int \frac{dV}{dn} . d\omega = - 4\pi m .$$

2° Le point P est extérieur à S.



Un cône délié issu de P découpe sur S deux éléments infiniment petits AB, $A'B'$ vus de P sous le même angle solide, donc le flux qui traverse AB est égal à celui qui traverse $A'B'$ en valeur absolue mais ils sont affectés de signes contraires puisque en AB le flux pénètre dans la surface tandis qu'il en sort en $A'B'$ par suite leur somme algébrique est nulle.

Le flux de force relatif à une surface S est nul si le point attirant est extérieur à S.

Cas de plusieurs points attirants. L'attraction totale de tous ces points est la somme géométrique des attractions relatives à chacun d'eux ; la composante normale totale sera par suite la somme algébrique des attractions normales partielles. Comme le flux de force pour un point est égal au produit de cette composante normale par $d\omega$, le flux de force total est égal à la somme algébrique des flux partiels. Les points extérieurs à la surface S ont un effet nul sur le flux donc il se réduit à $-4\pi M$, M désignant la somme des masses des points attirants intérieurs à la surface.

On peut envisager la matière attirante comme constituée par des points ou répartie suivant une certaine loi dans un volume sur une surface ou sur une ligne. Dans ces trois derniers cas le potentiel a respectivement pour expression

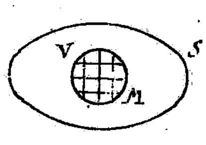
$$(1)\ V = \iiint \frac{\delta\, d\sigma}{r}$$

$$(2)\ V = \iint \frac{\delta\, d\omega}{r}$$

$$(3)\ V = \int \frac{\delta\, ds}{r}$$

dv désignant un élément de volume
$d\omega$ ————————— de surface
ds ————————— d' arc
δ la densité au centre de gravité de l'élément
et r la distance de ce point au point attirant.

En mécanique céleste on considère quelquefois les astres comme des points isolés, mais s'il s'agit de l'étude de la figure des corps célestes par exemple on tient compte de leurs dimensions. Dans la théorie de l'électricité la matière attirante est supposée répartie sur les surfaces. En général l'attraction d'une ligne n'a pas de signification physique mais on ramène quelquefois l'étude de l'attraction d'un volume ou d'une surface à celle de l'attraction d'une ligne convenablement déterminée. Étendons la notion du flux de force au cas où la matière attirante est répartie dans un volume. Décomposons ce volume en petits cubes par exemple au moyen de plans parallèles aux plans des coordonnées; on peut supposer la masse de chacun d'eux comme condensée en leur centre de gravité et alors le flux de force est égal à $-4\pi M$. On commet



ainsi en apparence une certaine erreur qui tend vers zéro si l'on prend des cubes indéfiniment décroissants. Or $-4\pi M$ est une quantité constante donc le flux de force relatif à un volume a même expression que dans le cas d'un système de points isolés, c'est $-4\pi M$, M désignant la masse attirante intérieure à S. Le même raisonnement étend la formule du flux de force aux cas d'une surface et d'une ligne attirante.

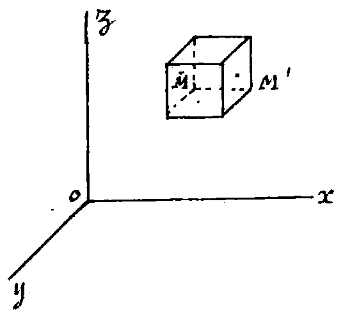
Application. Equation de Poisson

Considérons un parallélipipède de dimensions infiniment petites

dx, dy, dz. En désignant par ρ sa densité moyenne sa masse est $\rho\,dx\,dy\,dz$. Le flux de force qui entre dans la surface est, d'après la formule précédente,

$$-4\pi\rho\,dx\,dy\,dz.$$

Evaluons autrement ce flux : considérons les 2 faces perpendiculaires à l'axe des x, soient $M(x,y,z)$ et $M'(x+dx,y,z)$ leurs centres de gravité. Le flux relatif à la face M est au signe près :



$$\frac{dV}{dn}\,d\omega \text{ ou } \frac{dV}{dn}\,dy\,dz$$

ou encore $\frac{dV}{dx}\,dy\,dz$ en remarquant que $dn=dx$

On prendra cette quantité avec le signe $-$ car le flux pénètre dans la surface. Le flux relatif à la face M' est

$$+\left(\frac{dV}{dx}+\frac{d^2V}{dx^2}\,dx\right)dy\,dz.$$

additionnant ces deux flux, il vient :

$$\frac{d^2V}{dx^2}\,dx\,dy\,dz$$

On aurait de même pour les deux autres couples de faces

$$\frac{d^2V}{dy^2}\,dx\,dy\,dz \quad \text{et} \quad \frac{d^2V}{dz^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Le flux total est par suite :

$$dx\,dy\,dz\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)$$

donc $\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dx^2}=-4\pi\rho$

ou $\Delta V=-4\pi\rho$ en posant

$$\Delta V=\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}.$$

L'équation $\Delta V=4\pi\rho$ se nomme équation de Poisson, l'équation de Laplace $\Delta V=0$ en est un particulier.

4e Leçon.

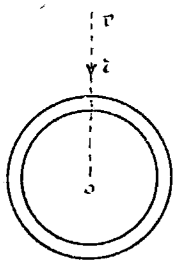
Attraction d'une couche sphérique infiniment mince sur un point.

Soient R le rayon de base de la couche

ε son épaisseur infiniment petite

ρ la densité de sa matière.

La masse de la couche est aux infiniment petits du second ordre près $M=4\pi\varepsilon R^2\rho$.



Le point attiré P est à une distance $OP = r$ du centre de la couche. Par raison de symétrie l'attraction est dirigée suivant PO et dépend seulement de r. Pour la calculer considérons une sphère de centre O et passant par P, puis appliquons le théorème du flux de force. Soit $-F$ l'attraction en un point quelconque de cette surface sphérique auxiliaire, elle lui est normale donc on a pour le flux de force total $-4\pi r^2 F$. Si P est extérieur à la surface attirante c'est-à-dire si l'on a $r > R$, on sait que le flux de force est $-4\pi M$, M étant ici égal à $4\pi \varepsilon R^2 \rho$, donc

$$-4\pi r^2 F = -4\pi M$$

$$\text{d'où } F = \frac{M}{r^2}$$

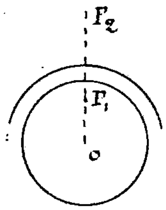
ce qui montre que l'attraction d'une couche sphérique infiniment mince sur un point extérieur est la même que si toute sa masse était en son centre.

Pour $r < R$, la matière attirante est extérieure à la sphère de rayon OP, donc le flux de force est nul, par suite

$$-4\pi r^2 F = 0 \qquad \text{d'où} \quad F = 0 .$$

L'attraction d'une couche sphérique homogène et infiniment mince sur un point intérieur est donc nulle.

Il résulte de ces deux propositions que F est une fonction discontinue de R pour tous les points d'une surface, celle de la sphère S. Si l'on prend deux points P_1 et P_2 infiniment voisins de la couche sphérique l'un intérieur l'autre extérieur, la différence des valeurs de F en ces 2 points est $\frac{M}{R^2} = 4\pi\varepsilon\rho$ quantité



déterminée et non infiniment petite. Le produit $\varepsilon\rho$ est appelé quelquefois densité superficielle ; cela provient de ce que l'on peut, sans changer la valeur de l'attraction sur un point P_1 remplacer la couche attirante infiniment mince par la surface de la couche à laquelle on attribuerait une matière attirante de densité $\varepsilon\rho$.

Calcul du potentiel V.

$$\text{On sait que } -F = \frac{dV}{dr}$$

$$\text{donc } \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{M}{r^2}$$

$$\text{d'où en intégrant } V = \frac{M}{r} + c .$$

D'autre part la définition du potentiel donne $V = \int \frac{\rho\, dv}{r'}$, r' désignant la distance de l'élément attirant $\rho\, dv$ au point attiré P. Si P est rejeté à l'infini, r et r' deviennent infinis, les deux valeurs précédentes de V

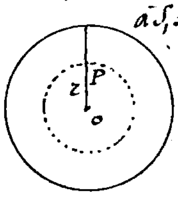
donnent alors la première $V = C$ l'autre $V = 0$ donc le potentiel cherché est simplement $V = \frac{M}{r}$ dans le cas où r est plus grand que R. Si P est intérieur à la couche $F = 0$ donc $\frac{dV}{dr} = 0$ et par suite $V = C^{te}$ ce qui montre que pour les points intérieurs à la couche attirante le potentiel est constant. Il est aisé de déterminer cette constante. Le potentiel au centre O est en effet

$$V = \frac{1}{R}\int \rho\, dv = \frac{M}{R}$$

Attraction d'une sphère homogène sur un point.

1° Le point est extérieur à la sphère. – Supposons la sphère attirante décomposée en couches sphériques infiniment minces, chacune d'elles agit comme son centre s'il avait la même masse donc $F = \frac{M}{r^2}$ et $V = \frac{M}{r}$; M étant la masse de la sphère $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho$.

2° Le point est intérieur. Considérons une sphère S_1 de centre O et de rayon OP, et supposons la sphère attirante S décomposée en couches sphériques infiniment minces. Toutes les couches extérieures à S_1 sont sans action sur le point P, la masse attirante se réduit donc à



$M_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. L'attraction est par suite

$$F = \frac{M_1}{r^2} = \frac{4}{3}\pi r^2 \rho.$$

On a pour la masse totale de la sphère S, $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, d'où $\frac{4}{3}\pi\rho = \frac{M}{R^3}$ donc $F = \frac{Mr}{R^3}$.

L'attraction sur un point intérieur est proportionnelle à sa distance au centre.

Calculons le potentiel V

$$\frac{dV}{dr} = -F \quad \text{ou} \quad \frac{dV}{dr} = -\frac{Mr}{R^3}$$

d'où en intégrant $V = C - \frac{Mr^2}{2R^3}$.

Pour un point extérieur le potentiel est $V = \frac{M}{r}$, ces deux formules doivent évidemment coïncider pour les points de la surface de la sphère donc

$$\frac{M}{R} = C - \frac{MR^2}{2R^3} = C - \frac{M}{2R}$$

d'où $C = \frac{3M}{2R}$.

V a donc pour expression $\frac{3M}{2R} - \frac{Mr^2}{2R^3}$.

Vérifions dans ce cas particulier l'équation de Poisson.

$$\Delta V = -4\pi\rho$$

De $V = \frac{3M}{2R} - \frac{Mr^2}{2R^3}$.

et $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

on tire $\frac{\partial^2 r^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 r^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 r^2}{\partial z^2} = 2$

Comme $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{M}{2R^3}\left(\frac{\partial^2 r^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r^2}{\partial z^2}\right)$

$$\Delta V = -\frac{3M}{R^3}$$

ou en tenant compte de la masse $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

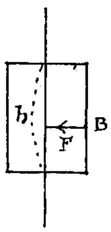
$$\frac{3M}{R^3} = 4\pi\rho$$

donc on a bien $\Delta V = -4\pi\rho$.

Attraction exercée sur un point P par une droite indéfinie de densité linéaire δ.

Par raison de symétrie l'attraction sera dirigée suivant la perpendiculaire abaissée du point P sur la droite. Considérons un cylindre de révolution autour de la droite attirante et limitons le par les plans de deux parallèles soit h sa hauteur et r son rayon de base. Il est clair que l'attraction F en tout point de cette surface cylindrique est la même c'est-à-dire que F est fonction de r seulement. Le flux de force qui pénètre dans la surface se compose du flux de force relatif aux deux bases qui est nul puisque l'attraction en un point quelconque de ces bases est dans leur plan et du flux relatif à la surface latérale. Celui-ci est exprimé par $-4\pi M$ ou $M = h\delta$ et par $-F . 2\pi r h$, donc

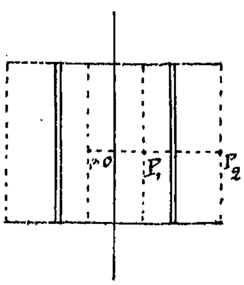
$$4\pi h\delta = 2\pi F r h \qquad \text{d'où} \qquad F = \frac{2\delta}{r}.$$



L'attraction F varie en raison inverse de r.

Attraction exercée sur un point P par une couche infiniment mince comprise entre deux cylindres de révolution.

Par raison de symétrie l'attraction sera dirigée suivant la perpendiculaire abaissée du point attiré P sur l'axe de la couche et elle ne dependra que de la distance r de ce point à l'axe, si ε est l'épaisseur de la couche, R le rayon du cylindre intérieur et ρ la densité de la matière attirante, la masse attirante M est :



$$M = 2\pi R h \varepsilon \rho$$

en considérant un cylindre de hauteur h et de rayon $OP = r$ appliquons le théorème du flux de force à ce cylindre. La partie relative aux bases est nulle, reste la surface latérale. Distinguons 2 Cas : 1° $r < R$ on a le point P_1, la masse attirante est extérieure au cylindre donc

$$-2\pi r h F = 0 \qquad \text{d'où} \quad F = 0$$

L'attraction de la couche sur un point intérieur est nulle.

2° $r > R$. Le flux de force est alors $-4\pi M = -4\pi(2\pi R h \varepsilon \rho)$

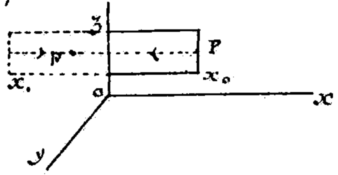
$$\text{donc} \quad -2\pi h r F = -4\pi(2\pi R h \varepsilon \rho)$$

$$\text{d'où :} \quad F = \frac{4\pi R \varepsilon \rho}{r}$$

L'attraction de la couche sur un point extérieur est en raison inverse de la distance du point à l'axe de la couche. Elle est la même que si toute la masse était concentrée sur l'axe.

Attraction d'un plan indéfini de densité superficielle δ sur un point P.

Par raison de symétrie l'attraction est normale au plan que nous prendrons pour plan des yz et ne dépend que de la distance x du point attiré au plan. Appliquons le théorème du flux de force à un cylindre dont les génératrices sont parallèles à ox. Soient $x = x_0$, $x = x_1$ les équations des plans de base et S la



surface commune de ces bases. Le flux de force relatif à la surface latérale est nul; celui relatif aux bases est égal à

$$SF(x_0) - SF(x_1)$$

Si x_0 et x_1 sont 2 abscisses positives, la matière intérieure au cylindre a une masse nulle donc dans ce cas

$$SF(x_0) - SF(x_1) = 0$$

$$\text{d'où} \quad F(x_0) = F(x_1)$$

L'attraction en un point est indépendante de sa distance au plan.

Si x_0 et x_1 ont des signes contraires

$$S[F(x_0) - F(x_1)] = -4\pi S\delta$$

$$\text{donc} \quad F(x_0) - F(x_1) = -4\pi\delta$$

$$\text{or} \quad F(x_0) = -F(x_1)$$

$$\text{d'où} \quad F(x_0) = -2\pi\delta$$

$$\text{et} \quad F(x_1) = 2\pi\delta.$$

L'attraction est constamment égale à $2\pi\delta$ en valeur absolue, mais elle est positive d'un certain côté du plan et négative de l'autre côté.

5e Leçon.

On a vu que si un point est attiré par une couche infiniment mince et sphérique que l'attraction est la même, pour un point extérieur à la sphère, que si toute la masse de la couche était condensée en son centre et que cette attraction est nulle si le point est intérieur à la sphère. Cette force fonction de coordonnées du point M

Potentiel Nº 3.

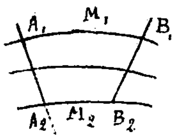
passe d'une valeur finie à 0 lorsque le point traverse la couche sphérique.

Dans le cas du plan l'attraction est $2\pi\delta$; elle est indépendante de la distance du point attiré au plan. En franchissant le plan, l'attraction du point M passe de $+2\pi\delta$ à $-2\pi\delta$ ou inversement. L'attraction est encore ici une fonction discontinue des coordonnées du point attiré M.

C'est là un cas particulier d'un fait général.

Imaginons la matière attirante répartie sur une surface S suivant une loi quelconque, soit δ la densité en un point. Considérons un élément superficiel $d\omega$ la masse attirante élémentaire correspondante est $\delta d\omega$

Menons la normale MN à la surface au point M de $d\omega$ et prenons de part et d'autre de M, 2 points infiniment voisins, l'un intérieur M_2 l'autre extérieur M_1. Nous allons démontrer que la différence géométrique des attractions sur M_1 et M_2 est une quantité finie. Soient N_1 la composante normale de l'attraction en M_1, N_2 en M_2. Nous affirmons que $N_1 - N_2 = 4\pi\delta$ par suite l'attraction sera une fonction discontinue de coordonnées du point attiré. A cet effet appliquons le théorème du flux de force. Revenons à l'élément $d\omega$ dont M est par exemple le centre de gravité. Aux différents points de l'élément menons les normales à la surface et prenons de part et d'autre de la surface



une longueur ε. On détermine ainsi un volume limité par 2 surfaces parallèles à S, $A_1 M_1 B_1$ et $A_2 M_2 B_2$ et par la surface réglée engendrée par les normales aux différents points du contour de $d\omega$. Ce volume infiniment petit contient une quantité de matière égale à $\delta d\omega$. Le flux de force relatif à cet élément est donc $-4\pi\delta d\omega$. Prenons les dimensions linéaires de l'élément $d\omega$ pour infiniment petits du premier ordre et supposons ε du second ordre au moins. Déterminons séparément le flux de force relatif à la surface latérale et aux deux surfaces parallèles. Et d'abord aux bases $A_1 B_1 = d\omega$, $A_2 B_2 = d\omega$. En $A_1 B_1$ la composante normale est N_1 donc le flux de force correspondant est $-N_1 d\omega$, de même le flux de force relatif à $A_2 B_2$ est $N_2 d\omega$. Les forces normales sont considérées comme positives lorsqu'elles agissent dans le sens MN. On sait d'autre part quel signe il faut donner à un flux suivant qu'il pénètre dans une surface ou qu'il en sort. Comme on peut négliger le flux qui traverse la surface latérale puisque celle-ci est du 3e ordre au moins, le flux total a pour expression $(N_2 - N_1)d\omega$

donc $-4\pi\delta d\omega = (N_2 - N_1)d\omega$ d'où $N_1 - N_2 = 4\pi\varepsilon$.

Application. — Considérons un corps conducteur isolé, chargé d'une certaine quantité d'électricité une molécule de fluide positif à l'intérieur. Cette molécule par hypothèse peut se mouvoir librement donc il faut, pour l'équilibre, que la force qui la sollicite soit nulle. Par suite il faut que l'on ait

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \;, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \;, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \,.$$

ce qui exige que $\quad V = C^{te}$.

En différentiant de nouveau nous aurons

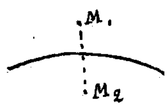
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \,.$$

donc $\Delta V = 0$.

or l'équation de Poisson fournit $\Delta V = -4\pi\rho$ par suite $\rho = 0$.

La densité électrique à l'intérieur d'un conducteur (chargé et isolé) en équilibre est nulle c'est-à-dire que l'électricité se porte à la surface du conducteur.

Prenons un point extérieur M_1 infiniment voisin de la surface. en M_2 l'attraction est nulle. Or, en M_1 l'attraction est normale à la surface du conducteur



car la surface du conducteur est une surface de niveau puisque on a $V = C^{te}$ pour tous les points intérieurs quelque voisins qu'ils soient de la surface. Appliquons la formule

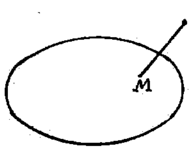
$$N_1 - N_2 = 4\pi\delta$$

comme $N_2 = 0$, on a $\quad N_1 = 4\pi\delta$ donc:

si de l'électricité est en équilibre sur un conducteur l'attraction en un point infiniment voisin est égale au produit de la densité électrique au point correspondant du conducteur par 4π.

Théorème de Green.

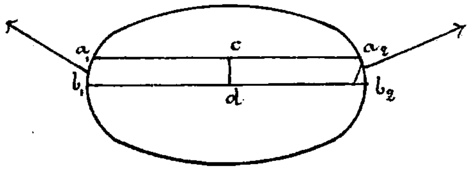
Lemme. Considérons un volume W limité par une certaine surface S. Soit dv un élément quelconque de W et $d\omega$ un élément quelconque de la surface S. Menons la portion extérieure de la normale en un point M de S. Soient $\alpha\,\beta\,\gamma$



les cosinus directeurs de la direction MN et F une fonction quelconque de x, y et z. Le lemme s'exprime ainsi:

$$\iint F\alpha \, d\omega = \iiint \frac{dF}{dx} \, . \, dv.$$

La première intégrale est une intégrale double et s'étend à tous les éléments de S. la deuxième est une intégrale triple qui doit être étendue au volume W. Prenons sur S un élément quelconque $d\omega$ et concevons un cylindre ayant ses génératrices parallèles à ox et pour directrice le contour de $d\omega_1$. Il découpe sur S un second élément $d\omega_2$; soit $d\sigma$ sa section droite cd. Désignons par F_1 la valeur de la fonction au centre de gravité de $d\omega_1$ et par F_2 sa valeur au centre de gravité de $d\omega_2$. Appelons α_1 le cosinus de la portion extérieure de la normale à la surface S au centre de gravité de $d\omega_1$ avec ox et α_2 le même angle relativement à $d\omega_2$. Dans le cas actuel on a $\alpha_1 < 0$ et $\alpha_2 > 0$. D'ailleurs



$$d\sigma = - d\omega_1 \alpha_1,$$
$$d\sigma = d\omega_2 \alpha_2$$

Coupons le cylindre infiniment mince précédemment défini par des plans équidistants entre eux et perpendiculaires à ox. Soit dx la la distance de deux plans conséeutifs. On a

$$dv = dx\, d\sigma.$$

dv étant l'un des éléments cylindriques formés

alors $\int \frac{dF}{dx} dV = \int \frac{dF}{dx} . dx\, d\sigma.$

ou $d\sigma$ est une constante. Or on doit intégrer de x_1 à x_2 de façon à aller de $a_1 b_1$ à $a_2 b_2$, donc

$$\int \frac{dF}{dx} dv = d\sigma \ (F_2 - F_1)$$

ou encore $\int \frac{dF}{dx} dv = \alpha_1 d\omega_1 F_1 + \alpha_2 d\omega_2 F_2 = d\sigma \int \frac{dF}{dx} dx$

On aura tout le volume en étendant convenablement les intégrales

$$\int \alpha_1 F_1 d\omega_1 \quad \text{et} \int \alpha_2 F_2 d\omega_2$$
$$\int \frac{dF}{dx} d\omega = \int \alpha_1 F_1 d\omega_1 + \int \alpha_2 F_2 d\omega_2$$

la 1ère intégrale doit être étendue à tous les éléments de S pour lesquels α_1 est négatif et la 2e à tous les éléments pour lesquels α_2 est positif. on peut écrire encore

$$\int \frac{dF}{dx} dv = \int \alpha F\, d\omega$$

et étendant à la seconde intégrale à toutes la surface S

L'analogie conduit évidemment à

$$\int F \beta\, d\omega = \int \frac{\partial F}{\partial y} dv$$
$$\int F \gamma\, d\omega = \int \frac{\partial F}{\partial z} dv$$

Faisons dans la première de ces équations

$$F = U \frac{\partial V}{\partial x},$$

U et V étant des fonctions quelconques. Nous avons $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$;

on peut par suite écrire : $\int \alpha U \frac{\partial V}{\partial x} d\omega = \int \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \partial v + \int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dv$

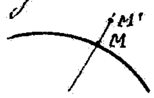
et par symétrie $\int \beta U \frac{\partial V}{\partial y} d\omega = \int \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} dv + \int U \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dv$

$$\int \gamma U \frac{\partial V}{\partial z} d\omega = \int \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} dv + \int U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dv.$$

Le théorème de Green s'obtient en ajoutant ces trois équations. c'est une conséquence immédiate de la définition des intégrales multiples. Introduisons :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Soit V le potentiel en un point M de la surface et $V+dV$ en M'. $MM'=dn$ segment extérieur à la surface. $\frac{dV}{dn}$ est la composante normale de l'attraction.



Evaluons $\frac{dV}{dn}$. Désignons par x, y, z les coordonnées de M, $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, celles de M'. On a

$$dx = \alpha\, dn$$
$$dy = \beta\, dn$$
$$dz = \gamma\, dn$$

En passant de M en M' on a pour dV

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

ou en remplaçant dx, dy, dz par leurs valeurs αdn, βdn, γdn

$$\frac{dV}{dn} = \frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma.$$

Faisons maintenant la somme des 3 équations dont il a été parlé plus haut.

$$\int \alpha\, U \frac{\partial V}{\partial x} d\omega = \int \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} dv + \int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dv$$
$$\int \beta\, U \frac{\partial V}{\partial y} d\omega = \int \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial y} dv + \int U \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dv$$
$$\int \gamma\, U \frac{\partial V}{\partial z} d\omega = \int \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial z} dv + \int U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dv$$

il vient $\int \frac{dV}{dn} U\, d\omega = \int \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dv + \int U \Delta V dv$

Telle est l'expression analytique du théorème de Georges Green. Les applications de ce théorème sont très nombreuses.

Supposons que $U = 1$ et que V représente un potentiel, la formule fournit alors.

$$\int \frac{dV}{dn} d\omega = \int \Delta V . dv.$$

or d'après l'équation de Poisson

$$\Delta V = -4\pi\rho \text{, donc}$$

$$\int \frac{dV}{dn} d\omega = -\int 4\pi\rho\, dv = -4\pi \int \rho\, dv;$$

$\rho\, dv$, représente évidemment la quantité de matière attirante contenue dans un élément de volume de W par suite $\int \rho\, dv$ représente la masse M de matière comprise dans W.

$$\int \frac{dV}{dn} d\omega = -4\pi M.$$

on retrouve ainsi le théorème du flux de force

Supposons qu'il n'y ait pas de matière à l'intérieur du volume W alors si V est un potentiel $\Delta V = 0$.

Prenons $U = V$. Le Théorème de Green donne alors

$$\int V \frac{dV}{dn}\, d\omega = \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dv.$$

Supposons par exemple $V = 0$ sur toute la surface S alors

$$\int V \frac{dV}{dn}\, d\omega = 0 \text{ donc :}$$

$$\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dv = 0$$

et comme tous les éléments de l'intégrale sont positifs, il faut que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad . \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad . \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

en tous les points de W d'où $V = C^{te}$ à l'intérieur de ce volume et comme $V = 0$ sur S on a toujours $V = 0$

Si donc une fonction $V(x, y, z)$ satisfait à l'équation $\Delta V = 0$ et est continue ainsi que ses dérivées à l'intérieur d'un volume et si elle est nulle à la surface elle sera nulle en tout point intérieur.

Il résulte de là que l'on ne peut pas trouver deux fonctions V_1 et V_2 satisfaisant à l'intérieur d'une surface fermée à l'équation $\Delta V = 0$. Nous verrons que ce problème admet une solution. Si l'on avait deux fonctions V_1 et V_2 telles que $\Delta V_1 = 0$ $\Delta V_2 = 0$ et ayant même valeurs en tous les points de la surface limite S, V_1 et V_2 satisferait à l'équation,

$$\Delta (V_1 - V_2) = 0$$

Or $V_1 - V_2 = 0$ sur la surface, donc elle est aussi nulle à l'intérieur, donc

$$V_1 = V_2$$

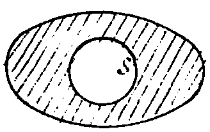
par suite si le problème a une solution, il n'en a qu'une.

Supposons maintenant que $\frac{dV}{dn} = 0$ en tous les points de S alors

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

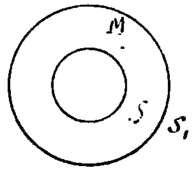
en tout intérieur à W, d'où $V = C^{te}$.

au lieu de prendre une surface fermée, on pourrait appliquer le théorème au



volume compris entre deux surfaces fermées. Si la fonction V est nulle sur S et S_1, elle est nulle pour tout point de l'espace intermédiaire. Supposons qu'il s'agisse du potentiel, on sait qu'il s'annule à l'infini, c'est une conséquence de la définition :

$$V = \int \frac{m}{r}.$$



Soit S une surface fermée telle que $V = 0$ sur S. S'il n'y a pas de masses attirantes à l'extérieur de S, $V = 0$ pour tout point extérieur. Considérons en effet l'espace limité par S et par une sphère S_1 de très grand rayon R, d'après ce qui précède le potenti étant nul sur S et sur s, est nul en tout point intermédiaire.

Je dis en effet que quand R croîtra indéfiniment, l'intégrale

$$\int V \frac{dV}{dn} d\omega$$

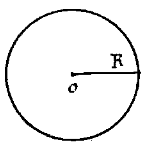
étendue à la sphère S, tend vers 0 car d'après sa définition, V est de l'ordre de $\frac{1}{R}$, $\frac{dV}{dn}$ de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$ et la surface de la sphère de l'ordre de R^2. L'intégrale est donc infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{R}$.

6e Leçon

Application du théorème de Green.

Considérons une sphère S de centre o et de rayon R.

Soit une fonction $V(x, y, z)$ finie continue ainsi que ses dérivées à l'intérieur de S et satisfaisant pour cette région de l'espace à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$.



Dans ces conditions la fonction V se comportera comme un potentiel si toutes les masses attirantes sont extérieures à la sphère. Il résulte de là que l'intégrale $\int_S \frac{dV}{dn} d\omega = 0$, c'est une conséquence du théorème du flux de force.

La fonction V prend une infinité de valeurs sur la surface de la sphère; on appelle moyenne arithmétique de ces quantités l'expression.

$$M = \int_S \frac{V\, d\omega}{4\pi R^2}$$

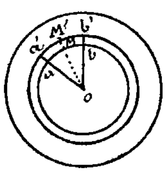
c'est le rapport de l'intégrale $\int_S V d\omega$ à la surface de la sphère, c'est là une extension de la définition élémentaire de la moyenne arithmétique

$$m = \frac{\sum_1^n a_i}{n}$$

La moyenne M est comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs de V sur la surface car l'intégrale $\int_S \frac{d\omega}{4\pi R^2} = 1$.

Il est facile de démontrer que la moyenne M est égale à la valeur de la fonction V au centre o de la sphère

$$M = \int_S \frac{V\, \partial\omega}{4\pi R^2} = V_o$$



Soient μ la valeur de cette moyenne sur une sphère s, de rayon r, et μ' sa valeur sur une sphère S' concentrique et de rayon $r + dr$. Comparons μ à μ'. Un cône infiniment délié ayant son sommet au centre o découpe sur la première sphère un élément superficiel $ab = d\omega$ et sur la seconde $a'b' = d\omega'$

Les deux figures oab et $oa'b'$ sont homothétiques, leur rapport d'homothétie $\frac{r+dr}{r}$. On a donc

$$\frac{d\omega}{r^2} = \frac{d\omega'}{(r+dr)^2}$$

Désignons par V et $V+dV$ les valeurs de la fonction V aux centres de gravité M et M' des éléments $d\omega$ et $d\omega'$. les moyennes sont alors

$$\mu = \int_{S_1} \frac{V\,d\omega}{4\pi R^2}\ , \quad \mu' = \int_{S_1'} \frac{(V+dV)\,d\omega'}{4\pi\,(r+dr)^2}$$

de sorte que $\mu' - \mu = -\int_{S_1} \frac{V\,d\omega}{4\pi R^2} + \int_{S_1} \frac{(V+dV)\,d\omega}{4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_1} dV\,d\omega$

M et M' sont deux points infiniment voisins et MM' est normale à la sphère, $dn = MM' = dr$

Or $dV = \frac{dV}{dn}dn = \frac{dV}{dn}dr$, par suite $\mu' - \mu = \frac{1}{4\pi r^2}\int \frac{dV}{dn}\,dr\,d\omega$ ou $\mu' - \mu = \frac{dr}{4\pi r^2}\int \frac{dV}{dn}\,d\omega$

Comme on a remarqué que $\int \frac{dV}{dn}\,d\omega = 0$, la différence $\mu' - \mu$ est aussi égale à 0. En passant d'une sphère à une autre μ ne varie pas, donc $\mu = V_0$.

La fonction V n'a ni maximum ni minimum.

Supposons qu'elle atteigne un maximum en un point T. Il existera alors une sphère de centre T et de rayon assez petit pour que V reste inférieur à V_0 à l'intérieur de la sphère et sur la sphère. Dans ces conditions on aurait

$$M \leq \int_\Sigma \frac{V\,\partial\omega}{4\pi\varepsilon^2}$$

$$< V_0 \int_\Sigma \frac{d\omega}{4\pi\varepsilon^2} < V_0 \quad \text{car} \int_\Sigma \frac{d\omega}{4\pi\varepsilon^2} = 1$$

ce qui est impossible d'après le théorème précédent. On démontrerait de même que la fonction V ne peut pas avoir de minimum.

Le point attiré T est en équilibre lorsque

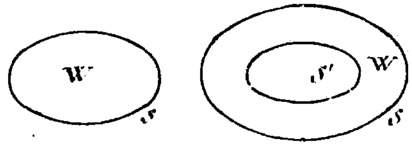
$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0\ , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0\ , \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

et il faut de plus pour la stabilité que les coordonnées de T rendent V maximum ; or V ne peut jamais être maximum, donc la stabilité est impossible. Comme nos raisonnements supposent que la sphère Σ ne contient pas de masses attirantes, il pourra y avoir équilibre stable au contact de celles-ci.

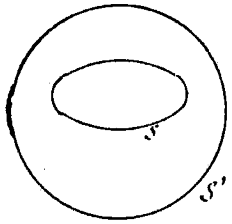
Considérons une fonction V qui reste comprise entre deux limites g et h sur une surface fermée S limitant un volume W ; on a pour tous les points de ce volume

$$h \leq V \leq g$$

La fonction V est supposée finie, continue à l'intérieur de W et solution de l'équation $\Delta V = 0$. Parmi les valeurs que prend la fonction $V(x, y, z)$ à l'intérieur du volume W ou sur la surface S il y en a une plus grande que les autres. W ne comprenant pas de masses attirantes ce maximum ne peut pas être atteint ailleurs que sur donc la propriété est démontrée. On verrait de même que le minimum de V correspond à un point de la surface S. Si donc V a une valeur nulle en tous les points de S, elle a une valeur nulle pour tous les points du volume W. Pour un volume annulaire, le résultat est le même, le maximum et le minimum de V sont atteints sur les surfaces S ou S'.



Considérons maintenant une surface S à l'extérieur de laquelle il n'y ait pas de masses attirantes et une fonction V comprise sur S entre o et g ; V restera entre ces limites pour tous les points extérieurs. Imaginons en effet une sphère S' de grand rayon limitant avec S un volume annulaire. Sur S, on a



$$o < V < g$$

on peut d'autre part déterminer le rayon de la sphère de manière que sur sa surface la fonction V soit inférieure à un nombre petit arbitrairement choisi α. $V < \alpha$ cela est possible car si R grandit indéfiniment les potentiels des points de S' tendent vers zéro. D'après la remarque précédente V à l'intérieur de l'espace annulaire restera compris entre g et $-\alpha$, c'est-à-dire entre g et o puisque α est aussi voisin que l'on veut de zéro. En particulier si en tous les points de S, $V = o$ il en est de même pour tout l'espace extérieur à S.

Problème de Dirichlet.

Trouver une fonction $V(x, y, z)$ finie, continue ainsi que ses dérivées à l'intérieur d'un volume limité par une surface S et prenant en chaque point de S des valeurs données. On veut de plus que V vérifie l'équation $\Delta V = o$

1° Ce problème ne peut pas avoir deux solutions V et V_1, car la différence $V_1 - V$ satisferait à l'équation $\Delta V = o$ et serait nulle pour tous les points de S. Dans ces conditions les fonctions V et V_1 coïncideraient.

2° Il y a toujours une solution.

Considérons en effet l'ensemble des fonctions V finies et continues à l'intérieur de S et prenant sur S les valeurs données ; l'intégrale $\int \Sigma \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 dv$ ne peut pas s'annuler sans quoi on aurait

$$\frac{dV}{dx} = o \quad \frac{dV}{dy} = o \quad \frac{dV}{dz} = o .$$

puisque tous ses éléments sont essentiellement positifs et l'on conclurait que la fonction V est une simple constante. Or V doit prendre toutes les valeurs données sur S qui ne sont pas égales en général. $\int \Sigma \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 dv$ admet donc un certain minimum :

Reste à montrer que la fonction V répondant au minimum vérifie l'équation $\Delta V = 0$. Pour cela partons de la fonction $V + tU$ où U est une fonction quelconque finie et continue à l'intérieur de S mais nulle sur S de manière que $V + tU$ reprenne sur la surface les valeurs données en chaque point. L'intégrale $\int \Sigma \left(\frac{dV + t\,dU}{dx}\right)^2 dv$ est plus grande que $\int \Sigma \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 dv$ puisque V correspond au minimum de cette dernière et que les deux intégrales coïncident pour $t = 0$. On a

$$\int \Sigma \left(\frac{dV + t\,dU}{dx}\right)^2 dv = \int \Sigma \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + 2t \int \Sigma \frac{dV \cdot dU}{dx}\, dv + t^2 \int \Sigma \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 dv$$

Ce polynôme du second degré en t doit atteindre son minimum pour $t = 0$

donc $\int \Sigma \left(\frac{dV \cdot dU}{dx\, dx}\right) dv = 0$

Or le théorème de Green nous donne

$$\int U \frac{dV}{dn}\, d\omega = \int \Sigma \left(\frac{dV}{dx}\, \frac{dU}{dx}\right) dv + \int U\, \Delta V\, dv$$

De plus U est nul sur la surface S l'intégrale $\int U \frac{dV}{dn}\, d\omega$ est donc nulle. Il en est de même comme on vient de le voir de la première intégrale du 2^e^ membre.

On aura donc quelle que soit la fonction U

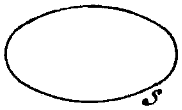
$$\int U\, \Delta V\, dv = 0 .$$

Je dis que cela ne peut avoir lieu que si ΔV est identiquement nul, car si cela n'était pas, on choisirait la fonction U dont on peut disposer arbitrairement de telle sorte qu'elle soit toujours de même signe que ΔV et l'intégrale dont tous les éléments seraient positifs, ne pourrait être nulle.

Le problème de Dirichlet admet donc toujours une solution.

Cette démonstration dont on s'est longtemps contenté n'est pas rigoureuse. On en possède qui sont tout-à-fait satisfaisantes mais extrêmement longues.

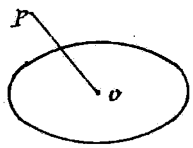
Distribution de l'électricité à la surface des conducteurs.



S

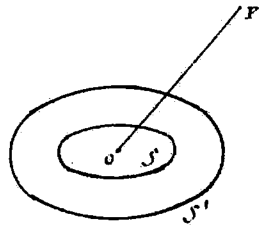
Soit M la charge électrique de la surface S du conducteur. Comme il n'y a pas de masses attirantes à l'extérieur de S, on aura pour tous les points de cet espace $\Delta V = 0$, de plus $V = 0$ à l'infini, V doit enfin être une constante V_0 sur le conducteur et en tous les points intérieurs à S. Le problème consiste à trouver une fonction V satisfaisant à toutes ces conditions. Le principe de Dirichlet permet de déterminer une fonction V' s'annulant à l'infini vérifiant l'équation $\Delta V' = 0$ et égale à l'unité en tous points de S on a alors $V = V' V_0$

Pour un point $P(x, y, z)$ très-éloigné, on peut remplacer l'attraction du corps par celui d'un de ses points où l'on concentrerait toute la masse. le rapport $\frac{V}{\left(\frac{M}{r}\right)}$ ou



$r = OP$ a pour limite l'unité lorsque r croît indéfiniment donc :

$$\lim \frac{V'}{\left(\frac{M}{r}\right)} = \frac{1}{V_0} .$$



La connaissance de V' et de M donne donc V_0, potentiel à l'intérieur du conducteur. La fonction V se trouve alors entièrement déterminée. La formule $4\pi\delta = \frac{dV}{dn}$ permettra de calculer la densité électrique en un point du conducteur lorsqu'on aura la fonction V.

Si S est la surface d'un conducteur, c'est une surface de niveau. Considérons une seconde surface de niveau quelconque S'. Imaginons que l'on envisage un conducteur limité par cette surface S' et sur laquelle on supposera distribuée la même quantité M d'électricité que sur S. Soient V le potentiel en un point relativement à S et V' le potentiel au même point par rapport à S' on a

$$\Delta V = 0 \quad , \quad \Delta V' = 0$$

et à l'infini $V = 0$ et $V' = 0$.

Le potentiel sur S' est une constante V_1 puisque S' est une surface de niveau pour S. En considérant S' comme un conducteur il a en chacun des points de sa surface un potentiel constant V'_0. La fonction

$$V - \frac{V_1}{V'_0} V'$$

satisfait à l'équation de Laplace et est nulle pour un éloignement infini ; ayant la valeur zéro sur S' elle sera nulle en tous les points extérieurs à S'. Donc le rapport $\frac{V}{V'}$ est constant. Si P s'éloigne à l'infini la limite de $\frac{V}{V'} = 1$ donc $V = V'$.

Le potentiel en un point reste le même lorsqu'on substitue au conducteur une surface de niveau également chargée et laissant le point à l'extérieur.

Supposons qu'à l'intérieur d'une sphère S il n'y ait pas de masses attirantes la fonction V sera finie continue ainsi que toutes ses dérivées à l'intérieur de cette sphère. Soit en effet dm un élément de masse attirante, et r sa distance au point attiré, on aura :

$$V = \int \frac{dm}{r} .$$

si DV désigne une dérivée d'ordre quelconque de V, par exemple :

$$DV = \frac{d^{m+n+p} V}{dx^m dy^n dz^p}$$

on aura $DV = \int dm \, D\left(\frac{1}{r}\right)$.

Il est aisé de vérifier que $D\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{P}{r^k}$.

P étant un polynôme entier par rapport aux coordonnées du point attiré et à celles de l'élément attirant dm.

Il résulte de là que $D(\frac{1}{r})$ ne peut devenir infini que si r s'annule ce qui est impossible si le point attiré est intérieur à la sphère S et toutes les masses attirantes extérieures.

Donc $D(\frac{1}{r})$ et par conséquent $D.V$ est finie.

Toutes les dérivées de V sont finies ; elles sont donc aussi toutes continues puisqu'une fonction dont les dérivées sont finies est continue.

Supposons maintenant que la densité de la matière attirante ne soit plus nulle à l'intérieur de S, mais constante et égale à ρ.

Je dis que le résultat précédent subsiste encore, nous poserons en effet.

$$V = V' + V''.$$

V' se rapportant à l'attraction des masses extérieures à S, V'' à l'attraction des masses intérieures. V' est fini et continu ainsi que toutes ses dérivées d'après ce qui précède ;

Il en est de même de V'' puisque c'est le potentiel d'une sphère homogène par rapport à un point intérieur.

Il en est de même de V.

7e Leçon.

Attraction des ellipsoïdes.

Considérons l'équation (1) $\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2-b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2-c^2} = 1$ dans laquelle b et c sont des constantes. Lorsque le paramètre λ varie, on obtient une infinité de surfaces du second ordre dites homofocales entre elles. Soit $b^2 < c^2$. Si λ^2 est inférieur à b^2, λ^2-b^2 et λ^2-c^2 sont deux quantités négatives et par suite l'équation (1) représente un hyperboloïde à deux nappes, l'axe des x étant l'axe réel. Pour λ^2 compris entre b^2 et c^2 l'équation (1) donne des hyperboloïdes à une nappe car le coefficient de z^2 seul est négatif ; enfin on obtient des ellipsoïdes pour les valeurs de λ^2 qui surpassent c^2, dans ce cas les coefficients de x^2, y^2 et z^2 sont en effet positifs. Reprenons l'équation $\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2-b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2-c^2} = 1$. Chassant les dénominateurs il vient :

$$\lambda^2(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2) - x^2(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2) - y^2\lambda^2(\lambda^2-c^2) - z^2\lambda^2(\lambda^2-b^2) = 0$$

cette équation est du troisième degré en λ^2 et a ses trois racines réelles et positives. Substituons en effet à λ^2 les quantités

$$0,\ b^2,\ c^2,\ +\alpha$$

on trouve pour les signes des substitutions $-, +, -, +$ si l'on tient compte de l'hypothèse $b^2 < c^2$.

Soient ν^2, μ^2 et ρ^2 les racines correspondant respectivement aux intervalles

$$o.b^2; \qquad b^2, c^2; \qquad c^2, +\infty.$$

d'après ce qui précède :

$\dfrac{x^2}{\rho^2} + \dfrac{y^2}{\rho^2-b^2} + \dfrac{z^2}{\rho^2-c^2} = 1$ est un ellipsoïde

$\dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2-b^2} + \dfrac{z^2}{\mu^2-c^2} = 1$ est un hyperboloïde à une nappe,

et $\dfrac{x^2}{\nu^2} + \dfrac{y^2}{\nu^2-b^2} + \dfrac{z^2}{\nu^2-c^2} = 1$ est un hyperboloïde à deux nappes.

Cela montre que par tout point (x, y, z), passent 3 surfaces du second degré homofocales à savoir un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes.

Les valeurs ρ, μ, ν qui correspondent au point (x, y, z) se nomment les coordonnées elliptiques du point.

Il est aisé de voir que deux quelconques de ces trois surfaces se coupent orthogonalement. Prenons les surfaces

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2-b^2} + \frac{z^2}{\rho^2-c^2} = 1 \qquad (E)$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2-b^2} + \frac{z^2}{\mu^2-c^2} = 1 \qquad (H_1)$$

et envisageons un point de leur intersection. Pour (E) le plan tangent en ce point a ses cosinus directeurs proportionnels à

$$\frac{x}{\rho^2}, \quad \frac{y}{\rho^2-b^2}, \quad \frac{z}{\rho^2-c^2}.$$

Le plan tangent au même point à la surface H_1 a ses cosinus directeurs proportionnels à

$$\frac{x}{\mu^2}; \quad \frac{y}{\mu^2-b^2}, \quad \frac{z}{\mu^2-c^2}$$

Il faut pour que les deux surfaces soient orthogonales, que l'on ait en chaque point de leur intersection

$$(1) \quad \frac{x^2}{\rho^2\mu^2} + \frac{y^2}{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)} + \frac{z^2}{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)} = 0$$

Or si l'on retranche membre à membre les deux équations (E) et (H_1) il vient après suppression du facteur commun $\mu^2-\rho^2$.

$$\frac{x^2}{\rho^2\mu^2} + \frac{y^2}{(\rho^2-b^2)(\mu^2-c^2)} + \frac{z^2}{(\rho^2-b^2)(\mu^2-c^2} = 0$$

c'est-à-dire la condition (1) d'orthogonalité.

Exprimons maintenant x, y et z, coordonnées cartésiennes d'un point au moyen de ses coordonnées elliptiques, ρ, μ et ν. Pour cela partons de l'identité.

$$\lambda^2(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2) - x^2(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2) - y^2\lambda^2(\lambda^2-c^2) - z^2\lambda^2(\lambda^2-b^2)$$
$$= (\lambda^2-\rho^2)(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2).$$

Faisant successivement dans cette identité

$$\lambda^2 = 0 \quad , \quad \lambda^2 = b^2 \quad , \quad \lambda^2 = c^2$$

Il vient $\quad x = \dfrac{\rho\mu\nu}{bc}$, $\quad y = \sqrt{\dfrac{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{b^2(c^2-b^2)}}$, $\quad z = \sqrt{\dfrac{(\rho^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{c^2(c^2-b^2)}}$

Définition des points correspondants. — Prenons un point M de coordonnées elliptiques ρ, μ et ν sur un ellipsoïde E ayant pour équation

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2-b^2} + \frac{z^2}{\rho^2-b^2} = 1$$

Les axes de cet ellipsoïde sont :

$$\rho \quad , \sqrt{\rho^2-b^2} \quad , \sqrt{\rho^2-c^2}.$$

Soit M' un point de coordonnées elliptiques ρ', μ' et ν' pris sur un ellipsoïde E' homofocale au précédent. Les points M et M' sont dits correspondants sur les ellipsoïdes E et E' si les deux autres coordonnées elliptiques $(\mu, \nu)(\mu', \nu')$ sont telles que $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$. Si (x, y, z) sont les coordonnées du point M ; x', y', z' celles du point correspondant M' on a

$$x = \frac{\rho\mu\nu}{bc} \quad , \quad x' = \frac{\rho'\mu\nu}{bc}$$

d'où $\quad x' = x\,\dfrac{\rho'}{\rho}.$

De même $\quad y' = y\sqrt{\dfrac{\rho'^2-b^2}{\rho^2-b^2}}$

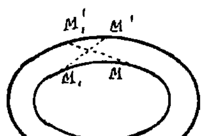
et $\quad z' = z\sqrt{\dfrac{\rho'^2-c^2}{\rho^2-c^2}}$

ce qui montre que le rapport des axes de même nom des deux ellipsoïdes est égal au rapport des coordonnées suivant ces axes de deux points correspondants.

On a donc en posant $\alpha = \dfrac{\rho'}{\rho}$, $\beta = \sqrt{\dfrac{\rho'^2-b^2}{\rho^2-b^2}}$, $\gamma = \sqrt{\dfrac{\rho'^2-c^2}{\rho^2-c^2}}$.

et prenant deux nouveaux points correspondants M_1 (x_1, y_1, z_1) et M'_1 (x'_1, y'_1, z'_1)

$$x'_1 = \alpha x_1 \quad , \quad y'_1 = \beta y_1 \quad , \quad z'_1 = \gamma z_1$$



Évaluons les distances MM'_1 et $M'M_1$

$$\overline{MM'_1}^2 = (x-\alpha x_1)^2 + (y-\beta y_1)^2 + (z-\gamma z_1)^2$$

$$\overline{M'M_1}^2 = (\alpha x - x_1)^2 + (\beta y - y_1)^2 + (\gamma z - z_1)^2$$

Il est aisé de voir que ces deux distances sont égales c'est-à-dire que l'on a

$$\Sigma(\alpha x_1 - x)^2 = \Sigma(\alpha x - x_1)^2$$

Développant, il vient

$$\Sigma\alpha^2 x_1^2 - 2\Sigma\alpha x x_1 + \Sigma x^2 = \Sigma\alpha^2 x^2 - 2\Sigma\alpha x x_1 + \Sigma x_1^2$$

d'où $\quad \Sigma(\alpha^2-1)x^2 = \Sigma(\alpha^2-1)x_1^2$

Reste à vérifier cette égalité. Considérons le premier membre $\Sigma(\alpha^2-1)x^2$ il est égal à

$$\left(\frac{\rho'^2}{\rho^2} - 1\right)x^2 + \left(\frac{\rho'^2-b^2}{\rho^2-b^2} - 1\right)y^2 + \left(\frac{\rho'^2-c^2}{\rho^2-c^2} - 1\right)z^2 \cdot$$

résultat obtenu en substituant à α, β, γ leurs valeurs en ρ.

Mais $\left(\frac{\rho'^2}{\rho^2}-1\right)x^2+\left(\frac{\rho'^2-b^2}{\rho^2-b^2}-1\right)y^2+\left(\frac{\rho'^2-c^2}{\rho^2-c^2}-1\right)z^2=(\rho'^2-\rho^2)\left[\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}\right]=\rho'^2-\rho^2$

car d'après l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1$$

donc $\Sigma(\alpha^2-1)x^2=\rho'^2-\rho^2$. En calculant de la même manière l'expression $\Sigma(\alpha'^2-1)x'^2$, on trouve qu'elle est aussi égale à la différence $\rho'^2-\rho^2$. Cela montre que si l'on prend 2 couples de points correspondants (M, M'), (M_1, M'_1) les distances MM'_1 et $M'M_1$ sont égales.

Attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince sur un point.

Une pareille couche est limitée par deux ellipsoïdes concentriques, infiniment rapprochés, ayant même direction d'axes et des longueurs d'axes proportionnelles.

Soient A, B, C, les axes de l'ellipsoïde extérieur et $A(1-\varepsilon)$, $B(1-\varepsilon)$, $C(1-\varepsilon)$ ceux de l'ellipsoïde intérieur. ε est un infiniment petit.

Le volume de la couche est

$$\frac{4}{3}\pi ABC\left[1-(1-\varepsilon)^3\right]=\frac{4}{3}\pi ABC\left[-3\varepsilon^2+\varepsilon^3+3\varepsilon\right]$$

et en négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur au premier

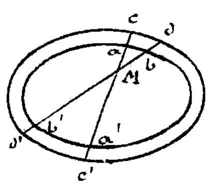
$$\frac{4}{3}\pi ABC\,.\,3\varepsilon=4\pi ABC\,\varepsilon$$

Si d est la densité de la couche sa masse est

$$M=4\pi ABC\,\varepsilon\, d$$

L'attraction d'une pareille couche sur un point intérieur est nulle.

Considérons un cone infiniment délié ayant son sommet en M ; les deux nappes de ce cône découpent dans la couche deux éléments de volume $abcd$, $a'b'c'd'$



Le volume $abcd$ est à des infiniments petits près, un tronc de cône ; ses bases ab et cd sont sensiblement homothétiques et dans le rapport $\frac{\overline{Ma}^2}{\overline{Mc}^2}$, comme Ma et Mc diffèrent infiniment peu, on considérera comme égales les bases ab et cd et alors le tronc de cône sera assimilé à un cylindre. Le volume de ce petit cylindre oblique est égal au produit de ac par sa section droite $d\omega$; $d\omega$ est la portion de la surface sphérique de centre M et de rayon Ma interceptée par le cone Mab. Donc

$$\text{vol. } abcd = ac\,.\,d\omega.$$

et l'attraction exercée par l'élément sur le point M est

$$\frac{ac\,.\,d\omega\,.\,d}{\overline{Ma}^2}$$

On aurait de même pour l'attraction de l'élément $a'b'c'd'$

$$\frac{a'c'\,.\,d\omega'\,.\,d}{\overline{Ma'}^2}$$

Ces deux attractions sont directement opposées à des infiniment petits près. Leur effet sur le point M sera donc nul si

$$\frac{a c . d\omega . d}{\overline{Ma}^2} = \frac{a' c' . d\omega' . d}{\overline{Ma'}^2}$$

c'est-à-dire, si

$$\frac{ac . d\omega}{\overline{Ma}^2} = \frac{a'c' . d\omega'}{\overline{Ma'}^2}$$

or $ac = a'c'$ car les deux ellipsoïdes admettent les mêmes plans diamétraux ; de plus :

$$\frac{d\omega}{\overline{Ma}^2} = \frac{d\omega'}{\overline{Ma'}^2}$$

puisque $d\omega$ et $d\omega'$ sont des éléments de surface se correspondant dans deux systèmes homothétiques. En envisageant une infinité de cônes déliés ayant leurs sommets au point M on décomposera la couche en couples d'éléments dont l'effet sur le point M est nul donc

L'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince sur un point intérieur est nulle.

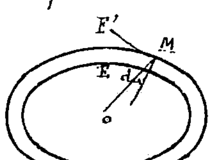
Si V est le potentiel au point M

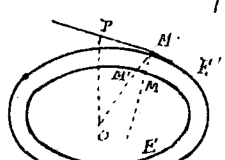
$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad , \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad , \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \text{et par suite } V = C^{te}.$$

Distribution de l'électricité à la surface d'un conducteur ellipsoïdal.

L'ellipsoïde est isolé et non influencé. On peut se placer, soit au point de vue de la distribution superficielle, soit au point de vue de la distribution en couche infiniment mince. Dans le premier cas il faut déterminer la densité électrique, dans le second, l'épaisseur superficielle. Pour qu'il y ait équilibre, l'électricité doit se répartir de manière que l'attraction sur un point intérieur soit nulle. Il est clair d'après ce qui précède que l'électricité se disposera en une couche ellipsoïdale limitée par deux ellipsoïdes E, E' homothétiques et concentriques.

Calcul de la densité superficielle δ. Considérons sur l'ellipsoïde E un élément de surface $d\omega$, menons en tous les points du contour de $d\omega$ des normales à la surface





et limitons les à l'ellipsoïde E'. On obtient ainsi un solide assimilable à un petit cylindre dont le volume est $e\,d\omega$, e désignant l'épaisseur électrique évaluée suivant la normale. La masse de cet élément est $e\,d\omega . d$. Soit δ la densité superficielle ; on doit avoir $e\,d\omega . d = d\omega . \delta$ d'où $\delta = e . d$. Menons au point M le plan tangent MP et la normale MN à l'ellipsoïde E'. Joignons le centre o de l'ellipsoïde au point M et abaissons du point o une perpendiculaire oT sur le plan tangent, le rayon vecteur oM rencontre l'ellipsoïde E au point M' et les deux triangles semblables MM'N, oMP donnent $\frac{MN}{oT} = \frac{MM'}{oM}$

Le rapport d'homothétie des deux ellipsoïdes E et E' étant $1+\varepsilon$, on a:

$$OM' = OM\ (1-\varepsilon)$$

$$\text{d'où}\quad OM - OM' = MM' = \varepsilon\,.\,OM\,.$$

$$\text{Comme}\quad MN = e\quad \text{le rapport}\ \frac{MN}{OP} = \frac{MM'}{OM}\ \text{fournit}\ \frac{e}{OP} = \varepsilon$$

$$\text{d'où}\quad \delta = d\,.\,\varepsilon\,.\,\overline{OP}$$

$$\text{or la masse de la couche est}\quad M = 4\pi\varepsilon d\,ABC$$

$$\text{d'où}\quad \varepsilon d = \frac{M}{4\pi ABC}$$

$$\text{par suite}\quad \delta = \frac{M\,.\,OP}{4\pi ABC}$$

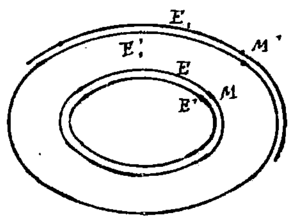
Si donc une masse M d'électricité est en équilibre sur un ellipsoïde, la densité superficielle en un point est proportionnelle à la charge électrique M, à la distance du centre de l'ellipsoïde au plan tangent en ce point et inversement proportionnelle au triple du volume de l'ellipsoïde.

δ est maximum aux extrémités du grand axe où $\delta = \frac{M}{4\pi BC}$ et minimum aux extrémités du petit axe où $\delta = \frac{M}{4\pi AB}$.

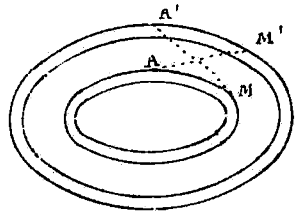
8e Leçon.

Attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince sur un point extérieur.

Nous avons démontré dans la leçon précédente que le potentiel était constant à l'intérieur de l'ellipsoïde; la surface de l'ellipsoïde est donc une surface de niveau. Démontrons que les autres surfaces de niveau sont des ellipsoïdes homofocaux au précédent. Considérons la couche infiniment mince comprise entre deux ellipsoïdes E, E' d'axes ABC ; $A(1-\varepsilon)$, $B(1-\varepsilon)$, $C(1-\varepsilon)$ et l'ellipsoïde E_1 homofocal de E, ayant pour axes αA, βB, γC. Prenons un point M sur E et un point M' sur E_1, ils seront correspondants si l'on a $x' = \alpha x$, $y' = \beta y$, $z' = \gamma z$.



En multipliant toutes les abcisses de E et E' par α, les ordonnées par β et les z par γ, on obtient les ellipsoïdes E_1 et E'_1 limitant une nouvelle couche infiniment mince ; l'ellipsoïde E'_1 a pour axes $\alpha A(1-\varepsilon)$, $\beta B(1-\varepsilon)$, $\gamma C(1-\varepsilon)$. Le volume de la couche (E, E') est $4\pi ABC\varepsilon$ (en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier) ; le volume de la seconde couche est $4\pi ABC\varepsilon\alpha\beta\gamma$. En général la transformation homographique précédente a pour effet de multiplier les volumes par $\alpha\beta\gamma$.



Prenons les points correspondants (A, A'), (M, M') et évaluons le potentiel V' de E, E'_1 au point M et le potentiel V de la couche $E E'_1$ au point M'. Soient $d\omega$ et $d\omega'$ les volumes de deux éléments correspondants, A et A' on a :

$$d\omega' = d\omega \cdot \alpha\beta\gamma$$

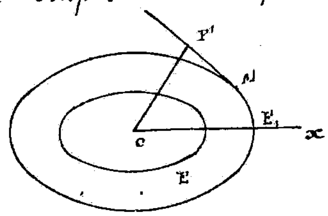
$$V = \int \frac{d\omega \cdot d}{AM'}$$

$$V' = \int \frac{d\omega' . d}{A'M} = \alpha\beta\gamma \int \frac{d\omega . d}{A'M}$$

et comme $AM' = A'M$

$$V' = V . \alpha\beta\gamma .$$

Or V', potentiel en un point intérieur à la couche ellipsoïdale E, E'_1 est constant, par suite V est constant donc E_1 est une surface de niveau. Il a été démontré que si l'on substituait à un conducteur donné une surface de niveau sur laquelle on distribuerait la même quantité d'électricité, l'attraction sur un point extérieur aux deux surfaces restait la même. Ainsi dans le cas présent on peut remplacer le conducteur par un ellipsoïde homofocal également chargé. Cherchons par exemple l'attraction du conducteur E sur le point M. Considérons un ellipsoïde E_1 homofocal à E et infiniment voisin du point M, celui-ci restant extérieur M étant la masse d'électricité répartie sur E et sur E_1, l'attraction de E_1 sur le point M est égale à $4\pi\delta$, δ étant la densité électrique.



Or $\delta = \dfrac{M . oP'}{4\pi\, A'B'C'}$; A', B', C', étant les axes de l'ellipsoïde E_1. L'attraction est donc égale à $\dfrac{M . oP'}{A', B', C'}$. Si le point M est sur ox l'attraction F est $\dfrac{M}{B'C'}$, car dans ce cas $oP' = A'$. Remplaçant $M, A, B, C, B'C'$ par leurs valeurs.

$$M = 4\pi\varepsilon d\, ABC \;,\; A^2 = \rho^2 \;,\; B^2 = \rho^2 - b^2 \;,\; C^2 = \rho^2 - c^2 \;,\; B'^2 = \rho'^2 - b^2 \;,\; C' = \rho'^2 - c^2$$

$$\text{il vient } F_{ox} = \frac{4\pi\varepsilon d\,\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}{\sqrt{(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)}}$$

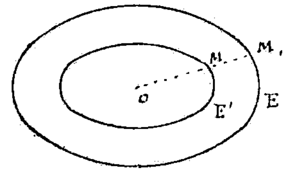
L'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince sur un point extérieur est donc proportionnelle à la masse de la couche, à la distance du centre de la couche au plan tangent mené au point attiré à l'ellipsoïde homofocal qui passe en ce point, et inversement proportionnelle au produit des axes de cet ellipsoïde.

Attraction d'un ellipsoïde plein et homogène sur un point.

Soit d, la densité de sa matière.

1° Le point est intérieur. La fonction V est finie, continue, ainsi que ses dérivées pour tout point dans le voisinage duquel la densité est constante. La fonction V ainsi que ses dérivées est encore finie et continue pour les points extérieurs ; il y a discontinuité sur la surface ; on a en effet pour les points intérieurs $\Delta V = -4\pi d$ et pour les autres $\Delta V = 0$. La même formule analytique ne peut donc pas donner le potentiel pour tout l'espace.

Supposons l'ellipsoïde plein et homogène décomposé en couches ellipsoïdales infiniment minces du type étudié précédemment. Envisageons en particulier l'ellipsoïde E' qui passe par le point attiré M. Toutes les couches extérieures à E' sont sans effet sur le point M. Occupons-nous des couches intérieures. La ligne OM vient rencontrer E en M_1 ; les systèmes (E', M), (E, M_1) sont homothétiques et par suite l'attraction de E' sur M est parallèle à l'attraction de E sur M_1. Quant à l'intensité de l'attraction, elle est proportionnelle par raison d'homothétie, au rayon vecteur OM.



La masse de E' est à celle de E comme le cube de OM est à celui de OM_1. Mais pour avoir l'attraction, il faut diviser les masses par le carré des distances. Or en passant du système (E', M) au système homothétique (E, M_1) les longueurs sont multipliées par $\frac{OM_1}{OM}$. L'attraction de E' sur M est donc à celle de E, sur M_1 comme OM est à OM_1. Les dérivées $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, varient donc proportionnellement à OM quand le point M se déplace sur le rayon vecteur OM. En d'autres termes, ce sont des fonctions homogènes et du premier degré en x, y, et z. Les dérivées secondes seront alors homogènes et de degré 0, c'est à dire qu'elles seront constantes tout le long d'un vecteur OM_1. Mais d'après ce que nous avons dit à la fin de la 6e leçon elles sont finies et continues. Elles auront donc même valeur en un point quelconque d'un vecteur quelconque qu'au point O. Ce sont donc des constantes.

Donc V est un polynôme du second degré en x, y et z.

Mais comme les plans de coordonnées sont des plans de symétrie, ce polynôme ne doit pas changer quand on change x en $-x$, ou y en $-y$, ou z en $-z$.

Il est donc de la forme

$$V = L - \frac{N}{2}x^2 - \frac{P}{2}y^2 - \frac{Q}{2}z^2, \text{ on a :}$$

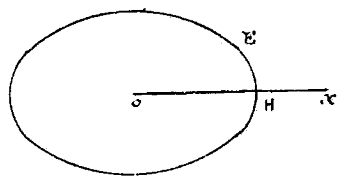
$$\frac{\partial V}{\partial x} = -Nx, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -Py, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -Qz$$

Les composantes de l'attraction parallèles aux axes de l'ellipsoïde sont respectivement proportionnelles aux coordonnées du point attiré évaluées suivant ces axes.

L'attraction totale est d'ailleurs $\sqrt{N^2x^2 + P^2y^2 + Q^2z^2}$.

Potentiel N° 5.

Calcul de N. Comme $\frac{\partial V}{\partial x} = -Nx$, l'attraction à l'extrémité H de l'axe des x sera égale à $-N.A$ en posant $OH = A$.



Calculons autrement cette attraction.

Considérons une couche ellipsoïdale infiniment mince comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques ayant respectivement pour longueurs d'axes.

Au, Bu, Cu ; $A(u-du)$, $B(u-du)$, $C(u-du)$, u allant de o à 1. cette couche se déplace du centre o à la surface E. Or l'attraction d'une pareille couche sur un point de l'axe des x est connue ; la formule est

$$F'_{ox} = 4\pi\,\mathcal{E}\,d.\,\frac{\rho\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-c^2)}}{\sqrt{(\rho'^2-b^2)(\rho'^2-c^2)}}$$

Elle devient dans le cas présent

$$F_H = 4\pi d.\frac{du}{u}.\frac{ABC\,u^3}{\sqrt{[A^2-(A^2-B^2)u^2][A^2-(A^2-C^2)u^2]}}$$

Par suite l'attraction totale est :

$$-NA = \int_0^1 4\pi ABC.d\,\frac{u^2\,du}{\sqrt{[A^2-(A^2-B^2)u^2][A^2-(A^2-C^2)u^2]}}$$

Or la masse M de l'ellipsoïde est égale à $\frac{4}{3}\pi ABC.d$ par suite $4\pi ABC.d = 3M$ et l'attraction totale exercée sur le point H devient

$$-NA = \int_0^1 \frac{3Mu^2\,du}{\sqrt{[A^2-(A^2-B^2)u^2][A^2-(A^2-C^2)u^2]}}$$

En permutant les lettres A, B, C, on obtiendrait 2 autres équations qui feraient connaître P et Q. Ces trois intégrales sont des intégrales elliptiques. On pourra toutefois intégrer par les procédés élémentaires si l'ellipsoïde est de révolution, c'est-à-dire si l'on a soit $B^2 = C^2$ soit $A^2 = B^2$. Dans le premier cas l'intégrale se réduit à

$\int_0^1 \frac{3Mu^2du}{A^2-(A^2-B^2)u^2}$ et dans le second cas à $\int_0^1 \frac{3Mu^2\,du}{A\sqrt{A^2-(A^2-C^2)u^2}}$.

La résolution de ces intégrales ne présente aucune difficulté.

La somme des trois intégrales elliptiques N, P, Q est constante. On a en effet

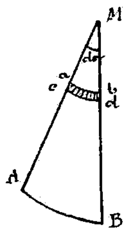
$$\Delta V = -4\pi d, \text{ or :}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -Nx, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -Py, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -Qz \quad \text{donc}$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -(N+P+Q) = -4\pi d$$

9e Leçon.

Cherchons l'attraction d'un cône infiniment délié sur son sommet. Supposons pour simplifier que la densité de la matière attirante soit prise pour unité. soit $d\sigma$



l'angle solide au point M. Décrivons de M comme centre une série de sphères. Soient $Ma = r$ $Mc = r + dr$. On a

$$ab = r^2\, d\sigma.$$

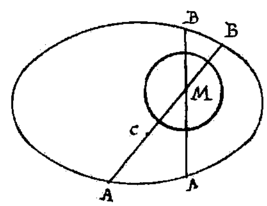
Assimilant le volume $abcd$ à un petit cylindre de base ab et de hauteur dr il vient vol $abcd = r^2\, d\sigma\, dr$. L'attraction exercée par ce volume sur le point M est par suite $\dfrac{r^2\, d\sigma\, dr}{r^2} = d\sigma\, dr$

et celle exercée par le cône est

$$\int_0^{MA} d\sigma\, dr = MA\, d\sigma.$$

Attraction d'un ellipsoïde plein et homogène sur un point.

Considérons un ellipsoïde $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$. Soit $M\,(x, y, z)$ un point intérieur. Evaluons $\frac{\partial V}{\partial x}$. A cet effet décomposons l'ellipsoïde en cônes infiniment déliés



ayant leurs sommets en M. Désignons par α, β, γ, les cosinus directeurs de la génératrice MA de l'un d'eux. Posons

$$\alpha = \cos\theta \quad , \beta = \sin\theta . \cos\varphi \quad , \gamma = \sin\theta . \sin\varphi .$$

$$\text{on a} \quad d\sigma = \sin\theta . d\theta . d\varphi .$$

L'attraction du cône AMA' au point M est $MA\, d\sigma$, celle du cône BMB', $MB\, d\sigma$.

La résultante de ces deux attractions est $(MA - MB)\, d\sigma$.

soit c le milieu de AB. On a

$$MA - MB = MC + CA - (CA - MC) = 2MC$$

$$\text{donc } (MA - MB)\, d\sigma = 2\, MC . d\sigma .$$

Si ξ est la projection de MC sur ox on a pour la composante suivant ox de l'attraction des deux cônes MA et MB $2\,\xi\, d\sigma$ et pour la composante de l'attraction totale

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \xi\, d\sigma .$$

Cette intégrale doit être étendue à toute la surface de la sphère décrite de M comme centre avec un rayon égal à l'unité. Je supprime le facteur 2 parce qu'en étendant l'intégrale à toute la sphère on retrouve deux fois chacun des cônes MA et MB. Soient X, Y, Z les coordonnées du point C, on a :

$$\xi = X - x\ ,\quad \eta = Y - y\ ,\quad \zeta = Z - z\ .$$

Le lieu des points c milieux des cordes de l'ellipsoïde passant par M est un ellipsoïde homothétique du précédent et ayant pour équation

$$(1)\quad AX^2 + BY^2 + CZ^2 - AXx - BYy - CZz = 0$$

Introduisons ξ, η, ζ.

On peut écrire l'équation (1)

$$\Sigma\ AX\ (X - x) = 0$$

ou $\Sigma\ A\ (x + \xi)\ \xi = 0$, or

$$\xi = MC . \cos\theta\ ,\qquad \eta = MC\ \sin\theta\ \cos\varphi\ ,\qquad \zeta = MC\ \sin\theta . \sin\varphi$$

d'ou $\eta = \xi . \cos\varphi\ tg . \theta\ ,\quad \zeta = \xi . \sin\varphi\ tg . \theta\ ,$

par suite $$\xi = -\frac{Ax + By\ \cos\varphi\ tg\,\theta + Cz\ \sin\varphi\ tg\,\theta}{A + B\ \cos^2\varphi\ tg^2\theta + C\ \sin^2\varphi\ tg^2\theta}$$

ξ est une fonction linéaire d'x, d'y et de z.

$$\xi = H_1 x + H_2 y + H_3 z\ .$$

H_1, H_2, H_3 étant des fonctions de θ et de φ. On a donc :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int \xi\, d\sigma = x \int H_1\, d\sigma + y \int H_2\, d\sigma + z \int H_3\, d\sigma .$$

θ doit varier de 0 à π et φ de 0 à 2π. Il résulte de là que

$$\frac{\partial v}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial z}$$

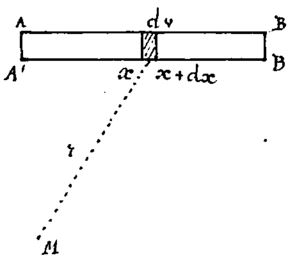
sont des fonctions linéaires des coordonnées du point M. La symétrie introduite par les axes choisis exige que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -Nx\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -Py\ ,\ \frac{\partial v}{\partial z} = -Qz\ .$$

La question est donc résolue pour le cas du point intérieur.

Le cas de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur se ramène au précédent au moyen du théorème d'Ivory.

Théorème d'Ivory. – Calculons d'abord l'attraction d'un cylindre infiniment petit sur un point extérieur. Soit $d\omega$ la section droite du cylindre



attirant AA'BB' et M le point attiré. Cherchons la composante de l'attraction parallèle aux génératrices du cylindre. La masse de l'élément dv est $\rho\, dx\, d\omega$ ou $dx\, d\omega$ en prenant $\rho = 1$, son potentiel au point M est

$$\frac{dx\ d\omega}{r}$$

et par suite on a pour la composante cherchée

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int dx . d\omega . \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) = d\omega\ \left(\frac{1}{MB} - \frac{1}{MA}\right)$$

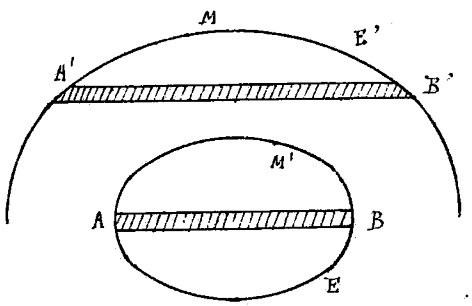
Supposons que l'attraction soit une fonction quelconque de la distance, le potentiel sera représenté par une somme telle que

$\Sigma\, m\, \varphi(r)$ où $\varphi(r)$ est une fonction quelconque de r.

La composante de l'attraction parallèle à AA' sera alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \int dx \; d\omega \frac{d}{dx} \varphi(r) \\ &= d\omega \int dx \frac{d}{dx} \varphi(r) \\ &= d\omega \left[\varphi(MB) - \varphi(MA) \right]\end{aligned}$$

Considérons maintenant un ellipsoïde d'axes a, b, c attirant un point extérieur (x, y, z) M. Décomposons l'ellipsoïde en cylindres infiniment petits parallèles à ox. L'attraction suivant ox sera d'après ce qui précède



$$X = \int d\omega \left[\varphi(MB) - \varphi(MA) \right]$$

cette intégrale étant étendue à toute la surface E. Faisons passer par M un ellipsoïdale E' d'axes a', b', c' homofocal à E tel que

$$a' = a\alpha \;, \qquad b' = b\beta \;, \qquad c' = c\gamma$$

Transformons E en E' en posant

$$x' = \alpha x \;, \qquad y' = \beta y \;, \qquad z' = \gamma z$$

chaque point de E se transforme en son correspondant sur E'. Le cylindre infiniment petit AB se transforme en un cylindre infiniment petit $A'B'$ de E' parallèle à ox ; A, A', B et B' sont des points correspondants. Soient $d\omega'$ la section de ce nouveau cylindre. On sait comme le montre du reste l'intégrale transformée de $\int dx\, dy\, dz$ que

$$\text{vol. } AB \,.\, \gamma\alpha\beta = \text{vol } A'B'$$

On a évidemment dans le cas présent

$$d\omega' = \beta\gamma\; d\omega$$

Soit M' le point correspondant de M dans le système des ellipsoïdes homofocaux E, E'.

La composante X' suivant ox de l'attraction de l'ellipsoïde E' sur le point M' a pour expression

$$X' = \beta\gamma \int d\omega \left[\varphi(M'B') - \varphi(M'A') \right]$$

or il résulte de la correspondance des points M, M' ; A, A' ; B et B' que

$$\begin{aligned} M'B' &= MB \\ M'A' &= MA \end{aligned}$$

$$\text{donc} \qquad (1) \quad \left| \begin{aligned} X' &= \beta\gamma X \\ Y' &= \alpha\gamma Y \\ Z' &= \alpha\beta Z \end{aligned} \right.$$

Tel est le théorème d'Ivory ; connaissant l'attraction de l'ellipsoïde E' sur le point M' intérieur, on en déduit au moyen des formules (1) l'attraction de l'ellipsoïde E sur un point extérieur M. Ce théorème s'applique quelle que soit la loi de l'attraction. Ce que nous allons dire maintenant suppose la loi de Newton.

On peut présenter ce théorème autrement. Soient X'', Y'', Z'' les composantes de l'attraction de E' sur M, on a

$$\frac{X''}{X'} = \alpha \quad , \frac{Y''}{Y'} = \beta \ , \ \frac{Z''}{Z'} = \gamma$$

En effet nous avons vu qu'en ce qui concerne les points intérieurs $\frac{\partial v}{\partial x}$ est proportionnelle à x. Le point M étant sur la surface même de E' peut être traité comme un point intérieur à cette ellipsoïde. On a donc

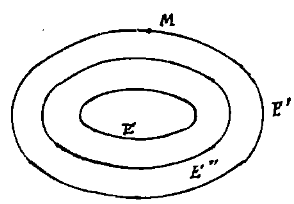
$$\frac{X''}{X'} = \frac{x \text{ de } M}{x \text{ de } M'} = \alpha$$

$$\text{or} \qquad \begin{aligned} X' &= \beta\gamma X \\ Y' &= \alpha\gamma Y \\ Z' &= \alpha\beta Z \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \frac{Z''}{Z} = \alpha\beta\gamma = \frac{a'b'c'}{abc}$$

on exprime cela en disant que

Les attractions des ellipsoïdes E et E' sur le point M sont dirigées suivant la même droite et sont entre elles comme les masses ou comme les volumes si les densités sont les mêmes.



Considérons les attractions de trois ellipsoïdes homofocaux E, E', E" sur un point M de l'ellipsoïde extérieur.

Les attractions de E et de E' sur M sont parallèles en direction et ont des intensités proportionnelles aux masses de E et E'; il en est de même pour E et E", donc :

Les attractions des ellipsoïdes homofocaux E et E" sur un point extérieur sont parallèles en direction et ont des intensités proportionnelles à leurs masses.

Hydrostatique.

10e Leçon.

Mécanique des Fluides.

La mécanique des fluides se divise en deux parties : l'Hydrostatique qui traite de l'équilibre des fluides, et l'Hydrodynamique qui s'occupe du mouvement des fluides.

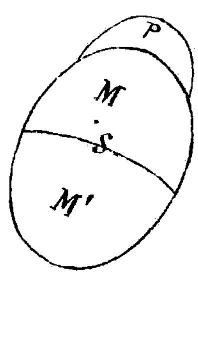
On appelle fluide parfait un corps dont toutes les molécules peuvent glisser les unes sur les autres librement et sans résistance.

Dans la nature il n'existe pas de fluides parfaits. il y a toujours plus ou moins de résistance au déplacement relatif des particules. Néanmoins cette résistance est suffisamment petite pour que dans une première approximation on puisse considérer les fluides naturels comme des fluides parfaits. Cette approximation est du genre de celle que l'on fait en mécanique rationnelle lorsqu'on considère un corps solide comme ayant une forme invariable.

Parmi les fluides on peut distinguer : les fluides incompressibles, ayant une densité invariable, ce sont les liquides, de tels fluides n'existent pas dans la nature. les liquides naturels ne sont pas absolument incompressibles, mais on peut dans une première approximation les considérer comme incompressibles et ayant une densité constante ; on en distingue une seconde espèce, les gaz, qui sont compressibles et dont la densité varie avec la pression et la température.

Hydrostatique ou lois de l'équilibre des fluides.

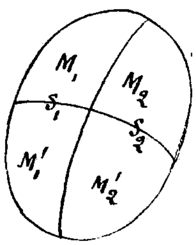
Action moléculaire. – Pression hydrostatique. – Considérons deux masses fluides quelconque M et M' séparées par une certaine surface S. Cherchons la résultante des actions moléculaires de M sur M'. Cette résultante ne dépend que de la surface de séparation S, c'est-à-dire que si au lieu des deux portions de fluide M et M' nous considérons deux autres portions de fluide N et N' séparées par la même surface de séparation S, l'action de la masse M sur la



masse M' est la même que l'action de la masse N sur la masse N'.

En effet supposons qu'à la masse M on ajoute la masse P, l'action de P sur M' est nulle, car ces deux portions de fluide sont à des distances finies, et ces actions moléculaires ne s'opèrent qu'à des distances infiniment petites.

Donc l'action de la masse $(M+P)$ sur la masse M' est la même que celle de la masse M sur la masse M'



Supposons maintenant que nous divisions M en deux portions M_1 et M_2 et M' également en deux portions M_1' et M_2' de telle sorte que S soit aussi partagé en deux portions S_1 et S_2, S_1 séparant M_1 de M_1', et S_2 séparant M_2 de M_2'.

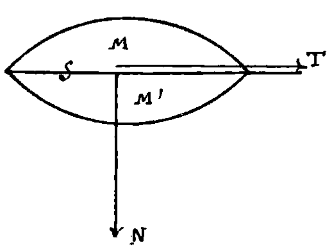
L'action de M_2 sur M_1', comme celle de M_1 sur M_2' est nulle, car ces masses n'ont de commune qu'une ligne que l'on peut regarder comme une surface de séparation infiniment petite.

L'action de $M_1 + M_2$ sur $M_1' + M_2'$ se ramène donc à l'action de M_1 sur M_1' et de M_2 sur M_2'.

On peut énoncer ce résultat ainsi : La résultante de toutes les pressions qui s'exercent sur la surface de séparation S s'obtient en composant les pressions qui s'exercent sur les surfaces partielles de séparation S_1 et S_2.

On peut donc pour évaluer la pression sur la surface S, décomposer cette surface en surfaces partielles évaluer les pressions sur chacune d'elles, et chercher leur résultante. Nous décomposerons S en surfaces infiniment petites que nous regarderons comme planes, nous évaluerons les pressions sur chacune d'elles et nous les composerons.

Ceci montre que la recherche de la pression sur une surface finie se ramène à la recherche des pressions élémentaires.



Supposons en particulier que la surface S est plane.

Un système de forces quelconques peut se ramener à une composante N perpendiculaire au plan S, et une composante T dans le plan S, ou bien encore on peut ramener un système de forces quelconques à une composante N perpendiculaire à S et à un couple dans le plan S.

Nous allons voir que la composante T est nulle et qu'il n'y a pas non plus de couple dans le plan S.

Supposons en effet T différent de zéro ; lorsqu'on voudrait faire glisser la portion du fluide M sur la portion M' en sens opposé à T, le travail de T' serait négatif, il y aurait résistance au glissement, ce qui est contre l'hypothèse puisque nous considérons un fluide parfait.

L'existence du couple est aussi inadmissible car lorsqu'on voudrait faire glisser M sur M' par un mouvement de rotation de sens contraire à celui du couple il y aurait encore un travail résistant.

L'action de la portion du fluide M sur la portion M' se réduit donc à une force normale N.

En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, la portion M' exerce sur la portion M une action égale et opposée à N, soit −N.

Ces deux forces doivent être des pressions, car si elles tendaient à éloigner M' de M l'équilibre serait impossible ; la résistance à l'extension étant nulle.

L'action de M sur M' se réduit donc à une pression normale au plan de séparation S.

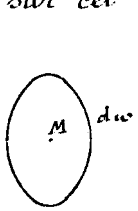
On peut donc donner maintenant pour définition du fluide parfait.

C'est un corps tel que les pressions moléculaires sur des éléments plans sont toujours normales.

Ceci ne s'applique pas absolument aux fluides naturels. Néanmoins lorsqu'ils sont en équilibre, la direction de la pression sur les éléments plans diffère de la normale d'une quantité inappréciable. On peut donc en Hydrostatique supposer les pressions normales, et par conséquent traiter les fluides naturels comme des fluides parfaits. Il n'en est plus de même en Hydrodynamique, il y a une résistance au glissement des molécules, qu'on appelle la viscosité. Mais dans une première approximation, on peut encore la négliger.

On appelle pression moyenne sur une surface S la pression normale N divisée par S (aire de la surface).

Considérons le cas où S est infiniment petit $d\omega$; si p est la pression moyenne sur cet élément de surface de séparation, la pression totale sur l'élément sera $p\,d\omega$.

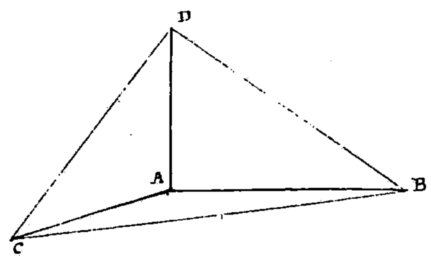


Représentons l'élément $d\omega$ et son centre de gravité M, soient x, y, z les coordonnées de M, et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à l'élément plan $d\omega$.

p peut dépendre de $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$, c'est-à-dire de la position et de la direction de l'élément :

$$p = f\,(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma).$$

Nous allons voir que p est indépendant de la direction de l'élément c'est-à-dire de α, β, γ. C'est le principe de l'égalité de pression dans tous les sens, ou principe de Pascal.



Détachons du liquide une portion comprise à l'intérieur d'un tétraèdre ABCD, AB, AC, AD sont parallèles aux axes de coordonnées. Ces arêtes sont infiniment petites et respectivement égales à dx, dy, dz, ce seront des infiniment petits du 1er ordre ; les faces du tétraèdre seront alors des infiniment petits du second ordre, et le volume du tétraèdre sera du 3e ordre.

Ce tétraèdre est en équilibre sous l'action : 1° des forces extérieures, 2° des pressions qui s'exercent sur les 4 faces.

En hydrodynamique il faudrait encore introduire les forces d'inertie en vertu du principe de d'Alembert ; restons dans le cas de l'hydrostatique.

Le tétraèdre étant en équilibre il faut que les forces extérieures et les pressions sur les faces se fassent équilibre.

Nous allons voir que les premières peuvent être négligées parce qu'elles sont infiniment petites par rapport aux autres.

En effet les pressions sur les faces ont pour expression $p\,d\omega$, p est une quantité finie, $d\omega$ est un infiniment petit du second ordre, elles sont du second ordre.

Les forces extérieures sont, par exemple la pesanteur, dont l'action sera représentée par $g\rho v$, (g intensité de la pesanteur, ρ densité de l'élément, toutes deux quantités finies, et v volume du tétraèdre infiniment petit du 3e ordre). Il en sera de même pour les autres forces extérieures ; force centrifuge par exemple a pour expression $m\omega^2 r$, $\omega^2 r$ est une quantité finie, m masse du liquide à l'intérieur du tétraèdre est un infiniment du 3e ordre.

De même les forces d'inertie sont égales à l'accélération multipliées par m (masse du fluide à l'intérieur du tétraèdre) le premier facteur est fini, le second facteur est un infiniment petit du 3e ordre ; ces forces sont donc des infiniment petits du 3e ordre, et par suite infiniment petites par rapport aux pressions sur les faces qui sont du second ordre.

Nous considérerons donc seulement les pressions ; écrivons qu'elles se font équilibre.

Soit p la pression moyenne sur la face BCD dont les cosinus directeurs sont α, β, γ. Le tétraèdre étant infiniment petit, nous pourrons remplacer les coordonnées x, y, z du centre de gravité de BCD par celles de A qui sont fixes et supposer toutes les pressions appliquées en A.

Soit p_1 la pression moyenne sur ACD qui a pour cosinus directeur 1, 0, 0.

— p_2 ——— BAD ——— 0, 1, 0.

— p_3 ——— BAC ——— 0, 0, 1.

Projetons ces forces sur l'axe des x et écrivons que la somme des composantes est nulle.

Considérons la première, pression sur BCD. elle est égale à $p \times BCD$, et puisqu'elle est normale à la face BCD elle a pour cosinus directeurs α, β, γ, sa projection sur ox est donc $p \times BCD \times \alpha$.

La composante suivant ox de la pression sur la face ACD est $p \times ACD$, égale à la pression elle-même, car elle est parallèle à ox;

Les deux autres pressions sont respectivement parallèles à oy et à oz, leurs projections, sur ox sont nulles, on doit donc avoir

$$p \times BCD \cdot \alpha = p_1 \, ACD$$

Or ACD c'est la projection de BCD sur le plan des yz, on a donc :

$$ACD = BCD \times \alpha$$

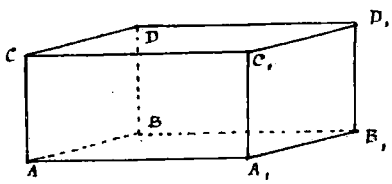
$$\text{Donc} \quad p = p_1$$

$$\text{De même} \quad p = p_2 = p_3.$$

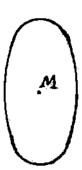
p est donc indépendant de α, β, γ. C'est ce qui démontre le principe de Pascal.

Il reste à évaluer p, c'est la pression hydrostatique au point considéré.

Isolons maintenant dans la masse du fluide au point considéré un parallélipipède infiniment petit ayant ses arêtes parallèles aux axes de coordonnées.



AA_1 est parallèle à ox et a pour longueur dx, CD parallèle à oy a pour longueur dy, AC est parallèle à oz et égal à dz; dx, dy, dz sont des infiniment petits du premier ordre, les faces du parallélipipède sont du second, le volume est du troisième.



Nous tiendrons compte ici des infiniment petits du troisième ordre et par suite des forces extérieures.

Considérons un point M et isolons une quantité de fluide infiniment petite autour du point considéré, soit m sa masse.

Soient mX, mY. mZ les composantes suivant les axes de la résultante de toutes les forces extérieures qui agissent sur la masse m ; $X.Y.Z$ sont des fonctions des coordonnées x, y, z du point considéré M.

Dans le cas actuel la portion de liquide isolée sera le parallélipipède, sa masse m sera égale à $\rho . dx, dy, dz$, ρ étant la densité moyenne du fluide à l'intérieur du parallélipipède.

Les composantes des forces extérieures seront alors $\left|\begin{array}{l} \rho . dx . dy . dz , X . \\ \rho . dx . dy . dz . Y . \\ \rho . dx . dy . dz . Z . \end{array}\right.$

Projetons toutes ces forces sur les axes et écrivons qu'elles se font équilibre.

Projetons d'abord sur ox. Il n'y a qu'à envisager les pressions qui s'exercent sur les faces $ABCD$, $A_1 B_1 C_1 D_1$; elles sont parallèles à ox et s'y projettent en vraie grandeur, les autres pressions perpendiculaires à ox, ont sur cette direction une projection nulle. Soient x, y, z les coordonnées du centre de gravité de la face $ABCD$, les coordonnées du centre de gravité de la face $A_1 B_1 C_1 D_1$ seront $x + dx$, y, z, soit p la pression hydrostatique au point x, y, z, elle est fonction de x, y, z, mais elle ne l'est pas de la direction de l'élément. La pression sur $ABCD$ sera égale à p multiplié par la surface de l'élément, ou $p . dy . dz$.

Cette pression parallèle à ox, a pour projection sur ox, sa grandeur elle-même $p . dy . dz$.

Considérons la pression sur la face opposée $A_1 B_1 C_1 D_1$, la pression hydrostatique au centre de gravité de cette face est $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$. Car x seul a changé et est devenu $x + dx$. La surface de l'élément est encore dy, dz. La pression totale sur l'élément $A_1 B_1 C_1 D_1$ est donc $(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy\, dz$, et cette expression est celle de la projection de cette pression sur ox.

Ces deux pressions sur $ABCD$, et $A_1 B_1 C_1 D_1$ sont opposées ; leur résultante est égale à leur différence : $\frac{dp}{dx} dx . dy . dz$.

Cette résultante doit faire équilibre à la composante des forces extérieures parallèles à ox, c'est-à-dire à $\rho . dx . dy . dz\, X$.

On doit donc avoir $\rho . dx . dy . dz\; X = \frac{\partial p}{\partial x} . dx . dy . dz$.

Par symétrie nous écrirons $\left.\begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = \rho X \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \end{array}\right| \quad (1)$

Ces trois équations permettent de calculer la pression hydrostatique en un point quelconque connaissant les forces extérieures qui agissent sur ce point et la pression en un point donné.

Cas particulier. Supposons que X, Y, Z, soient les trois dérivées partielles d'une même fonction :

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Multiplions la première des équations (1) par dx, la 2e par dy, la 3e par dz et ajoutons, il vient :

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho\left[\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right]$$

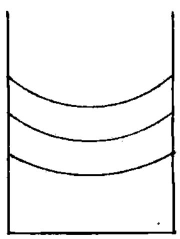
Le premier membre est une différentielle exacte, c'est dp la parenthèse est égale à dV

L'équation ci-dessus donne donc :

$$dp = \rho\, dV.$$

Le second membre doit donc être une différentielle exacte ce qui ne peut avoir lieu que si ρ est une fonction de V

$$\rho = f(V).$$



Représentons les surfaces de niveau $V = C^{te}$; ρ est une fonction de V, donc sur une surface de niveau ρ est constant, de même p.

Donc les surfaces de niveau sont des surfaces de même densité et de même pression.

Considérons par exemple un liquide soumis à l'action de la pesanteur seule. Les composantes des forces extérieures suivant ox et oy sont nulles,

$X = 0$, $Y = 0$ et $Z = g$.

Les équations (1) se réduisent à :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

La fonction des forces V a pour dérivées par rapport à x, et par rapport à y, zéro, par rapport à z la dérivée est g, donc

$$V = gz.$$

Les surfaces de niveau sont dans ce cas des plans horizontaux.

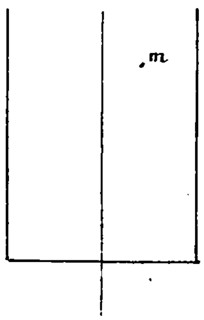
On doit avoir $dp = \rho\, dV = \rho g\, dz$,

g est constant, donc ρ doit être seulement fonction de z. Il ne peut y avoir d'équilibre que si la densité est constante sur une même tranche horizontale.

Le niveau libre doit être une surface de niveau, si par exemple le liquide est dans un vase ouvert, la pression à la surface est la pression atmosphérique qu'on peut considérer comme constante. La surface libre doit donc être telle que $V = C^{te}$.

Dans le cas des liquides soumis à l'action de la pesanteur seule, la surface libre est horizontale puisque les surfaces de niveau sont horizontales.

Considérons maintenant un vase rempli d'un liquide pesant et tournant autour de l'axe des z avec une vitesse uniforme ω. Le vase entraîne le liquide et nous cherchons la figure d'équilibre relatif du liquide par rapport au vase.



Le liquide peut être considéré comme étant au repos et soumis à l'action de deux forces, la pesanteur et la force centrifuge.

Pour la pesanteur agissant seule nous avons trouvé les composantes :

$$X_1 = 0 \qquad Y_1 = 0 \qquad Z_1 = g.$$

La force centrifuge est dirigée suivant la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de la masse m infiniment petite de l'élément considéré, sur Oz ; elle est, par suite horizontale, donc $Z_2 = 0$.

L'intensité de cette force centrifuge est $m\omega^2 r$, r étant la distance du point m à l'axe Oz, elle est dirigée suivant la perpendiculaire à Oz et a pour composantes suivant Ox et Oy

$$m\,\omega^2 r \cos\varphi \qquad m\,\omega^2 r \sin\varphi.$$

φ étant l'angle de Ox avec la perpendiculaire abaissée de m sur Oz.

φ, r, z sont donc les coordonnées semi polaires de m et on a :

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi.$$

Les composantes de la force centrifuge suivant Ox et Oy sont donc $m\omega^2 x$ et $m\omega^2 y$; elles sont d'ailleurs mX_2 et mY_2 donc

$$X_2 = \omega^2 x \qquad Y_2 = \omega^2 y$$

On a donc $X = \omega^2 x \qquad Y = \omega^2 y \qquad Z = g$

Par conséquent $\dfrac{\partial p}{\partial x} = \omega^2 \rho x \qquad \dfrac{\partial p}{\partial y} = \omega^2 \rho y \qquad \dfrac{\partial p}{\partial z} = g\rho$

Multiplions la première par dx, la 2^e par dy, la 3^e par dz et ajoutons il vient :

$$dp = \rho\,[\omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy + g\,dz]$$

La parenthèse c'est $dV = \omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy + g\,dz$.

et en intégrant : $V = \dfrac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + gz$.

Pour avoir les surfaces de niveau il faut faire $V = C^{te}$. Les surfaces de niveau sont donc des paraboloïdes de révolution autour de Oz.

En tous les points d'un quelconque de ces paraboloïdes la densité est la même, ainsi que la pression.

La surface libre, qui est une surface de niveau, sera aussi un paraboloïde de révolution autour de l'axe de rotation.

La pression est donnée par une seule intégration. Si le liquide est homogène $\rho = C^{te}$, on a :

$$p = \rho V + p_0 .$$

Nous avons supposé que XYZ sont les dérivées d'une fonction V, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. alors $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ n'est plus une différentielle exacte. On aura $dp = \rho X\,dx + \rho Y\,dy + \rho Z\,dz$.

Le premier membre étant une différentielle exacte, il doit en être de même du second. On doit donc avoir:

$$\frac{\partial(\rho X)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho Y)}{\partial x} \qquad \frac{\partial(\rho Y)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho Z)}{\partial y} \qquad \frac{\partial(\rho Z)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho X)}{\partial z}$$

Si ces conditions ne sont pas remplies, l'équilibre est impossible.

Supposons qu'on ait un liquide homogène $\rho = C^{te}$. L'équilibre ne sera possible que si $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est une différentielle exacte, c'est-à-dire s'il y a une fonction des forces.

11e Leçon.

Nous avons vu dans la dernière leçon que si on désigne par p la pression moyenne sur un élément de surface $d\omega$, la pression sur l'élément est $p\,d\omega$, elle est indépendante de l'orientation de l'élément ; p c'est ce que nous avons appelé la pression hydrostatique au point considéré.

En isolant une portion de fluide de masse infiniment petite m, et en appelant mX, mY, mZ les composantes de la force extérieure qui agit sur m, nous avons trouvé

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y , \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z .$$

ρ désignant la densité moyenne de la molécule m.

S'il y a une fonction des forces, c'est-à-dire si $X dx + Y dy + Z dz = dV$ différentielle exacte les trois équations qui précèdent se réduisent simplement à

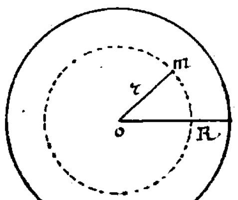
$$dp = \rho \, dV.$$

L'équation $V = C^{te}$ représente les surfaces de niveau ; elles sont normales à la direction de la résultante des forces extérieures, mX, mY, mZ ; ces surfaces sont en même temps surfaces d'égale pression et d'égale densité.

Ceci rappelé nous allons appliquer ces formules à des exemples :

1er Exemple. Considérons une masse fluide homogène de densité ρ, et supposons que les différentes molécules s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton.

Par raison de symétrie, la masse fluide va prendre la forme d'une sphère. Soit R son rayon.



Cherchons la pression en un point quelconque intérieur.

Isolons un élément m, entourant le point considéré et du point o comme centre décrivons une seconde sphère passant par le point considéré.

Nous savons que la portion du fluide comprise entre les deux sphères n'a pas d'action sur le point m qui lui est intérieur. L'action de la masse fluide considérée sur l'élément m, se réduit donc à l'action de la sphère de rayon r qui est la même que si sa masse était concentrée à son centre : elle est donc égale à $\frac{m M f}{r^2}$, f représentant l'action de deux unités de masse à une distance égale à l'unité de distance.

Dans la théorie de l'attraction, nous avons supposé pour simplifier les formules $f = 1$, ici nous rétablirons f.

M est la masse de la sphère de rayon r : $M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$. On a donc pour l'expression de l'attraction sur l'élément m : $\frac{4}{3} m \pi \rho f . r$

Sa projection sur l'axe des x, s'obtiendra en multipliant l'expression précédente par le cosinus de l'angle du rayon or avec ox. Or si le point o est l'origine des coordonnées le produit de r par ce cosinus est précisément l'x du point m, soit x. Cette projection est d'autre part mX, nous aurons donc :

$$mX = -\frac{4}{3} m \pi \rho f . x$$

$$\text{ou } X = -\frac{4}{3} \pi \rho f . x$$

$$\text{De même } Y = -\frac{4}{3} \pi \rho f . y$$

$$Z = -\frac{4}{3} \pi \rho f . z$$

x, y, z désignent les coordonnées du point considéré.

Multiplions la première de ces équations par dx, la deuxième par dy, la 3e par dz et ajoutons ; il vient :

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\frac{4}{3}\pi\rho f\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$

Or nous avons $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

d'où $x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr$.

Introduisons la fonction des forces V, l'équation précédente s'écrit :

$$dV = -\frac{4}{3}\pi\rho f\,r\,.\,dr$$

or nous avons trouvé $dp = \rho\,dV$

Nous aurons donc ici : $dp = -\frac{4}{3}\pi\rho^2 f r\,dr$.

d'où en intégrant : $p = \frac{4}{3}\pi\rho^2 f\left[c - \frac{r^2}{2}\right]$

Pour déterminer la constante d'intégration c supposons que la pression sur la surface extérieure de la sphère est nulle, alors $p = o$ pour $r = R$.

ce qui donne $c = \frac{R^2}{2}$

et l'expression de p devient : $p = \frac{2}{3}\pi\rho^2 f(R^2 - r^2)$

Équation qui montre que la pression en un point quelconque intérieur est proportionnelle à $R^2 - r^2$.

Pour la pression au centre, nous ferons $r = o$ et nous aurons

$$p = \frac{2}{3}\pi\rho^2 f R^2.$$

Supposons par exemple que la sphère, a même volume et même densité moyenne que la terre, et cherchons la pression au centre de la terre.

Nous supposons ainsi la terre sphérique et homogène ce qui n'a pas lieu en réalité, la terre étant hétérogène et ayant la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati

Soit g l'intensité de la pesanteur $g = \frac{f.M}{R^2}$ en désignant par M la masse totale de la terre $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$.

Ce qui donne $g = \frac{4}{3}\pi\rho f . R$

Dans l'expression de p remplaçons f par sa valeur, nous obtenons :

$$p = \frac{1}{2} g\rho R.$$

Ce que nous pouvons écrire $p = \frac{1}{2}\,\frac{g\rho R^3}{R^2}$

$g\rho R^3$ est le poids d'un cube de densité ρ, densité moyenne de la terre, et de coté R.

En chiffres ronds $R = 6.000$ kilomètres.

ou en centimètres $R = 6 . 10^8$

$R^2 = 6^2 . 10^{16}$

et en décimètres cubes $R^3 = 6^3 . 10^{21}$

$g\,\rho = 5$ poids spécifique

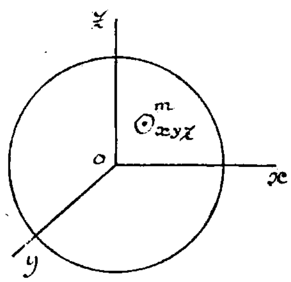
Nous aurons : $p = \frac{1}{2} \quad \frac{5 . 6^3 . 10^{21}}{6^2 . 10^{16}} = 15 . 10^5.$

p est ainsi exprimé en atmosphères.

On trouve environ 1500000 atmosphères.

2° Exemple. Considérons une masse fluide homogène limité par un ellipsoïde supposée soumise à l'attraction Newtonnienne et de plus animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe des z. Cherchons la condition pour que cette figure soit une figure d'équilibre.

Soit $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ l'équation de l'ellipsoïde. J'isole à l'intéri une masse infiniment petite m et j'appelle $x\,y\,z$ les coordonnées de son centre de grav



Les forces qui agissent sur cette masse m sont l'attraction et la force centrifuge.

Les composantes de l'attraction sont : parallèlement à ox $-mN$ parallèlement à oy $-m\,Py$, et parallèlement à oz $-m\,Qz$ N, P et Q désignant des coefficients constants.

Nous supposerons que la masse fluide tourne autour de o avec une vitesse angulaire ω constante ; les composantes de la force centrifuge parallèlement aux axes, seront alors :

$$m\,\omega^2 x \qquad\qquad m\,\omega^2 y \qquad\qquad \text{et } 0$$

En appelant toujours mX, mY, mZ les composantes parallèles aux ax de la résultante des forces, nous aurons donc

$$X = -(N - \omega^2)\,x$$
$$Y = -(P - \omega^2)\,y$$
$$Z = -\,Q\,z$$

Multiplions respectivement ces trois équations par dx, dy, dz, et ajoutons, nous aurons

$$dV = -(N-\omega^2)\,x\,dx - (P-\omega^2)\,y\,dy - Q\,z\,dz.$$

Intégrant il vient : $-V = \frac{N-\omega^2}{2}\,x^2 + \frac{P-\omega^2}{2}\,y^2 + \frac{Q}{2}\,z^2.$

en supposant la constante d'intégration nulle.

Les équations des surfaces de niveau seront alors :

$$(N-\omega^2)\,x^2 + (P-\omega^2)\,y^2 + Q\,z^2 = C^{te}.$$

C'est une série d'ellipsoïdes concentriques et homothétiques entre eux.

Il faut que la surface libre coïncide avec une de ces surfaces ce qui donne la condition :

$$\frac{N - \omega^2}{\alpha} = \frac{P - \omega^2}{\beta} = \frac{Q}{\gamma}$$

Ce sont des relations assez compliquées entre α, β, γ et ω, En effet $N P Q$ sont des coefficients que nous avons appris à calculer en fonction de α, β, γ; ces équations sont des équations transcendantes, car N, P, Q s'expriment par des intégrales elliptiques. La discussion de de ces équations est néanmoins assez facile, et elle montre qu'on peut y satisfaire, soit par des ellipsoïdes de révolution, soit par des ellipsoïdes à trois axes inégaux, qu'on appelle ellipsoïdes de Jacobi.

Dans tous les cas les surfaces de niveau sont homothétiques et concentriques à l'ellipsoïde limité.

Cas des fluides soumis seulement à l'action de la pesanteur

L'équation qui donne la pression se simplifie considérablement dans ce cas, on a en effet

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z = g.$$

en supposant l'axe des z dirigé de haut en bas.

$$\text{alors} \quad dp = \rho\, g\, dz.$$

Si ρ est constant, cette équation donne immédiatement

$$p = p_0 + \rho\, g z.$$

p_0 est la pression dans le plan des $x\,y$.

Pratiquement on distingue deux cas:

1° Cas d'un gaz enfermé dans un récipient assez restreint pour que sa densité puisse être considérée comme constante, et 2° Cas d'un liquide.

Dans le cas d'un gaz, on peut négliger ρ devant p et alors regarder la pression comme constante dans le récipient $p = p_0$.

Dans le cas d'un liquide nous trouverons

$$p = p_0 + \rho\, g z.$$

si nous prenons le niveau libre pour plan des $x\,y$, p_0 sera la pression atmosphérique.

Pression sur une surface finie. Principe d'Archimède.

Considérons d'abord une surface fermée S et supposons l'intérieur de cette surface entièrement rempli de liquide. Isolons la portion de liquide

S comprise à l'intérieur de cette surface et écrivons qu'il est en équilibre. Cette masse de liquide est soumise à son poids et aux pressions qui s'exercent sur la surface, il doit y avoir équilibre. Donc toutes les pressions élémentaires doivent avoir une résultante unique égale et directement opposée au poids du liquide contenu dans la surface S.

Supposons qu'à l'intérieur du liquide soit plongé un corps solide, limité par une surface S. les pressions qui s'exerçaient sur la surface S ne changent pas, elles doivent donc encore avoir une résultante égale et directement opposée au poids du liquide déplacé.

Donc si un corps solide est plongé dans un liquide, il éprouve de la part de ce liquide une poussée de bas en haut égale et opposée au poids du liquide déplacé.. C'est le principe d'Archimède.

Le point d'application de cette poussée est le centre de gravité du volume déplacé.

Démonstration analytique.

Rappelons un lemme établi pour la démonstration du théorème de Green.

Considérons une surface fermée S, limitant un volume V, soit $d\omega$ un élément de la surface S et dV un élément quelconque du volume V, soient enfin α, β, γ les cosinus directeurs des normales à la surface dirigées en dehors, et F une fonction quelconque.

Nous avons trouvé :

$$\iint F\,\alpha\,d\omega = \iiint \frac{\partial F}{\partial x}\,dv$$

L'intégrale du premier membre est une intégrale double étendue à tous les éléments de la surface S ; celle du second membre est une intrégrale triple étendue à tous les éléments du volume V.

De même $\displaystyle\iint F\,\beta\,d\omega = \iiint \frac{\partial F}{\partial y}\,dv\,;\quad \iint F\,\gamma\,d\omega = \iiint \frac{\partial F}{\partial z}\,dv.$

Sur chacun des éléments de la surface S, s'exerce une pression $p\,d\omega$ normale à la surface et dirigée en dedans : ses cosinus directeurs sont par conséquent $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$.

Si donc je décompose les pressions élémentaires $p\,d\omega$ suivant les trois axes, j'aurai pour les composantes :

$$-p\alpha\, d\omega \qquad -p\beta\, d\omega \qquad -p\gamma\, d\omega$$

Composons entre elles toutes ces pressions ; supposons l'origine des coordonnées au centre de gravité du volume V, nous aurons :

$$\iiint x\, dv = 0 \qquad \iiint y\, dv = 0 \qquad \iiint z\, dv = 0 .$$

Considérons la somme des projections de toutes les pressions suivant ox, nous allons démontrer qu'elle est nulle et que la somme de ses moments par rapport aux trois axes est également nulle.

D'abord $\iint p\alpha\, d\omega = 0$

En effet, en faisant $F = p$ nous avons d'après le lemme :

$$\iint p\alpha\, d\omega = \iiint \frac{\partial p}{\partial x}\, dv .$$

or nous avons les équations :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z .$$

Qui ici se réduisent à :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g .$$

Donc $\iint p\alpha\, d\omega = 0$

Les forces étant parallèles à oz, leurs moments par rapport à ox sont nuls ; le moment par rapport à oy est en valeur absolue

$$\iint pz\alpha\, d\omega .$$

Or d'après le lemme en faisant $F = pz$ nous avons :

$$\iint pz\alpha\, d\omega = \iiint z\frac{\partial p}{\partial x} . dv \equiv 0 \qquad \text{Car} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 .$$

En vertu du même lemme le moment par rapport à oz est nul.

Donc les composantes des pressions élémentaires parallèles à ox se détruisent.

On verrait de même que les composantes parallèles à oy se détruisent également.

Évaluons maintenant la somme des projections des pressions élémentaires sur oz, c'est : $-\iint p\gamma\, d\omega$

Or en vertu du lemme on a

$$-\iint p\gamma\, d\omega = -\iiint \frac{\partial p}{\partial z} . dv = -\iiint \rho g\, dv .$$

Le signe - montre qu'elle est dirigée de bas en haut $\rho g dv$ est le poids de l'élément de volume, $\iiint \rho g dv$ représente le poids du volume de liquide déplacé.

Nous avons ainsi la résultante des pressions il faut trouver son point d'application ; nous allons voir que c'est le centre de gravité du volume de liquide déplacé c'est-à-dire l'origine des coordonnées. Pour le démontrer il suffit de faire voir que la somme des moments des pressions par rapport aux trois axes est nulle.

Or les pressions que nous considérons sont parallèles à oz, donc leurs moments par rapport à oz sont nuls par rapport à ox, le moment de la force $p\gamma d\omega$ est en valeur absolue $py\gamma d\omega$, nous avons alors pour la somme des moments par rapport à ox $\iint py\gamma d\omega$. Ce qui s'écrit d'après le Lemme en faisant $F = py$

$$\iint py\gamma\, d\omega = \iiint y \frac{\partial p}{\partial z}\, dv = \iiint \rho g y\, dv = \rho g \iiint y\, dv = 0$$

$$\text{car par hypothèse } \iiint y\, dv = 0$$

puisque nous avons pris le centre de gravité pour origine.

La somme des moments par rapport à ox est donc nulle.

On démontrerait de la même manière que la somme des moments par rapport à oy est nulle.

C'est la démonstration analytique du principe d'Archimède.

Elle nous apprend comme la première que tout corps plongé dans un liquide éprouve de la part de ce liquide une poussée verticale dirigée vers le haut, égale au poids du liquide déplacé, et appliquée au centre de gravité de son volume ; elle montre en plus que les composantes horizontales des pressions se détruisent, et que les composantes verticales ont une résultante unique qui est égale et directement opposée au poids du liquide déplacé.

12e Leçon.

Considérons une surface non fermée et cherchons à composer toutes les pressions qui s'exercent sur cette surface.

Nous avons trouvé pour la pression hydrostatique en un point :

$$+\, p = p_0 + \rho\, g\, z$$

en supposant l'axe des z dirigé vers le bas.

Nous distinguerons deux cas ; celui des gaz et celui des liquides ;

I Cas des Gaz.

Supposons le gaz placé dans un récipient assez petit pour la pression puisse être considérée comme constante à l'intérieur, nous aurons en supposant encore ρ assez petit pour être négligeable devant p_0 :

$$p = p_0$$

Nous avons vu que les pressions élémentaires sur une surface fermée ont une résultante unique égale et opposée au poids du fluide déplacé, et appliquée au centre de gravité du volume de ce fluide.

Dans le cas des gaz où nous avons supposé ρ négligeable la résultante est nulle.

Considérons maintenant une surface non fermée, et d'abord un plan.

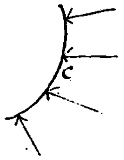
Soit un plan P et dans ce plan une surface Ω. Décomposons Ω en éléments infiniment petits $d\omega$.

A chaque élément $d\omega$ est appliquée une pression $p_0\, d\omega$, normale à l'élément et par suite au plan P. Toutes ces pressions élémentaires étant parallèles ont une résultante unique parallèle à leur direction et égale à leur somme, c'est-à-dire à

$$p_0 \iint d\omega \quad \text{ou} \quad p_0\, \Omega$$

Cherchons le point d'application de cette résultante ;

Chacune des composantes est proportionnelle à l'élément $d\omega$ auquel elle est appliquée, appliquons la règle de composition des forces parallèles, nous trouverons que leur point d'application est le centre de gravité G de la surface Ω, en supposant toutefois la densité constante en tous les points de la surface.



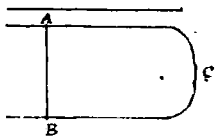
Soit maintenant une portion c de la surface courbe. Ici les pressions élémentaires ne sont pas parallèles, elles n'auront pas en général de résultante unique.

Proposons-nous de trouver la somme des projections des pressions élémentaires sur un axe quelconque et la somme des moments des pressions élémentaires par rapport à un axe quelconque.

...bie. Spéc^le de Cours C. Laroche & ses Fils, 8, rue Mabillon, Paris.

Cherchons d'abord les projections des pressions sur une droite D.

Considérons un cylindre ayant ses génératrices parallèles à D et passant par le contour de la surface considérée ; soit AB une section droite de ce cylindre. La surface



C, le cylindre, et sa section droite AB limitent une surface fermée. Les pressions qui s'exercent sur cette surface sont les pressions sur C, les pressions sur la surface cylindrique normales à D, et n'ayant pas par conséquent de composantes parallèles à D, enfin les pressions sur la surface plane AB.

Soit Ω l'aire de la section droite AB la somme des pressions élémentaires sur AB est $p_0 \Omega$.

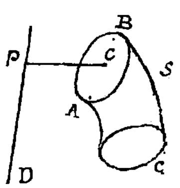
Soit X la composante parallèle à D des pressions sur la surface C, (elles sont évidemment dirigées en sens contraire des premières) ; la somme des composantes élémentaires parallèles à D des pressions sur toute la surface fermée est alors égale à $p_0 \Omega - X$.

Il faut que cette expression soit nulle, car nous avons vu que lorsqu'on néglige le poids du gaz, la somme des pressions élémentaires sur une surface fermée est nulle.

$$\text{Donc } p_0 \Omega - X = 0$$

Donc la somme des composantes parallèles à D des pressions élémentaires qui s'exercent sur une surface C est égale à p_0 multiplié par la projection orthogonale de la surface finie C sur un plan perpendiculaire à D.

Cherchons maintenant la somme des moments par rapport à une droite quelconque D



Construisons une surface de révolution ayant pour axe D et passant par le contour de C, ce n'est autre chose que la surface engendrée par la rotation de C autour de D.

Isolons une portion de cette surface, limitée par la surface C, une portion de la surface de révolution, et une section méridienne AB.

Nous avons ainsi un volume limité ; toutes les pressions qui s'exercent dessus doivent se faire équilibre ; par conséquent la somme algébrique de leurs moments par rapport à l'axe D est nulle.

Or ces moments se composent : 1° du moment M des pressions qui s'exercent sur la surface C ; 2° des moments des pressions qui s'exercent sur la surface de révolution S ; ces moments sont tous nuls, car toutes ces pressions normales à la surface rencontrera son axe D ; 3° du moment des pressions sur la surface plane AB dont j'appelle l'aire Ω. Soit G son centre de gravité et GP perpendiculaire sur D. Ce moment est égal à $-p\,\Omega\,\overline{GP}$. Il faut mettre le signe $-$ car les pressions tendent à faire tourner en sens contraire des pressions sur C.

Nous avons donc $M - p\,\Omega\,\overline{GP} = 0$

On peut présenter ce résultat sous une autre forme. Le volume de la surface de révolution S tout entière est donné d'après le théorème de Guldin par la formule :

$$V = \Omega \,.\, 2\pi \,.\, \overline{GP}$$

L'expression de M peut alors s'écrire : $M = \frac{p_o}{2\pi} V$

La somme des moments des pressions sur une surface C par rapport à une droite D, est égale au produit de $\frac{p_o}{2\pi}$ par le volume de la surface de révolution engendrée par la rotation de C autour de D.

Cas particulier. Supposons que la surface C soit une demi sphère ; nous allons voir que dans ce cas il y a une résultante unique.

Menons le plan le plan diamétral AB qui limite la demi sphère. Les pressions qui s'exercent sur la surface fermée ainsi définie se font équilibre. Or la pression sur AB est $p_o\,\Omega$, Ω désignant l'aire du grand cercle AB. Les pressions élémentaires qui s'exercent sur la sphère doivent donc avoir une résultante unique qui fasse équilibre à la résultante des pressions sur la surface plane AB.

Ceci permet de calculer la pression à vaincre dans l'expérience des hémisphères de Magdebourg.

II°. Cas des liquides.

Soit un liquide enfermé dans un vase et supposons le niveau libre à la pression atmosphérique.

La pression en un point du liquide est donnée par la formule

$$p = p_o + \rho g z,$$

p_o représentant la pression sur la surface libre, ici la pression atmosphérique, et le plan des xy étant le plan de la surface libre.

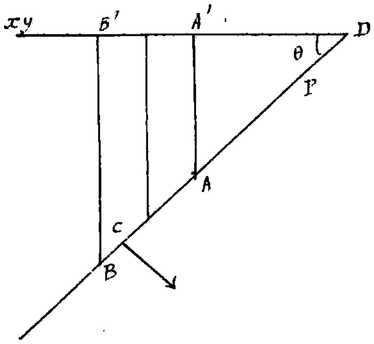
Changeons de plan des xy, en posant $z = z' - \frac{p_o}{\rho g}$ et prenons ce nouveau plan horizontal $z' = \frac{p_o}{\rho g}$ pour plan des xy.

La pression en un point nous est alors donnée par la formule $p = \rho g z'$.

Ce nouveau plan horizontal que nous avons pris pour plan des xy s'appelle le plan de charge.

Tout se passera comme si le niveau libre était au plan de charge et la pression atmosphérique nulle.

1°. <u>Surface plane</u>. — Considérons un plan incliné P et dans ce plan P une aire Ω (AB) aux différents éléments de cette surface Ω sont appliquées des



pressions normales $p\,d\omega$; toutes ces pressions parallèles entre elles puisqu'elles sont normales au plan P ont une résultante unique également normale au plan P et appliquée en un point C de l'aire Ω qu'on appelle le centre de pression. Soit G le centre de gravité de Ω ou AB.

Considérons un cylindre vertical passant par le contour de AB ; ce cylindre coupe la surface libre fictive suivant A'B'; nous avons ainsi un tronc de cylindre AB A'B'.

La résultante de toutes les pressions exercées sur ce tronc de cylindre (surface fermée) est, d'après le principe d'Archimède, égale et directement opposée au poids du liquide déplacé. Si en chaque élément de la surface fermée nous décomposons les pressions élémentaires suivant les trois axes, les composantes suivant ox et suivant oy se détruiront et celles suivant oz feront équilibre au poids du liquide déplacé.

Formons la somme de ces composantes verticales.

Les pressions qui s'exercent sur A'B' sont nulles, car A'B' est dans le plan de charge où j'ai supposé la pression nulle ; pour les éléments de la surface cylindrique les pressions sont horizontales, leurs composantes verticales sont donc nulles.

Il n'y a alors qu'à considérer les composantes verticales des pressions sur la portion de plan AB.

Soit θ l'angle du plan P avec le plan des xy. Une pression élémentaire $p\,d\omega$ a pour composante verticale $p \cos\theta\, d\omega$; les composantes verticales sont parallèles entre elles et proportionnelles aux pressions correspondantes.

Or on sait que lorsqu'on fait tourner un système de forces parallèles autour de leurs points d'application tout en conservant leur parallélisme, et en laissant invariables les rapports de leurs intensités, le point d'application de la résultante ne change pas ; c'est le centre des forces parallèles.

Si donc on appelle P la pression totale sur la portion de plan AB, la résultante de toutes les composantes verticales sera $P \cos\theta$, et son point d'application sera C.

Cette force doit faire équilibre au poids du liquide contenu à l'intérieur du tronc de cylindre. Or le volume d'un tronc de cylindre est égal à la section droite multipliée par la distance des centres de gravité des deux bases :

$$V = \overline{GG'} \cdot \overline{A'B'}$$

Le poids sera égal à $\overline{GG'} \cdot \overline{A'B'} \cdot \rho g$.

Or $\overline{A'B'} = AB \cos\theta$. Donc $P \cos\theta = GG' \cdot \rho g \, \Omega \cos\theta$

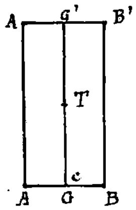
d'où $P = GG' \cdot \rho g \, \Omega$.

GG' c'est le z du centre de gravité G ; $\rho g \cdot GG'$, c'est la pression au point G.

Donc $P = \Omega \times$ pression en G.

La pression totale sur une surface plane est donc égale au produit de l'aire de cette surface par la pression au centre de gravité.

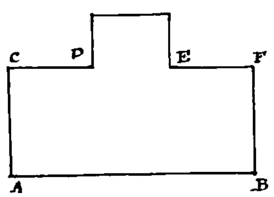
De plus pour qu'il y ait équilibre il faut que le centre de pression C et le centre de gravité T du tronc de cylindre soient sur une même verticale.



Dans le cas particulier où le plan P est horizontal, le tronc de cylindre devient un cylindre droit ; T est au milieu de GG', C est en G centre de gravité de la base.

La pression totale est égale à la base du cylindre multipliée par $\rho g z$.

Dans le cas d'un vase dont le fond a une surface plus grande que le haut, tel que celui ci-contre, la pression sur le fond est plus grande que le poids total du liquide, et cependant si on met le vase sur le plateau d'une balance on ne trouve que le poids du liquide ; ce qui n'a rien d'étonnant parce que une partie de la pression sur AB est contrebalancée par la pression sur CD et sur EF.



C'est en cela que consiste le paradoxe hydrostatique, qui n'a au fond rien de mystérieux.

Proposons-nous maintenant de trouver le moment de la pression par rapport à la droite D d'intersection du plan P avec le plan des xy.

La pression en C est égale à $p \, d\omega$, elle est normale au plan P, son bras de levier est CD, son moment est donc

$$P \cdot d\omega \cdot CD$$

Le moment total des pressions sur une portion de surface AB est

$$\iint p\, d\omega \,.\, CD \,.$$

Il faut évaluer p en fonction de CD.

Soient ξ et η les coordonnées du point C dans son plan en prenant D pour axe des ξ, on a $CD = \eta$.

$$p = \rho g \,.\, CC' = \rho g \,.\, \eta \,.\, \sin\theta$$

on a donc pour l'intégrale qui précède

$$\rho g \sin\theta \iint \eta^2 d\omega$$

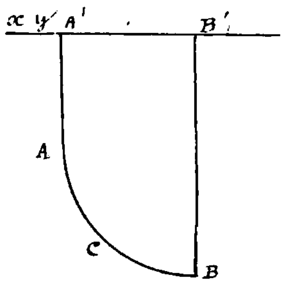
$\eta^2 d\omega$ c'est le moment d'inertie de $d\omega$ par rapport à D

$\iint \eta^2 d\omega$ c'est le moment d'inertie de la surface considéré dans le plan P par rapport à D.

Donc pour avoir le moment de la pression sur une surface plane Ω il faut multiplier le moment d'inertie de Ω par $\rho g \sin\theta$

2°. Surface courbe. Dans le cas d'une surface courbe les pressions élémentaires n'ont plus en général de résultante unique, mais nous pouvons nous proposer de rechercher la somme des projections de ces pressions sur une droite quelconque et la somme des moments par rapport à une droite quelconque.

Cherchons d'abord la somme des projections des pressions élémentaires sur la verticale.



Prenons pour surface libre le plan de charge et soit C la surface courbe considérée.

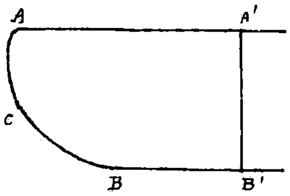
Soit AA'BB' un cylindre ayant ses génératrices verticales et passant par le contour de C. Nous avons ainsi une surface fermée, la somme des composantes verticales des pressions élémentaires devra faire équilibre au poids du liquide contenu à l'intérieur de ce volume.

Or les pressions sur A'B' sont nulles; les pressions sur la surface cylindrique étant horizontales ont des composantes verticales nulles. Reste alors les composantes verticales des pressions sur la surface C dont la somme Z doit être égale au poids du liquide considéré on a donc

$$Z = \rho g V$$

On est ainsi ramené à l'évaluation du volume V.

Cherchons maintenant les composantes des pressions sur un axe horizontal par exemple sur ox.



Considérons un cylindre ayant ses génératrices parallèles à ox et terminé par une section droite quelconque.

Nous avons ainsi un volume fermé limité par la surface C, le cylindre $AA'BB'$ et sa section droite $A'B'$

D'après le principe d'Archimède, la somme des composantes de toutes les pressions élémentaires parallèles à ox est nulle.

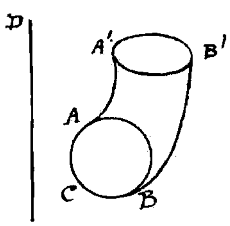
Soit Ω l'aire de la section droite $A'B'$ c'est-à-dire de la projection de C sur le plan des yz et p la pression au centre de gravité de cette projection.

La pression totale sur la surface plane $A'B'$ est $p\,\Omega$ elle est parallèle à ox, sa composante sur ox est aussi $p\,\Omega$ et elle est dirigée vers la gauche; soit X la somme des composantes suivant ox des pressions exercées sur C, on a $X - p\,\Omega = 0$ car les pressions élémentaires sur la surface du cylindre $AA'BB'$ ont zero pour projection sur ox

$$\text{Donc } X = p\,\Omega$$

On voit donc que la somme des projections sur un axe horizontal est la même que la pression sur la projection de la surface courbe sur un plan perpendiculaire à la direction de l'axe.

Reste à évaluer la somme des moments des pressions par rapport à un axe quelconque.



Considérons d'abord un axe vertical D et soit C la portion de surface considérée.

Construisons une surface de révolution S ayant pour axe D et passant par le contour de C.

Soit $A'B'$ une surface plane méridienne; M la somme des moments des pressions élémentaires sur C; μ la somme des moments des pressions élémentaires sur $A'B'$.

$A'B'$ est une surface plane, nous savons trouver son centre de pression et la pression elle-même, nous savons par suite déterminer μ.

Or d'après le principe d'Archimède la somme algébrique des moments des pressions élémentaires doit être égale au moment du poids du liquide contenu dans le volume envisagé.

Or le moment du poids du liquide est nul car le poids est parallèle à D

La somme des moments des pressions élémentaires est donc nulle.

$$\text{Or c'est } M - \mu, \text{ donc } M - \mu = 0$$

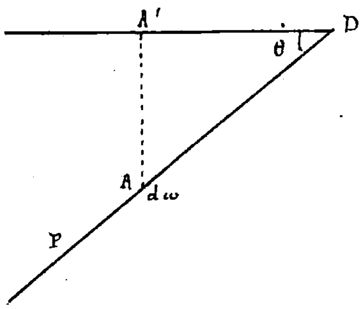
Les moments des autres pressions sont nuls, les autres pressions normales à la surface de révolution rencontrant l'axe

Donc $M = \mu$.

La somme des moments des pressions d'une surface courbe par rapport à un axe vertical est égale au moment des pressions sur la surface méridienne de la surface de révolution.

13e Leçon.

Recherche analytique du centre de pression



Considérons une portion Ω d'un plan P qui fait avec un plan horizontal un angle θ, soit $d\omega$ l'élément infiniment petit de surface plane, A un point intérieur à $d\omega$. Menons la verticale du point A, soit A' le point où elle perce le plan des xy que je suppose être le plan de charge $AA' = z$.

Soient η et ξ les coordonnées du point A dans le plan P en prenant pour axe des ξ la droite d'intersection du plan P et du plan des xy et pour axe des η une perpendiculaire, nous avons :

$$AD = \eta \qquad z = AA' = \eta . \sin \theta .$$

La pression hydrostatique au point A est

$$p = \rho g z \quad \text{ou} \quad p = \rho g \eta \sin \theta$$

La pression totale sur Ω est donnée par la formule

$$P = \iint p \, d\omega .$$

(L'intégrale étant étendue à toute la portion considérée sur le plan P)

Ce qu'on peut encore écrire $P = \iint \rho g \eta \sin . \theta \, d\omega$

Ou en appelant $\xi_0 \; \eta_0 \; z_0$, les coordonnées du centre de gravité de la surface Ω, nous aurons :

$$P = \rho g \eta_0 \Omega \sin \theta$$

$\rho g \eta \sin \theta$ est la pression hydrostatique au centre de gravité de la portion de plan

Donc la pression totale sur une surface plane est égale à l'aire de cette surface multipliée par la pression au centre de gravité de cette surface.

Cherchons les coordonnées du point d'application de cette force, soient ξ_1, η_1, ces coordonnées dans le plan P. Nous avons :

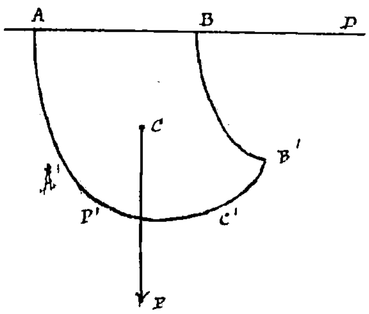
$$\xi_1 P = \iint p \ \xi \ d\omega = \rho g \sin\theta \int \xi \eta \ d\omega$$

$$\eta_1 P = \iint p \ \eta \ d\omega = \rho g \sin\theta \int \eta^2 \ d\omega$$

$\int \eta^2 d\omega$ est le moment d'inertie de la section par rapport à la droite D ; $\rho g \sin\theta$ et P sont des quantités connues, cette dernière formule donne ainsi η_1.

Cette formule s'applique encore dans le cas d'une paroi verticale $\theta = 90°$, la construction géométrique est illusoire dans ce cas.

Somme des moments des pressions par rapport à un axe horizontal.



Soit D l'axe horizontal. D'après le principe d'Archimède les pressions sur cette surface doivent faire équilibre au poids du liquide qu'elle contient.

Le moment du poids de ce liquide par rapport à D doit donc être égal à la somme des moments des pressions élémentaires : Soit M cette somme, prenons D pour axe des x, ceci donne :

$$M = \rho g V . y_0$$

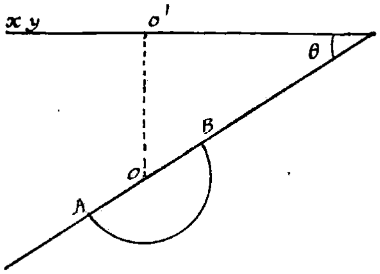
en appelant x_0, y_0, z_0, les coordonnées du centre de gravité du volume limité par la portion de surface de révolution considérée.

M est la somme des moments des pressions qui s'exercent sur toute la surface fermée $ABA'B'C$; or les pressions sur la face plane AB sont nulles, car nous supposons toujours que nous prenons pour plan des xy le plan de charge, la somme des moments de ces pressions élémentaires est donc nulle ; il en est de même de tous les moments des pressions élémentaires qui s'exercent sur la portion de surface de révolution $AA'BB'$ car toutes ces pressions rencontrent l'axe. M se réduit donc à la somme des moments des pressions qui s'exercent sur la portion donnée de surface courbe C.

La recherche de la somme des moments M est donc ramenée à l'évaluation du volume V et des coordonnées du centre de gravité G de ce volume.

Exemple. — Pression sur une demi-sphère.

Considérons le plan diamétral AB qui limite la demi-sphère,



et prenons pour plan du tableau le plan vertical qui lui est perpendiculaire, prenons toujours pour plan des xy le plan de charge.

On connaît OO' qui est le z du centre de la sphère, R le rayon de la sphère, et θ l'angle du plan diamétral limite de la demi-sphère et du plan horizontal.

Considérons le volume limité de la demi-sphère.

La pression sur le plan diamétral AB, augmentée de la pression sur la surface sphérique, fait équilibre au poids du liquide contenu dans la demi-sphère.

Donc la pression sur la demi sphère s'obtient en composant le poids du liquide changé de signe, avec la pression sur la surface plane AB changée de sens.

Ces deux forces sont dans le plan du tableau qui est un plan de symétrie, donc elles se rencontrent et ont une résultante unique.

Le poids du liquide contenu dans la demi-sphère a pour expression $\frac{2}{3}\pi R^3 \rho g$ et est vertical.

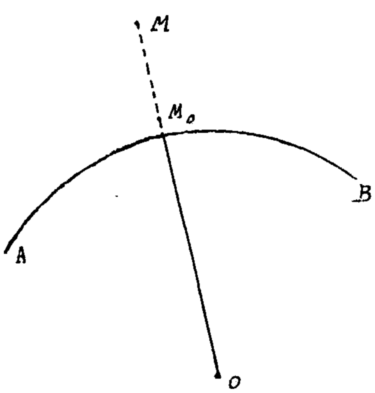
La pression sur AB a pour expression $\pi R^2 \rho g z$ et est perpendiculaire au plan AB.

La résultante de ces deux forces a alors pour expression :

$$R^2 \pi \rho g \sqrt{\left(\frac{2}{3}R\right)^2 + z^2 + 2\cos\theta . z . \frac{2}{3}.R}$$

Le point d'application de cette force s'obtiendrait en prenant la somme des moments des pressions élémentaires par rapport à 3 axes, l'un vertical et deux horizontaux.

Formule Barométrique.



Soit AB une portion de la surface de la terre, O le centre de la terre et M_o et M deux stations sur la même verticale ou sur des verticales très voisines.

$$\text{Soit} \quad OM_o = a$$

$$OM = a + z$$

soit g l'intensité de la pesanteur, elle varie pour deux causes : l'attraction de la terre sur un point extérieur est en raison inverse du carré de la distance de ce point au centre de la terre. Si donc la distance augmente, g diminue ; la latitude est une seconde cause de variation de l'intensité de la pesanteur, nous supposerons que le point M_o et le point M sont à la même latitude.

Ceci posé, nous appelerons :

(g) l'intensité de la pesanteur au point M_o , g au point M

(p) la pression atmosphérique ——"—— M_o , p ——"—— M

(ρ) la densité de l'air ——"—— M_o , ρ ——"—— M

Une première équation nous est donnée en exprimant que l'intensité de la pesanteur est en raison inverse du carré de la distance du point au centre de la terre :

$$\frac{g}{(g)} = \left(\frac{a}{a+z}\right)^2$$

Une deuxième équation nous est donnée par l'équation de l'hydrostatique

$$dp = \rho\, dV$$

V est la fonction des forces et on a $\frac{dV}{dz} = -g$

alors $dp = -\rho g\, dz$.

$\rho = \frac{Kp}{1+\alpha t}$, K est une constante, p la pression au point considéré, α le coefficient de dilatation de l'air, et t, la température.

Il faudrait connaître la loi de variation des températures avec l'altitude ; cette loi est inconnue, mais les différentes altitudes à mesurer étant faibles, on commet une erreur peu grave en supposant la température constante et égale à $\frac{t_o+t}{2}$ moyenne arithmétique des températures au point M_o et au point M.

Nous avons ainsi une relation entre les 3 quantités p, t, ρ.

$$\rho = \frac{Kp}{1+\alpha\left(\frac{t_o+t}{2}\right)}$$

et alors : $$dp = -\frac{Kp\,(g)}{1+\alpha\left(\frac{t_o+t}{2}\right)}\left(\frac{a}{a+z}\right)^2 dz$$

ou $$\frac{dp}{p}\left[1+\frac{\alpha}{2}\,(t_o+t_1)\right] = -K(g)\,a^2\,\frac{dz}{(a+z)^2}$$

Intégrons entre les limites qui correspondent aux deux stations M et M_o , nous trouvons :

$$L\,\frac{p}{(p)}\left[1+\frac{\alpha}{2}\,(t_o+t_1)\right] = K\,(g)\,a^2\left[\frac{1}{a+r}-\frac{1}{a}\right]$$

Ou bien $$L\,\frac{p}{(p)}\left(1+\alpha\,\frac{t_o+t}{2}\right) = -K\,(g)\,a\,\frac{r}{a+r} = -K\,(g)\frac{r}{1+\frac{r}{a}}$$

D'où $z = L \frac{(p)}{p} \left[1 + \alpha \frac{t_0 + t_1}{2} \right] \left(1 + \frac{r}{a}\right) \frac{1}{K\,(g)}$

Il reste deux corrections à faire :

L'une sur (g), l'autre consiste à introduire à la place des pressions les hauteurs barométriques observées.

Lorsque nous observons une hauteur barométrique h à quelle pression correspond-elle ?

Soit ρ_1 la densité constante du mercure, nous avons :

$$p = \overset{0}{h}\, \rho_1\, g$$

$$(p) = (h)\, \rho_1\, (g)$$

$$\text{D'où}\quad L \frac{(p)}{p} = L \frac{(h)\,(g)}{h\, g} = L \frac{(h)}{h} + L \frac{(g)}{g}$$

Il faut évaluer ce 2e logarithme népérien. Nous avons :

$$\frac{(g)}{g} = \left(\frac{a+z}{a}\right)^2 = \left(1 + \frac{z}{a}\right)^2$$

$$L \frac{(g)}{g} = 2\, L \left(1 + \frac{z}{a}\right)$$

Or $\frac{z}{a}$ est très petit, $1 + \frac{z}{a}$ est très voisin de l'unité et $L\left(1 + \frac{z}{a}\right)$ est très voisin de zéro, on peut le remplacer par $\frac{z}{a}$.

Dans ces conditions nous aurons :

$$z = \left[L \frac{(h)}{h} + 2 \frac{z}{a} \right] \left[1 + \alpha \frac{t_0 + t_1}{2} \right] \left(1 + \frac{z}{a}\right) \frac{1}{K\,(g)}$$

Désignons par [g] l'intensité de la pesanteur à la latitude 45°, nous savons que :

$$(g) = [g]\,(1 - \beta \cos 2\,\psi)$$

$$\text{et}\quad \frac{1}{(g)} = \frac{1}{[g]}\,(1 + \beta \cos 2\,\psi)$$ ψ désignant la latitude du lieu d'observation.

Alors l'expression de z peut s'écrire :

$$z = \left[L \frac{(h)}{h} + 2 \frac{z}{a} \right] \left(1 + \frac{z}{a}\right) \left[1 + \alpha \frac{t_0 + t_1}{2} \right] \frac{1}{K\,[g]} \,(1 + \beta \cos 2\,\psi)$$

On peut encore simplifier en négligeant le terme en $\frac{z^2}{a^2}$, et écrire :

$$z = \left[L \frac{(h)}{h} \left(1 + \frac{z}{a}\right) + 2 \frac{z}{a} \right] \left(1 + \alpha \frac{t_0 + t_1}{2}\right) \frac{1}{K\,[g]} \,(1 + \beta \cos 2\,\psi)$$

Il reste à passer des logarithmes népériens aux logarithmes vulgaires ; soit λ le module, on a

$$L\, x = \lambda \log x :$$

Nous aurons alors pour z :

$$z = \lambda \left[\log . \frac{(h)}{h} \left(1 + \frac{z}{a}\right) + \frac{2}{\lambda} \frac{z}{a} \right] \left(1 + \alpha \frac{t_0 + t_1}{2}\right) \frac{1}{K\,[g]} \,(1 + \beta \cos 2\,\psi)$$

En réduisant en un seul les coefficients connus et remplaçant par leur valeur numérique, on a

$$z = 1833^{m}\left[1 + 0{,}002845 \cos 2\varphi\right]\left(1 + 0{,}004\,\frac{t_0+t_1}{2}\right)\left[\log\frac{(b)}{b}\left(1+\frac{z}{a}\right) + 0{,}868589\,\frac{z}{a}\right]$$

On prend pour le coefficient de dilatation des gaz secs 0,00367 il faut tenir compte de l'état hygrométrique de l'air. La vapeur d'eau étant plus légère que l'air, la densité décroît quand l'humidité de l'air augmente. Mais l'air, sera en général, d'autant plus humide qu'il sera plus chaud. Tout se passe donc à fort peu près comme si le coefficient de dilatation était augmenté, alors on prend pour coefficient de dilatation 0,004 et le binôme de dilation qui entre dans la formule devient $1 + \frac{2(t_0+t_1)}{1000}$ et on a enfin :

$$z = 1833^{m}\left[1 + 0{,}002845 \cos 2\varphi\right]\left[1 + 0{,}002(t_0+t_1)\right]\left[\log\frac{(b)}{b}\left(1+\frac{z}{a}\right) + 0{,}868589\,\frac{z}{a}\right].$$

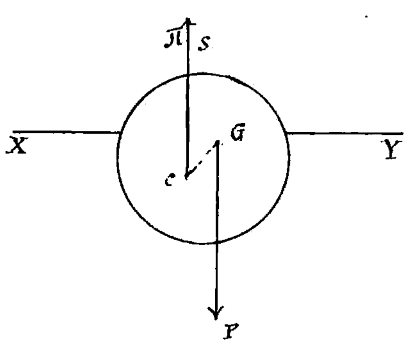
On mesure d'abord $\frac{(b)}{b}$ et on calcule le logarithme; puis on mesure t_0 et t_1 et on calcule $\cos 2\varphi$.

Tout est connu dans la formule excepté $\frac{z}{a}$; dans une première approximation, on suppose $\frac{z}{a} = 0$ ceci donne une première valeur de z, alors dans une seconde approximation on remplace z par la valeur trouvée, et ainsi de suite, quant à a on prend pour sa valeur celle du rayon moyen de la terre.

14e Leçon.

Conditions d'équilibre des corps flottants.

Considérons un corps flottant S, soit XY le niveau libre du liquide. Le corps est soumis à deux forces : son poids P qui est une force verticale dirigée de haut en bas et appliquée au centre de gravité G du solide flottant ; la poussée π, qui est égale au poids du liquide déplacé, est appliquée au centre de gravité C du volume de liquide déplacé et dirigée verticalement de bas en haut. Le point d'application C s'appelle aussi centre de poussée et centre de carène. Pour l'équilibre il faut que ces deux forces se

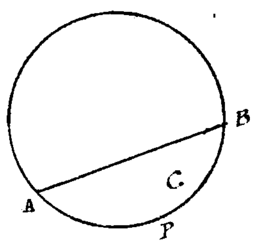


se détruisent, c'est-à-dire soient égales et directement opposées, ce qui exige que CG soit une verticale et que :

$$P = V \rho g \quad \text{car} \quad \Pi = V \rho g,$$

P désignant le poids du corps, V le volume de la partie immergée ; ρ la densité du liquide et g l'accélération de la pesanteur.

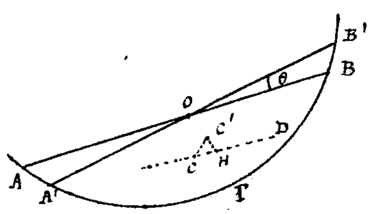
Définition de la surface de carène. Imaginons un plan AB détachant dans le corps flottant un volume V dont le centre de gravité est au point C.



Si le plan AB se déplace en détachant constamment le volume V, le point C décrit une certaine surface dite surface de carène. Si l'on incline le corps flottant de manière à faire coïncider l'un des plans tels que AB avec la surface libre du liquide, le volume immergé est égal à ABP et le point C devient le centre de poussée ou de carène correspondant.

On peut donc dire que la surface de carène est une surface invariablement liée au corps solide, et sur laquelle se trouve toujours le centre de poussée lorsque le volume plongé est égal à V.

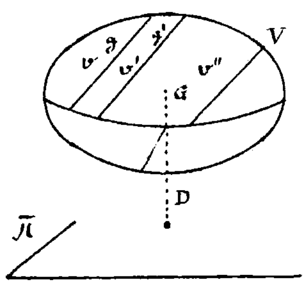
Théorème. Le plan tangent en un point C de la surface de carène est parallèle au plan AB correspondant.



Soient CD le plan mené par C parallèlement à AB et C' le centre de poussée relatif à un plan $A'B'$ infiniment voisin de AB et tel que

$$\text{vol. } APB = \text{vol } A'PB'$$

Désignons par o la droite d'intersection des deux plans AB, $A'B'$ et par θ leur angle. Le plan CD sera tangent à la surface de carène au point C si la distance $C'H$ est un infiniment petit du second ordre, CC' étant du premier. On montrera cela en appliquant le théorème des moments par rapport au plan CD. Envisageons d'abord un volume V de centre de gravité G partagé en volumes partiels $v, v', v'' \ldots$ de centre de gravité $g, g', g'' \ldots$ soient de plus D, d, d', ... les distances respectives de ces points à un plan quelconque



$$\text{On a } V = v + v' + \ldots = \Sigma v$$

et $VD = \Sigma\, vd$, relation qui exprime que le moment du volume total par rapport au plan π est égal à la somme des moments des volumes partiels par rapport au même plan

Dans le cas présent :

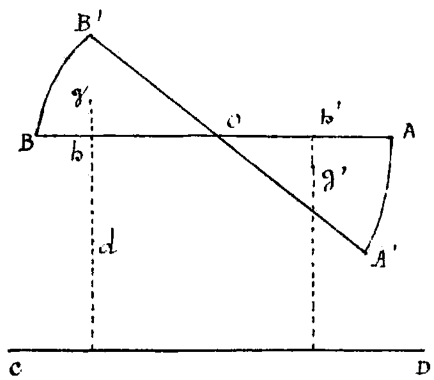
$$\text{vol. } A'PB' = \text{vol. } APB + \text{vol } BOB' - \text{vol } AOA'$$

le moment de ce volume par rapport au plan CD est égal à $\overline{C'H}.V$. Donc :

$$\overline{C'H}.V = M^t\ APB + M^t\ BOB' - M^t\ AOA'$$

comme vol. APB = vol. $A'PB'$

vol. AOA' = vol. $BOB' = v$.



Soient g le centre de gravité du vol. BOB, g' celui de AOA', et d la distance des deux plans AB et CD. Par rapport au plan CD

$$M^t\ APB = 0$$

$$M^t\ BOB' = v\ (d + gb)$$

$$M^t\ AOA' = v\ (d - g'b')$$

Donc $\overline{C'H}.V = v(d+gb) - v(d - g'b') = + v(gb + g'b')$.

Or v, gb et $g'b'$ ou v et $gb + g'b'$ sont des infiniment petits du premier ordre, par suite le produit $v(gb + g'b')$ ou $\overline{C'H}.V$ est du second ordre, d'où il résulte que $C'H$ est du second ordre puisque V est une quantité finie

La relation $\overline{C'H}.V = v(gb + g'b')$

donne $\overline{C'H} = v \dfrac{(gb + g'b')}{V}$

Or d'après leur définition les quantités V, v, gb et $g'b'$ sont positives donc $\overline{C'H}$ est une distance positive. Cela montre que le point C' est toujours avec AB d'un même côté par rapport au plan tangent CD à la surface de carène donc la surface de carène est une surface convexe.

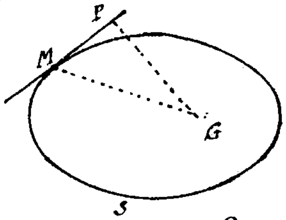
Dans le cas où le plan AB coïncidera avec le niveau libre du liquide le plan tangent à la surface de carène au centre de poussée sera parallèle à ce niveau. Pour l'équilibre, V ayant été calculé de manière que

$$\text{vol. } APB = V = \frac{P}{\rho g},$$

il faut que la droite GC soit verticale c'est-à-dire normale en C à la surface de carène. Donc ayant construit la surface de carène on mènera du point G les normales à cette surface et chacune d'elles rendue verticale fournira une position d'équilibre du corps.

Le nombre des positions d'équilibre est par suite égal au nombre des normales à la surface de carène qui passent par le centre de gravité du corps flottant.

Condition de stabilité de l'équilibre. Donnons d'abord une propriété générale des surfaces convexes. Soient S une surface convexe, G un point de l'espace, GM un rayon vecteur quelconque de S par rapport au point G et GP la perpendiculaire abaissée de G sur le plan tangent mené à la surface au point M. La distance GP est considérée comme positive ou comme negative suivant que la surface et le point G ne sont pas séparés ou le sont par le plan tangent MT. Dans le cas de la figure on a $GP > 0$.



Le minimum de GM aura lieu en même temps que celui de GP.

Prenons G pour origine des coordonnées ; on a :

$$\overline{GM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

$$\overline{GP} = \frac{z - px - qy}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = (z - px - qy)(1+p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}$$

x, y, z sont les coordonnées du point M et

$$Z - z = p\ (X - x) + q\ (Y - y)$$

l'équation du plan tangent MT

Nous allons chercher les minimum des 2 fonctions GM et GP qui dépendent des variables x et y.

Pour le maximum ou le minimum de $\overline{GM}^2$ il faut que

$$\frac{\partial.\overline{GM}^2}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial.\overline{GM}^2}{\partial y} = 0$$

Prenons GM pour axe des z, les coordonnées de M sont alors $x = y = 0$

Donc les relations

$$\frac{\partial.\overline{GM}^2}{\partial x} = 2x + 2z\,p$$

$$\frac{\partial.\overline{GM}^2}{\partial y} = 2y + 2z\,p$$

se réduisent à $\frac{\partial.\overline{GM}^2}{\partial x} = 2z\,p$, $\frac{\partial.\overline{GM}^2}{\partial y} = 2z\,q$.

Les conditions de maximum ou de minimum sont donc

$$p = 0 \qquad q = 0$$

Or l'équation du plan tangent au point M est

$$p\,X + q\,Y - (Z - z) = 0$$

c'est-à-dire si $p = 0$, $q = 0$ $\quad Z = z$, par suite

Dans le cas d'un minimum ou d'un maximum de GM le plan tangent en M à la surface est parallèle au plan xOy et par suite GM est normale à la surface.

Passons à GP.

les conditions $\frac{\partial}{\partial x}(GP) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y}(GP) = 0$

donnent :
$$pr + qs = 0$$
$$ps + qt = 0$$

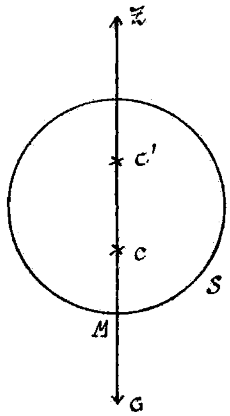
Si $rt - s^2 = 0$ le système est indéterminé, mais ce cas est à rejeter, car la surface est supposée convexe.

Si $rt - s^2 = 0$, on a un seul système de solution, à savoir

$$p = q = 0$$

Il exprime que si GP est maximum ou minimum GM est normale à la surface au point M.

Il résulte de là que dans le cas du minimum de GP et de GM, GP se confond avec GM sur la normale au point M.



Soient S la surface, G un point quelconque, GM une normale à S. Choisissons comme axe des z positifs la portion de la normale GM, Mz vers laquelle la surface tourne sa concavité au point M. Alors les centres de courbures principaux c, c' seront au-dessus de M. Prenons M comme origine et les deux plans des sections principales en ce point comme plans des xz et des yz.

Dans ces conditions on a :
$$s = 0 \quad , \quad r = \frac{1}{Mc} \quad , \quad t = \frac{1}{Mc'}$$
$$\text{et} \quad r > 0 \qquad t > 0 .$$

$\overline{GM}$ sera minimum si, ayant développé cette quantité suivant les puissances croissantes de x et de y par la formule de Mac Laurin, les termes du premier degré disparaissent, ceux du second degré étant positifs.

$$z = z_0 + (px + qy) + \tfrac{1}{2}\,(rx^2 + 2\,sxy + ty^2) + \dots$$

Or pour $x = y = 0$, $p = 0$, $q = 0$. de plus on a vu que $s = 0$, il vient donc

$$z = z_0 + \tfrac{1}{2}\,(rx^2 + ty^2) + \dots\dots$$

Mais $\overline{GM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = z_0^2 + x^2\,(rz_0 + 1) + y^2\,(tz_0 + 1) + \dots$

Pour le minimum il faut

$$rz_0 + 1 > 0$$
$$tz_0 + 1 > 0$$

Autog. C. Laroche & ses Fils, 8, rue Mabillon, PARIS.

c'est-à-dire $GM + MC > 0$

$GM + MC' > 0$

ou encore $GC > 0$ $GC' > 0$ conditions qui expriment que le point G est au-dessous des deux centres de courbure principaux.

Entre C et C', il n'y aurait ni maximum, ni minimum, il y aurait maximum au dessus de CC'

Appliquons les mêmes considérations à GP

$$GP = (z - px - qy)(1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Développant en nous bornant aux termes du second degré en x et y

$$GP = -\left[z_0 - \tfrac{1}{2}(rx^2 + ty^2)\right]\left[1 - \tfrac{1}{2}(r^2x^2 + t^2y^2)\right] + \ldots\ldots$$

$$= -z_0 + \tfrac{r}{2}(1 + rz_0)x^2 + \tfrac{t}{2}(1 + tz_0)y^2 + \ldots\ldots$$

Comme on a $r > 0$ $t > 0$ il faut pour le minimum de GP

$$1 + rz > 0 \quad \text{et} \quad 1 + tz_0 > 0$$

on retrouve les mêmes conditions que précédemment.

Les minimums ont lieu si G est au dessous de C et C' la surface étant au dessus de son plan tangent.

15e Leçon.

Équilibre des corps flottants (Suite).

Nous avons considéré un corps de poids total P; en appelant ρ la densité du liquide, g l'intensité de la pesanteur et V le volume du corps plongé nous avons $P = V\rho g$.

Nous pouvons disposer des unités de volume et de poids de façon que $\rho g = 1$, nous aurons alors $P = V$.

Les conditions d'équilibre sont : que le volume immergé soit V et que le centre de poussée et le centre de gravité du corps flottant soient sur une même verticale.

Ou encore on peut construire la surface de carène, et du centre de gravité G mener les différentes normales ; le corps est en équilibre lorsque l'une de ces normales est verticale et le volume immergé égal à V.

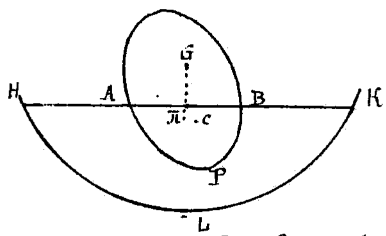
Il faut distinguer de plus si l'équilibre est stable ou instable.

Les conditions de stabilité de l'équilibre sont définies par le théorème suivant :

Théorème. — Lorsqu'un système mécanique quelconque est soumis à l'action de la pesanteur la condition nécessaire et suffisante de stabilité de l'équilibre est que le centre de gravité soit le plus bas possible, c'est-à-dire plus bas dans la position d'équilibre que dans les positions infiniment voisines.

Chercher les positions d'équilibre stable c'est donc chercher le minimum du moment du poids du système par rapport à un plan horizontal, au plan des $x\,y$ par exemple.

Appliquons ceci aux corps flottants.



Prenons pour plan horizontal des $x\,y$ la surface libre du liquide lorsque le volume immergé est V

Prenons le moment total par rapport au plan des $x\,y$; le moment total, c'est-à-dire le moment du liquide, plus le moment du corps solide.

Le liquide occupe le volume $(HKL - ABP)$ ou $(HKL - V)$.

Remarquons que puisque $\rho g = 1$ le volume du liquide est égal au poids, nous aurons pour le moment du liquide :

$$\text{moment de } HKL - \text{moment de } ABP.$$

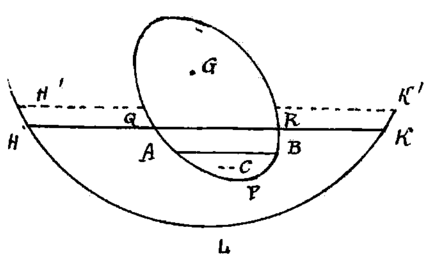
or moment de ABP ou moment de $V = V.$ (le z du point c)

Le moment du poids du corps solide est égal à V multiplié par le z du point G.

Soit M le moment total cherché, μ le moment constant de HKL nous avons :

$$M = \mu + V \,.\, \overline{G\pi}$$

$G\pi$ étant la distance du point G au plan horizontal qui passe par le centre de poussée C. C'est la différence des z des points G et C.



Enfonçons le corps dans le liquide d'un volume δV mais en le laissant parallèle à lui-même le niveau du liquide est venu $H'K'$.

Je dis que dans cette nouvelle position le moment M par rapport au plan des $x\,y$ (HK) du système composé du liquide et du corps est plus grand que dans la première. Nous avons :

M = moment du liquide + moment du corps solide. Le moment du liquide est égal au moment du volume HKL, c'est-à-dire μ, plus le moment de $HH'KK'$, moins le moment du volume de liquide égal à la partie du solide plongé, ou

moment du liquide $= \mu$ + moment $HH'KK'$ - moment QRP

or moment QRP = moment $QRAB$ + moment ABP

= moment $QRAB$ $+ Vx$ (z du point C)

De même, moment du corps solide $= Vx$ (z du point G).

En appelant encore $G\Pi$ la distance du centre de gravité G au plan horizontal passant par C nous avons :

$$M = \mu + V \cdot G\Pi + \text{moment } HH'KK' - \text{moment } QRAB.$$

Or le volume $HH'KK'$ est au dessus du plan des xy, son moment est positif, au contraire, le moment du volume $QRAB$ est négatif car $QRAB$ est au dessous du plan des xy, par suite :

moment $HH'KK'$ – moment $QRAB$ est essentiellement positif.

Donc lorsque le volume immergé est plus grand que V le moment total du système est plus grand $\mu + V.G\Pi$.

On arriverait au même résultat et de la même manière en supposant que le corps émerge au lieu de s'enfoncer.

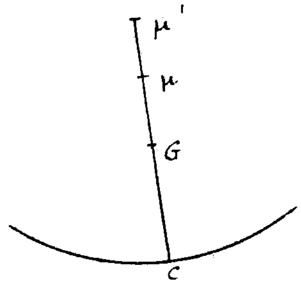
Si donc on compare les diverses positions du corps solide et si l'on cherche celle qui correspond au minimum du moment par rapport au plan des xy du système composé du corps solide et du liquide, il suffira de considérer parmi toutes les positions du corps solide celles pour lesquelles le volume immergé est V.

μ étant constant ainsi que V, les minimum de M a lieu en même temps que les minimum de GK. Au lieu de chercher les minimum de M pour avoir les différentes positions d'équilibre stable il suffira donc de chercher les minimum de $G\Pi$.

Or lorsque le plan AB est horizontal, le plan tangent à la surface de carène au point C est horizontal; $G\Pi$ est donc la distance du point G centre de gravité du corps flottant au plan tangent à la surface de carène.

Il faut alors chercher pour trouver les positions d'équilibre stable, quelles sont les normales menées du point G à la surface qui correspondent à un minimum de la distance du point G au plan tangent à la surface à leur pied.

Les normales qui correspondent à un minimum de GP sont celles qui correspondent à un rayon vecteur minimum mené du point G à la surface. Ceci montre qu'il y a toujours une position d'équilibre stable ; En effet la surface de carène est une surface fermée ; par conséquent parmi les rayons



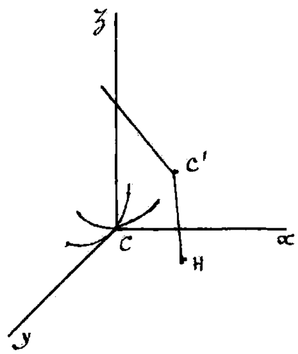
vecteurs menés du point G à la surface il y en a toujours un plus petit que les autres. Donc il y a toujours une position d'équilibre stable.

Considérons la surface de carène, le centre de gravité G du corps flottant et GC une normale à la surface de carène.

Quelle est la condition pour GC soit minimum ? Soient μ et μ' les centres de courbure principaux de la surface au point C, ce sont les métacentres. Dans la position d'équilibre correspondant à la normale Gc, cette normale GC est verticale et les metacentres μ et μ' sont tous deux au-dessous de C car la surface de carène tourne sa concavité vers le haut.

On a vu que la condition nécessaire et suffisante pour que GC soit minimum est que G soit au dessous des métacentres

Reste à donner l'expression des rayons de courbure principaux de la surface de carène pour construire les metacentres.



Considérons une surface quelconque, un point dessus C, je prends pour plan des xy le plan tangent en ce point, et pour autres plans de coordonnées les deux plans des sections normales principales.

L'équation de la surface est :

$$z = \frac{1}{2}\left(rx^2 + ty^2\right) + \ldots\ldots$$

des termes au moins du 3.e ordre.

On a au point $x = y = 0 \quad z = 0 \ , \ p = 0 \ , \ q = 0 \ , \ s = 0.$

Les rayons de courbure principaux à l'origine, point considéré sont :

$$\frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} \ .$$

Considérons maintenant sur la surface un point c' infiniment voisin du point C. Si x et y sont des infiniment petits du premier ordre, z est du second ordre, j'aurai en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur :

$$z = \frac{1}{2}\left(rx^2 + ty^2\right)$$

Menons la normale en c' et soit θ l'angle qu'elle fait avec la normale en C qui est l'axe des z, on a :

$$p^2 + q^2 = tg.^2\,\theta$$

p et q sont des infiniment petits du premier ordre $\quad p = rx + \ldots\ldots \qquad q = ty + \ldots\ldots$

L'équation $p^2 + q^2 = tg^2\theta$ devient en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second.

$$r^2x^2 + t^2y^2 = tg^2\theta.$$

et comme θ est infiniment petit

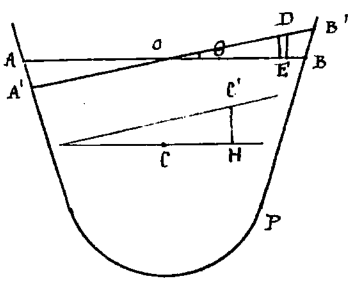
$$r^2x^2 + t^2y^2 = \theta^2$$

Si on abaisse $C'H$ perpendiculaire sur le plan tangent en C qui est le plan des xy, $C'H = z$ et on a :

$$\frac{2\,C'H}{\theta} = \frac{rx^2 + ty^2}{r^2x^2 + t^2y^2}$$

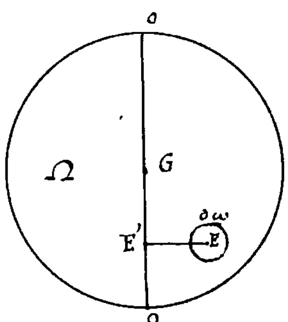
Le 2e membre reste compris entre les deux rayons de courbure $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{t}$, il en est par suite de même du premier.

Appliquons ceci à la surface de Carène.



Soit AB un plan horizontal qui détache du corps flottant un volume V, soit C le centre de gravité de ce volume, le plan tangent en ce point à la surface de carène est horizontal.

Considérons un second plan $A'B'$ infiniment peu différent du premier. Soit θ leur angle, et soit C' le centre de gravité du volume $A'B'P$. La normale à la surface de carène en C' fait avec la normale en C un angle égal à θ car elle est perpendiculaire au plan $A'B'$.



Soit $C'H$ la perpendiculaire abaissée de C' sur le plan tangent en C, je vais calculer

$$\frac{2\,C'H}{\theta^2}$$

Le maximum et le minimum de cette expression donneront les deux rayons de courbure principaux au point C.

La droite O d'intersection des deux plans AB $A'B'$ passe par le centre de gravité G de la section AB que j'appelle Ω.

Il suffit pour le démontrer d'écrire que les volumes $A'B'P$, ABP sont égaux ; ce qui revient à démontrer que les volumes $OB'B$ et $OA'A$ sont égaux.

Pour le démontrer, décomposons AB en éléments infiniment petits $\delta\omega$ soit E le centre de gravité de l'un d'entre eux, et menons les cylindres verticaux ayant ces éléments pour bases. Soit D le point où la verticale du point E coupe le plan $A'B'$.

Les volumes AA'O, BB'B sont ainsi décomposés en petits cylindres, ayant pour volume $d\omega \times DE$

Evaluons DE. Soit EE' la distance du point E à la ligne d'intersection O, on a : $DE = \theta \cdot EE'$. Ecrivons que la somme algébrique de tous ces prismes ou cylindres est nulle, nous avons :

$$\int \theta \, EE' \, d\omega = 0$$

$$\text{ou} \int EE' \, d\omega = 0$$

qui exprime que le moment de la surface Ω par rapport à la droite d'intersection O est nul ou que cette droite passe par le centre de gravité G de Ω

Calculons C'H. Pour cela, nous allons prendre les moments par rapport au plan horizontal CH.

Le moment du volume A'B'P par rapport à CH est $V \cdot C'H$. Il est égal au moment du volume ABP, plus le moment du volume OBB' ; mais le moment du volume ABP est nul, car le plan CH passe par son centre de gravité.

Reprenons les cylindres définis plus haut de volume $\theta \, EE' \, d\omega$. Pour avoir le moment du volume d'un de ces cylindres, il faut multiplier son volume par la distance de son centre de gravité au plan C'H. Le centre de gravité de ce cylindre est au milieu de DE ; son z est égal au z de E plus $\frac{h}{2}$

Or le z de E est constant, le plan AB étant horizontal, soit δ. Le z du centre de gravité est donc $\delta + \frac{\theta . EE'}{2}$.

$$\text{On a donc } V . C'H = \int \theta . EE' \left(\delta + \frac{\theta . EE'}{2} \right) d\omega .$$

$$\text{ou } VC'H = \delta \int EE' \, d\omega + \int \frac{\theta^2 \, \overline{EE'}^2}{2} d\omega$$

La 1ère intégrale est nulle car $\int EE' \, d\omega = 0$

$$\text{Reste } V . C'H = \frac{1}{2} \theta^2 \int \overline{EE'}^2 d\omega$$

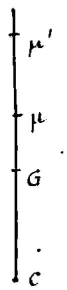
$\int \overline{EE'}^2 d\omega$ c'est par définition le moment d'inertie de la surface par rapport à la droite d'intersection OO.

$$\text{On a donc } 2V . C'H = \theta^2 I$$

$$\text{d'où } \frac{2 . C'H}{\theta^2} = \frac{I}{V}$$

Les rayons de courbure principaux sont le maximum et le minimum de cette expression $\frac{2 C'H}{\theta^2}$ ce seront donc aussi le maximum et le minimum de $\frac{I}{V}$

Pour les droites qui passent par le centre de gravité les moments d'inertie présentent un maximum et un minimum pour deux droites rectangulaires. Soient I_o et I_1, ces deux moments d'inertie qui sont les moments d'inertie principaux de la section par rapport aux droites passant par son centre de gravité. On a



$$I_o < I < I_1$$

Les rayons de courbure principaux seront :

$$C\mu = \frac{I_o}{V}$$

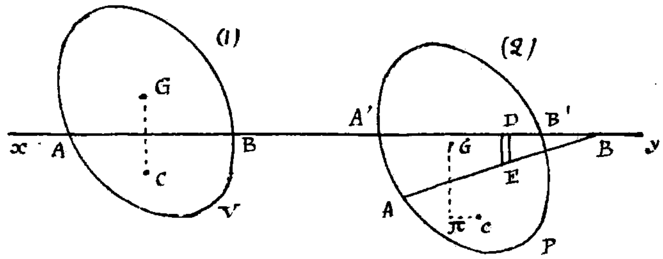
$$C\mu' = \frac{I_1}{V}$$

La condition nécessaire et suffisante de la stabilité de l'équilibre est $Gc < \mu c$

ou $V \cdot GC < I_o$,

Démonstration directe de cette formule.

Cherchons la condition pour que le centre de gravité soit le plus bas possible, c'est la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre stable.



Soit (1) une position d'équilibre du corps flottant. Supposons-le dérangé de sa position d'équilibre et venu dans la position (2) infiniment peu inclinée. Prenons pour plan des xy le niveau libre du liquide, et supposons le volume du vase assez grand pour permettre de négliger la variation du niveau du liquide.

Cherchons ce que devient le moment M de la masse totale dans les deux cas. Nous avons :

$$1^{\text{ère}} \text{ position} \quad M = \mu + V \cdot GC.$$

2^e position $\quad M = \mu$ - moment ABP - moment $ABA'B'$ + moment du corps solide.

or moment du corps solide - moment $ABP = G\pi \cdot V$

GC est resté perpendiculaire à AB, soit θ l'angle des deux plans $AB, A'B'$, on a

$$G\pi = GC \cdot \cos\theta$$

$$\text{alors} \quad M = \mu + V \cdot \overline{GC} \cdot \cos.\theta - \text{moment } ABA'B'$$

Considérons le volume $ABA'B'$ et décomposons-le en cylindres infiniment petits, ayant leurs génératrices verticales, et de base $d\omega$, dans le plan AB. Soient E et D les centres de gravité des bases. Nous avons $DE = \theta\, EE'$

Le moment par rapport au plan des xy d'un de ces cylindres est :

$$-DE \cdot d\omega \times \frac{DE}{2} = -d\omega \cdot \frac{\theta^2}{2}\, \overline{EE'}^2$$

On a donc : moment $AB\,A'B' = -\frac{\theta^2}{2}\int \overline{EE'}^2\,d\omega$.

Cette intégrale est le moment d'inertie de l'aire Ω de AB par rapport à la droite d'intersection E' des deux plans AB, $A'B'$.

$$I = \int EE'^2\,d\omega$$

Nous avons alors $M = \mu + V\,.\,\overline{GC}\,.\cos\theta + \frac{\theta^2}{2}.I$

Dans la position d'équilibre le moment doit être minimum, on doit donc avoir :

$$\mu + V\,.\,\overline{GC} < \mu + V\,.\,\overline{GC}\,.\cos\theta + \frac{\theta^2}{2}I$$

$$\text{ou } V\,.\,\overline{GC}\,(1-\cos\theta) < \frac{\theta^2 I}{2}.$$

or $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{\theta^2}{2}$ θ étant infiniment petit.

Nous devons donc avoir $V\,.\,\overline{GC} < I$

I est le moment d'inertie de Ω par rapport à une droite quelconque de son plan.

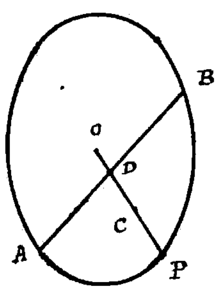
Si I_0 est le minimum de I il faut $V.\overline{GC}. < I_0$

Ce minimum se présentera toujours lorsque la droite par rapport à laquelle on prend les moments d'inertie passe par le centre de gravité ; car dans cette position de la droite le moment d'inertie est plus petit que si elle occupait une autre position parallèle quelconque.

Pour avoir le minimum de I il faudra chercher le minimum des moments d'inertie par rapport aux différentes droites qui passent par le centre de gravité de la section.

16e Leçon.

Application des principes qui précèdent.



I. Le corps flottant est un ellipsoïde homogène le centre de gravité est alors au centre de figure o.

Soit AB un plan qui détache un volume V. Cherchons la surface de carène. Le plan AB détermine une ellipse sur l'ellipsoïde, soit D son centre, joignons D au centre O de l'ellipsoïde. OD est le diamètre conjugué de AB.

Coupons par des plans parallèles à AB et infiniment voisins, nous décomposerons le volume ABP en tranches homogènes, elliptiques, ayant chacune leur centre de gravité au centre de figure sur la droite OD. Le centre de gravité du volume ABP sera par suite aussi sur OD en un point C.

L'équation de l'ellipsoïde rapporté à ses axes est :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

soit $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ l'équation du plan AB

Les équations de la droite OC sont :

$$\frac{Ax}{\alpha} = \frac{By}{\beta} = \frac{Cz}{\gamma}$$

Exprimons que le plan tangent à la surface de carène est parallèle au plan AB.

Soient $x\,y\,z$, les coordonnées du point C, $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ les coordonnées d'un point C' infiniment voisin, tous deux situés sur la surface de carène.

Le plan tangent en C étant parallèle à AB a pour équation

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = \lambda$$

Exprimons qu'il passe par C et par C', cela donne :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \lambda$$

$$\text{et } \alpha(x+dx) + \beta(y+dy) + \gamma(z+dz) = \lambda$$

Retranchons membre à membre, il reste

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$$

Remplaçons $\alpha\,\beta\,\gamma$ par les quantités proportionnelles, Ax, By, Cz.

il vient $Ax\,dx + By\,dy + Cz\,dz = 0$

D'où en intégrant $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = C^{te}$

C'est l'équation de la surface de carène. Elle représente un ellipsoïde homothétique et concentrique à l'ellipsoïde proposé.

Du centre de l'ellipsoïde on peut mener 6 normales dont les pieds sont les six sommets. Il y a donc 6 positions d'équilibre pour l'ellipsoïde. Les positions stables correspondent au rayon vecteur minimum ; il y a donc deux positions stables, elles correspondent au cas où le petit axe devient vertical.

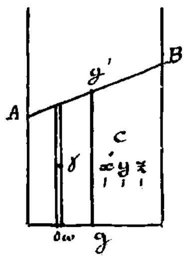
Si l'ellipsoïde n'était pas homogène, le centre de gravité ne coïnciderait pas avec le centre de figure. Du centre de gravité, on pourrait mener à la de carène qui est encore un ellipsoïde 2, 4, ou 6 normales réelles.

Dans le cas de 6 normales il y a toujours 2 positions d'équilibre stable
" 4 " 1 ou 2
" 2 " 1 position seulement d'équilibre stable

II. Le corps flottant est un cylindre.

Considérons d'abord un cylindre quelconque flottant de telle sorte que l'une des bases soit tout entière immergée et l'autre base tout entière en dehors du liquide.

La surface de carène est un paraboloïde elliptique quelle que soit la nature du cylindre.



Soit Ω la base du cylindre, g son centre de gravité gg' la parallèle aux génératrices menée par g, le volume du tronc du cylindre est $V = \overline{gg'} . \Omega$.

V étant constant, gg' doit être constant, soit $gg' = z_0$

Le plan AB passe par le point fixe g'.

Prenons gg' pour axe des z; pour axes des x et des y les deux axes d'inertie de la base passant par g.

D'après le choix des axes on a :

$$\int x \, d\omega = 0 \qquad \int y \, d\omega = 0 \qquad \int x y \, d\omega = 0 .$$

Posons $\int x^2 \, d\omega = A \quad \int y^2 \, d\omega = B$

A et B sont les moments d'inertie principaux.

C est un point de la surface de carène.

Décomposons la base Ω du cylindre en éléments infiniment petits $d\omega$ et considérons des cylindres infiniment minces ayant leurs génératrices parallèles aux génératrices du cylindre proposé et pour base $d\omega$.

Leur centre de gravité γ sera au milieu de leur hauteur.

Soit $z = z_0 + \alpha x + \beta y$ l'équation du plan AB α et β étant des paramètres variables.

Le point γ se trouve sur le plan

$$2z = z_0 + \alpha x + \beta y$$

Le centre de gravité C du volume total sera dans le même plan, soit x, y, z, ses coordonnées, nous aurons :

$$2z_, = z_0 + \alpha x_, + \beta y_,$$

Soit V le volume total, dv le volume d'un petit cylindre $dv = z\, d\omega$.

Prenons les moments par rapports au plan des yz; nous avons

$$x_, V = \int x \, dv = \int x \, z \, d\omega$$

ou $x_, V = \frac{z_0}{2} \int x \, d\omega + \frac{\alpha}{2} \int x^2 \, d\omega + \frac{\beta}{2} \int x y \, d\omega$.

La première et la dernière intégrale sont nulles, il reste :

$$\Sigma x_1 V = \alpha A$$

On aura de même $\Sigma y_1 V = \beta B$

Or les coordonnées du point C satisfont à la relation

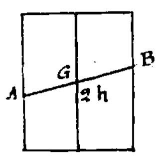
$$2z_1 = z_0 + \alpha x_1 + \beta y_1$$

Remplaçons α et β par leur valeur, on a

$$z_1 = \frac{z_0}{2} + \frac{V}{2A} x_1^2 + \frac{V}{2B} y_1^2$$

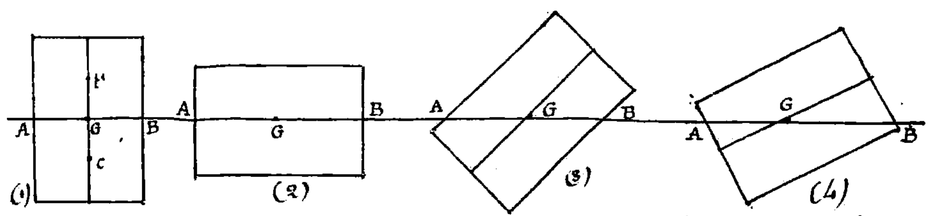
C'est l'équation de la surface de carène, elle représente un paraboloïde elliptique à axe vertical, son sommet est au point $z = \frac{z_0}{2}$, il a pour axe l'axe des z, c'est-à-dire la verticale du centre de gravité de la base du cylindre.

Supposons maintenant le cylindre de révolution, homogène et sa densité moitié de la densité du liquide, le volume immergé sera la moitié du volume total.



Soit R le rayon de base, 2h la hauteur. Les plans passant par le centre de gravité G vont détacher un volume V moitié de celui du cylindre.

Il y a deux positions d'équilibre évidentes par raison de symétrie ce sont celle où l'axe est vertical (1) et celle où l'axe est horizontal (2). Il peut exister encore deux autres positions d'équilibre dans lesquelles l'axe du cylindre occupe une position oblique, dans l'une (3) une des bases du cylindre est complètement immergée, et l'autre émerge complètement ; dans l'autre (4) les 2 bases sont partiellement immergées.



Pour les positions (1) et (3) la surface de carène est un paraboloïde de révolution par raison de symétrie. Le paramètre de la parabole méridienne est le rayon de courbure au sommet. Soit $C\mu$ ce rayon de courbure

$$C\mu = \frac{I}{V}.$$

V est le volume déplacé, I le moment d'inertie principal de la section faite par ce plan de flottaison par un axe passant par son centre de gravité.

$$I = \pi \frac{r^4}{4} \qquad V = \pi r^2 h \qquad C\mu = \frac{r^2}{4h}$$

Écrivons qu'il y a équilibre stable : $V\,\overline{GC} < I$.

Nous avons $GC = \frac{h}{2}$. On doit donc avoir $\frac{h}{2} < \frac{r^2}{4h}$ ou $h < \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que la position (1) soit stable.

Considérons la position (2). La section faite par le plan de flottaison est un rectangle de côtés $2r$ et $2h$.

Les 2 moments d'inertie sont pour le coté r $\frac{4h^3r}{3}$; par rapport au coté h, $\frac{4r^3h}{3}$, ce sont les moments d'inertie principaux I_0 et I_1.

Les métacentres μ et μ' sont les centres de courbures principaux de la surface de carène et on a

$$C\mu = \frac{I_1}{V} \qquad\qquad C\mu' = \frac{I_0}{V}$$

La surface de carène étant une surface de révolution le point μ se trouve sur l'axe c'est le point G lui-même.

$$GC = \frac{I_1}{V}$$

or on doit avoir pour la stabilité $GC < C\mu'$

c'est-à-dire $I_1 < I_0$,

ou $r^3 h < h^3 r$

ou $r < h$.

si h est $> r$ la position (2) est stable

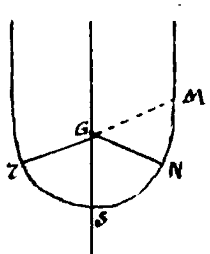
si on a $\frac{r}{\sqrt{2}} < h < r$, les positions (1) et (2) sont instables, il y a une position stable qui est (3) ou (4).

si h est $< \frac{r}{\sqrt{2}}$ la position (1) est stable et (2) est instable.

Considérons la position d'équilibre (3) elle est certainement stable si elle existe.

En effet la surface de carène est un paraboloïde de révolution.

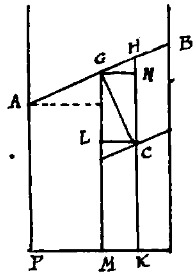
Pour l'équilibre stable il faut trouver le minimum des rayons vecteurs issus du point G.



Or le point G est sur l'axe, il suffit donc de chercher le minimum des rayons vecteurs pour la parabole méridienne. Du point G sont issues 3 normales à cette parabole, l'une est l'axe, et les deux autres symétriques GN et GN'. Ces deux dernières correspondent à des minimums car le point M partant de l'∞ le rayon vecteur GM est d'abord infini, décroit jusqu'à un minimum GN, pour recroître ensuite jusqu'à un maximum GS. Donc si les normales GN et GN' sont réelles, elles correspondent à des positions d'équilibre stable.

Donc si (3) existe c'est une position d'équilibre stable.

Si la position (3) existe, il ne doit pas y avoir de position (4) mais je ne sais pas le démontrer.



Cherchons la condition pour qu'il existe une position oblique d'équilibre du système (3)

Soit AB la ligne de flottaison. C le centre de gravité du volume ABM. Gc est perpendiculaire à AB

Menons CHK parallèles aux génératrices du cylindre, nous savons que

$$CH = CK$$

Le lieu du point C est un paraboloïde de révolution ayant pour axe ML. GL est la sous-normale de la parabole méridienne. On sait que dans le parabole la sous-normale est constante et égale au paramètre de la parabole.

$$\text{Ici le paramètre est } \frac{I}{V} = \frac{\pi r^4}{4\pi r^2 h} = \frac{r^2}{4h}.$$

$$\text{Donc } GL = \frac{r^2}{4h}.$$

$$\text{Nous avons en outre } CK = LM = MG - GL = h - \frac{r^2}{4h}$$

$$CH = CN + HN \qquad CN = GL = \frac{r^2}{4h}$$

$$HN = CH - CN = CK - CN = h - \frac{r^2}{4h} - \frac{r^2}{4h} = h - \frac{r^2}{2h}$$

D'ailleurs le triangle rectangle HCG donne

$$\frac{HN}{GN} = \frac{GN}{CN} = K$$

$$\text{D'où } HN = K\,GN = K^2\,CN = K^2\,\frac{r^2}{4h}$$

$$\text{De plus } K = \frac{GM - AP}{PM} < \frac{GM}{PM} \text{ ou } \frac{h}{r}$$

$$\text{on a donc } HN < \frac{h^2}{r^2} \cdot \frac{r^2}{4h} \text{ ou } \frac{h}{4}$$

$$\text{D'autre part } HN = h - \frac{r^2}{2h}$$

$$\text{On doit donc avoir } h - \frac{r^2}{2h} < \frac{h}{4}$$

$$h^2 - \frac{h^2}{4} < \frac{r^2}{2}$$

$$\text{ou } 3h^2 < 2r^2$$

$$\text{ou } h < r\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Si cette condition est remplie la position d'équilibre (3) est stable; si cette condition n'est pas remplie la normale issue du point G à la parabole autre que l'axe, n'existe pas, non plus que la position oblique d'équilibre (3)

En résumé nous avons donc :

$h < \frac{r}{\sqrt{2}}$ (1) est une position stable, l'axe est vertical.

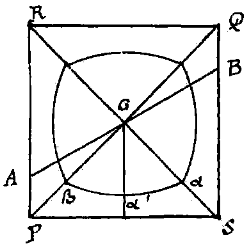
$\frac{r}{\sqrt{2}} < h < r\frac{\sqrt{2}}{3}$ (3) est une position stable, l'axe est oblique à l'une des bases immergée complètement.

$r\sqrt{\frac{2}{3}} < h < r$ (4) est la position d'équilibre stable, l'axe est oblique et les deux bases plongent partiellement.

$h > r$ (2) est la position stable, l'axe est horizontal.

III. Prisme droit à base carrée homogène.

Supposons sa hauteur très grande, il n'y aura d'autres positions d'équilibre stable que celles où les arêtes seront horizontales. Supposons en outre que la densité du prisme est la moitié de celle du liquide.



La section droite est un carré.

La courbe de carène sera la section de la surface de carène par le plan médian ; le plan de flottaison sera parallèle aux arêtes du prisme, il coupe les deux côtés opposés du carré puisqu'il passe par son centre G qui est le centre de gravité. La surface de carène est encore un paraboloïde elliptique, la courbe de carène est par suite une parabole. Dans le plan PQRS la courbe de carène se composera de 4 arcs de parabole. Il y aura deux sortes de positions d'équilibre.

1° si l'un des côtés du carré est vertical.

2° si l'une des diagonales est verticale.

Par suite les normales menées du point G à la surface de carène seront les deux diagonales du carré, et les parallèles au côté seront les axes mêmes de la parabole.

Cherchons les positions stables. Nous savons que si d'un point de l'axe on peut mener trois normales à une parabole l'une est une normale maximum ; les positions stables correspondent donc aux autres normales, elles ont lieu quand les diagonales $G\alpha$ ou $G\beta$ sont verticales.

Les autres positions d'équilibre correspondant aux axes tels que $G\alpha$ sont instables.

$$\text{on a} \quad G\alpha = G\beta = \frac{GS}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \qquad G\alpha' = \frac{a}{4}$$

$$\text{on a donc bien} \quad G\alpha < G\alpha'.$$

17e Leçon.

Hydrodynamique

Pour passer des équations de l'hydrostatique à celles de l'hydrodynamique, il suffit d'appliquer le principe de d'Alembert.

« Pour écrire les équations du mouvement d'un système mécanique quelconque il suffit d'écrire que ce système est en équilibre sous l'action des forces réelles qui agissent sur lui et sous l'action d'une force fictive, qu'on appelle force d'inertie ».

Soit m la masse d'un point matériel, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, les composantes de l'accélération de ce point ; les composantes de la force d'inertie seront : $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$.

Grace à ce principe les questions de dynamique se ramènent à des questions de statique en en particulier l'hydrodynamique se ramène à l'hydrostatique.

Nous avons trouvé les équations de l'hydrostatique :

$$\frac{dp}{dx} = \rho X \qquad \frac{dp}{dy} = \rho Y \qquad \frac{dp}{dz} = \rho Z.$$

où p désigne la pression hydrostatique et ρ la densité du fluide, (x, y, z), les coordonnées d'un point autour duquel nous avons isolé une portion infiniment petite de fluide de masse m, et nous avons appelé, mX, mY, mZ les composantes des forces extérieures qui agissent sur cette même masse m.

Pour l'hydrodynamique il suffit d'écrire ces mêmes équations en y introduisant les forces d'inertie.

Les forces d'inertie qui agissent sur m sont :

$-m\frac{d^2x}{dt^2}$ parallèle à ox,

$-m\frac{d^2y}{dt^2}$ parallèle à oy,

$-m\frac{d^2z}{dt^2}$ parallèle à oz,

$\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ sont les composantes de l'accélération de la molécule fluide qui occupe le centre de gravité de la masse fluide considérée.

Tout se passe donc comme si le liquide était en équilibre sous l'action des forces qui agissent extérieurement, et sous l'action des forces d'inertie

$$- m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad - m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad - m \frac{d^2z}{dt^2}$$

Nous aurons alors :

$$\frac{dp}{dx} = \rho \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right)$$ et deux autres équations analogues.

Cherchons $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Considérons un point quelconque qui à l'instant t a pour coordonnées x, y, z, soient u, v, w les trois composantes de la vitesse de cette molécule fluide, nous avons ;

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt} \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

Considérons la molécule à l'époque $t + dt$ ses coordonnées sont devenues $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ et nous avons :

$$dx = u\,dt, \quad dy = v\,dt, \quad dz = w\,dt.$$

La vitesse sera devenue $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ et nous aurons :

$$du = \frac{d^2x}{dt^2} dt \quad (1)$$ de même dv et dw

du est la différence totale de u qui est fonction de t, x, y, z

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

ou en remplaçant dx, dy, dz par leur valeur,

$$du = dt \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} . u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right] \quad (2)$$

Égalons les deux valeurs de du ainsi trouvées (1) et (2) cela donne

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v . \frac{\partial u}{\partial y} + w . \frac{\partial u}{\partial z}$$

Portons cette valeur de $\frac{d^2x}{dt^2}$ dans l'équation trouvée plus haut, nous aurons

$$\frac{1}{\rho} . \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u . \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X$$

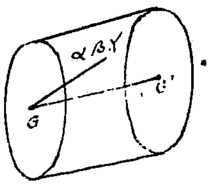
et deux autres équations analogues, que nous écrivons par symétrie :

$$\frac{1}{\rho} . \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z$$

Ces trois équations ne suffisent pas pour déterminer les 5 fonctions inconnues de t, x, y, z qui sont u, v, w, p et ρ. Il faut cinq équations ; nous en aurons deux autres qui sont l'équation, dite équation de continuité, que nous allons former et l'équation qui lie la densité et la pression, et qui dépend de la nature du fluide.

Formons l'équation de continuité : Considérons un élément quelconque de surface $d\omega$ et évaluons la quantité de fluide qui traverse cet élément pendant un intervalle de temps infiniment petit dt ; à la fin de l'intervalle le temps infiniment petit dt les molécules fluides qui ont traversé $d\omega$ au commencement se trouveront sur un autre élément de surface $d\omega'$ différant infiniment peu de $d\omega$. On pourra en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur considérer ces éléments comme plans, parallèles et égaux entre eux.



Les molécules qui ont traversé $d\omega$ pendant la durée de l'intervalle occupent des positions intermédiaires, elles remplissent un certain volume infiniment petit qu'on peut considérer comme un cylindre en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur.

Soit G le centre de gravité de $d\omega$. La molécule qui a passé en G au commencement sera en G' à la fin de l'intervalle de temps dt ; les génératrices du cylindre peuvent être considérées comme parallèles à GG'.

GG' est une droite infiniment petite qui représente en grandeur, direction et sens la vitesse de la molécule G multipliée par dt, udt, vdt, wdt.

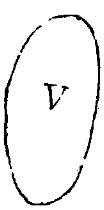
Pour avoir la quantité de fluide qui a traversé $d\omega$ pendant le temps dt, il faut évaluer le volume et la masse de ce cylindre oblique. Sa base est $d\omega$; soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\omega$; sa hauteur est la projection de gg' sur cette normale c'est-à-dire

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w)\, dt.$$

Le volume du cylindre est donc $d\omega . dt . (\alpha u + \beta v + \gamma w)$

et sa masse : $\rho . d\omega . dt\, (\alpha u + \beta v + \gamma w)$

C'est la quantité de fluide qui a traversé $d\omega$ pendant le temps dt.



Considérons alors un volume V fermé quelconque, et soit M la masse de fluide contenu à l'intérieur de ce volume. Nous avons :

$$M = \int \rho\, dV$$

Au bout d'un temps infiniment petit dt la masse M sera devenue $M + dM$ et nous avons

$$\frac{dM}{dt} = \int \frac{d\rho}{dt} . dV .$$

L'intégrale étant toujours étendue au volume total V.

La quantité de fluide qui a traversé $d\omega$ pendant le temps dt est $\rho\, d\omega . dt\ (\alpha u + \beta v, + \gamma w)$ pour avoir dM qui est la quantité de fluide qui est entrée dans la surface considérée pendant le temps dt, il n'y a qu'à intégrer l'expression ci-dessus et étendre l'intégrale à tous les éléments de la surface. Nous prendrons pour $\alpha \beta \gamma$ les cosinus directeurs de la normale du côté extérieur de la surface ; l'expression ci-dessus changée de signe représentera alors la quantité de fluide qui traverse $d\omega$ pendant le temps dt en allant vers l'intérieur de la surface, nous aurons donc :

$$dM = -\int \rho \, d\omega \, dt \, (\alpha u + \beta v + \gamma w)$$

$$\text{ou } \frac{dM}{dt} = -\int \rho \, (\alpha u + \beta v + \gamma w) d\omega$$

Transformons cette intégrale.

Nous avons démontré le théorème suivant : Soit F une fonction quelconque, dV l'élément de volume, $d\omega$ l'élément de surface limitant ce volume, on a :

$$\int \alpha \, F \, d\omega = \int \frac{\partial F}{\partial x} \, dV$$

L'équation qui précède peut dès lors s'écrire :

$$\frac{dM}{dt} = -\int \left[\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right] dV$$

L'intégrale double étendue à tous les éléments de la surface est remplacée par une intégrale triple étendue à tout le volume.

Nous avons d'ailleurs trouvé $\frac{dM}{dt} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$. Égalons ces deux valeurs de $\frac{dM}{dt}$ nous aurons :

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right] dV = 0$$

L'intégrale doit être nulle quelque soit volume considéré, on doit donc avoir :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0.$$

C'est l'équation de continuité.

La 5e équation est une équation entre ρ et p, $\rho = \varphi(p)$

Supposons par exemple qu'il s'agisse d'un fluide incompressible : un liquide par exemple, on a alors $\rho = C^{te}$ densité du liquide.

S'il s'agit d'un gaz et si la température peut être regardée comme constante, nous aurons : $\rho = K p$, d'après la loi de Mariotte.

Il peut arriver que la température ne soit pas constante, mais que, si on considère une portion du gaz, cette portion ne reçoive pas de chaleur de l'extérieur. C'est la loi adiabatique.

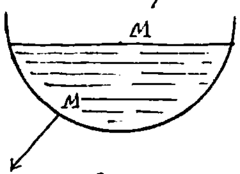
Dans ce cas on a $\rho = K p^{\gamma}$.

C'est cette hypothèse qu'il faut faire quand on étudie la vitesse du son.

Il peut arriver encore que la température soit distribuée d'une façon inégale sur la surface, $\rho = \varphi \ (p\ , \theta)$, où θ est une fonction de x, y, z.

Nous avons ainsi 5 équations aux dérivées partielles qui sont les équations fondamentales de l'hydrodynamique.

Ces cinq équations ne sont pas encore suffisantes car une équation aux dérivées partielles ne définit pas complètement la fonction inconnue qui s'y trouve ; il faut se donner les conditions limites. Il faut se donner l'état du fluide à l'origine du temps u, v, w, p, ρ, plus deux conditions limites relatives à la surface du vase qui contient le liquide et à la surface libre du liquide.



Considérons un vase et du liquide dedans : soit M une molécule quelconque en contact avec la paroi du vase, elle ne peut avoir de vitesse normale à la paroi, il faut donc écrire que sa vitesse est dans le plan tangent. Ce qui donne :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à la paroi du vase.

Sur la surface libre, en un point quelconque M' de cette surface, la pression doit être égale à la pression atmosphérique.

Ces équations très compliquées en général se simplifient dans un certain nombre de cas particuliers.

Ainsi par exemple, si le liquide est incompressible nous avons $\rho = C^{te}$, les 3 premières équations ne varient pas, mais

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial x}, \ \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = \rho \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = \rho \frac{\partial w}{\partial z}$$

et l'équation de continuité devient en supprimant le facteur ρ qui est différent de zéro :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ce qui montre que l'équation de continuité est beaucoup plus simple dans le cas des liquides que dans le cas des gaz.

Un autre cas simple est celui du mouvement permanent. C'est un mouvement dans lequel la vitesse de chaque molécule varie, mais toutes les molécules possèdent la même vitesse, (u, v, w) au moment où elles passent en un point donné A. Dans ces hypothèses, u, v, w, ne dépendent pas de t, et on a pour les premières équations :

$$\frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z$$

L'équation de continuité se simplifie aussi et donne :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Dans le cas du liquide cette équation se simplifie encore et devient ce qui a été dit plus haut.

Un autre cas de simplification est celui où l'on a une fonction des vitesses.

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi.$$

différentielle exacte. Alors

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Nous verrons que si à l'origine des temps il y a une fonction des vitesses, il y aura toujours un fonction des vitesses.

Supposons cette condition remplie, avec la condition $\rho = c^{te}$.

Cherchons ce que deviennent les équations:

Nous avons l'équation de continuité:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

qui devient $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$

On reconnaît l'équation $\Delta\varphi = 0$ qui est l'équation de Laplace, équation fondamentale dans la théorie du potentiel.

Ici son sens physique est absolument différent.

Considérons le cas d'un gaz, ρ n'est plus constant, nous allons supposer qu'il y a une fonction des vitesses et de plus une fonction des forces:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dV$$

Posons $T = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$

La parenthèse est le carré de l'expression de la vitesse.

Nous avons en différentiant par rapport à x

$$\frac{\partial T}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Nous avons supposé que $u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi$ et nous avons vu que

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Par suite $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \qquad \dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$

On a alors en substituant dans l'expression de $\dfrac{\partial T}{\partial x}$

$\dfrac{\partial T}{\partial x} = u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}$, équation qui n'a lieu que s'il y a une fonction des vitesses.

Les trois premières équations de l'hydrodynamique se simplifient alors immédiatement et donnent :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = X = \frac{\partial U}{\partial x}$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \cdot \partial t} + \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \cdot \partial t} + \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

On peut encore simplifier l'écriture de ces équations en les ajoutant après avoir multiplié la première par dx, la seconde par dy, la troisième par dz, il vient :

$$\frac{1}{\rho}\,\delta p + \delta\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \delta T = \delta U$$

Je représente par δ la différentielle totale de ces fonctions en y considérant t comme une constante.

Si le mouvement est permanent p, φ, T ne dépendent plus du temps, on a $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ et dans l'équation précédente figurent maintenant les différentielles totales proprement dites

$$\frac{1}{\rho}\,dp + dT = dU$$

Supposons enfin que les trois conditions soient réunies : le mouvement est permanent, il y a une fonction des vitesses et nous avons un liquide $\rho = C^{te}$.

Cette équation peut alors s'intégrer, elle donne

$$\frac{p}{\rho} + T = U + C^{te}$$

L'équation de l'hydrodynamique se présente alors sous une forme particulièrement simple.

18e Leçon.

Reprenons les équations de l'hydrodynamique

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= X \\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= Y \\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= Z
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Pour compléter le système il faut encore écrire l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

ρ désignant la quantité du fluide, p la pression hydrostatique u, v, w, les composantes de la vitesse, X, Y, Z, les composantes de la force.

Nous avons vu que ces équations se simplifient lorsqu'il y a un fonction des vitesses, c'est à dire qu'il existe une fonction φ telle que

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Dans ce cas $u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi$ différentielle exacte à la condition de considérer t comme une constante.

Théorème de Lagrange. S'il y a une fonction des vitesses à un instant donné, à l'origine des temps, par exemple, il y aura encore une fonction des vitesses a un instant quelconque.

Ce théorème est soumis à deux restrictions:

1° Il faut supposer qu'il y a une fonction des forces:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU$$

et on a $X = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$

C'est ce qui arrive lorsque la force considérée est considéré est la pesanteur ou encore l'attraction Newtonienne:

Il existe d'autres forces qu'on peut avoir à considérer et qui ne satisfont pas à cette condition. Par exemple la viscosité des liquides, dans ce cas l'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ n'est plus une différentielle exacte. En effet pour que $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, soit une différentielle exacte il faut d'abord que X, Y, Z ne dépendent que de x, y, z, puisque les seules différentielles qui entrent dans l'expression sont dx, dy, dz; or la viscosité dépend encore des composantes de la vitesse u, v, w.

Néanmoins on a discuté la question de savoir si un fluide visqueux est encore soumis au théorème de Lagrange, les opinions sont partagées.

Nous n'appliquerons le théorème qu'aux fluides parfaits.

Si l'on tient compte d'un mouvement de rotation il faut introduire deux forces fictives, la force centrifuge ordinaire qui est soumise à une fonction de forces et la force centrifuge composée qui ne l'est pas. Ceci arrive en particulier quand ont tient compte de la rotation de la terre, mais ceci n'a lieu que dans un très petit nombre d'applications dans lesquelles le théorème de Lagrange n'est plus applicable. 2° La seconde restriction est que ρ soit fonction de la pression seulement: $\rho = \varphi(p)$

Si on a un liquide parfait, $\rho = C^{te}$ la condition est satisfaite.

Elle est satisfaite aussi pour un gaz à température constante, ou si la température varie il suffit pour qu'elle soit satisfaite, que les surfaces d'égale pression coïncident avec les surfaces d'égale température.

Dans le cas contraire le théorème n'est plus applicable.

Supposons donc ces conditions remplies ; il y a une fonction des vitesses à un instant t, il y a une fonction des forces et la densité est fonction seulement de la pression, nous allons démontrer qu'il y a une fonction des vitesses à un instant quelconque.

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que si $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ est une différentielle exacte au temps t elle l'est encore à l'époque $t + dt$.

En effet, au temps $t + dt$, u est devenu $u + \frac{\partial u}{\partial t}\,dt$, v est devenu $v + \frac{\partial v}{\partial t}.\,dt$; w est devenu $w + \frac{\partial w}{\partial t}.\,dt$.

$u\,dx + v\,dy + w\,dz$ est alors devenu : $u\,dx + v\,dy + w\,dz + dt\left[\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial v}{\partial t}dy + \frac{\partial w}{\partial t}dz\right]$

La 1ère partie étant une différentielle exacte il faut démontrer que la seconde $\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + \frac{\partial v}{\partial t}\,dy + \frac{\partial w}{\partial t}\,dz$ l'est aussi.

Nous avons posé plus haut $T = \frac{1}{2}\,(u^2 + v^2 + w^2)$ et nous avons vu que dans le cas d'une fonction des vitesses, à un instant quelconque on a :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z}$$

La première équation de l'hydrodynamique (1) se simplifie et devient

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = X$$

$$\text{ou bien } \frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\text{De même } \frac{\partial v}{\partial t} = Y - \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Z - \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z}$$

Multiplions la première par dx, la seconde par dy, la 3e par dz, et ajoutons, il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + \frac{\partial v}{\partial t}.\,dy + \frac{\partial w}{\partial t}\,dz = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - \left[\frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz\right] - \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right]$$

$$\text{ou bien } \frac{\partial u}{\partial t}\,dx + \frac{\partial v}{\partial t}\,dy + \frac{\partial w}{\partial t}\,dz = dU - dT - \frac{1}{\rho}\,dp.$$

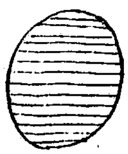
Le second membre est une différentielle exacte, en considérant toujours t comme une constante ; donc le 1er membre est aussi une différentielle exacte, ce qui démontre le théorème de Lagrange.

Si en particulier le fluide part du repos, u, v, w sont nuls à l'origine, il y a une fonction des vitesses à l'origine des temps, il y a donc une fonction des vitesses à une époque quelconque.

Un cas particulier intéressant est celui des liquides $\rho = C^{te}$.

L'équation de continuité se réduit à

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta \varphi = 0$$



Supposons alors un liquide incompressible enfermé dans un vase clos qu'il remplit complètement. Il ne peut y avoir de fonction des vitesses qu'à la condition que le liquide soit au repos.

Appliquons en effet le théorème de Green.

En appelant $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ la composante normale de la vitesse, $\alpha\ \beta\ \gamma$ les cosinus directeurs de la normale.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

soit encore $d\omega$ l'élément de surface du vase, $d\varpi$ l'élément du volume intérieur au vase. Nous avons :

$$\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega = \int \varphi\ \Delta \varphi . d\varpi + \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ est nul car on a vu qu'en un point de la surface d'un vase la vitesse du liquide doit être dans le plan tangent ; de plus $\Delta \varphi = 0$ par hypothèse ; il reste donc :

$$\int d\varpi \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0$$

L'élément différentiel est essentiellement positif, pour que l'intégrale soit nulle, il faut qu'il le soit aussi, ce qui exige

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

C'est à dire que les trois composantes de la vitesse soient nulles en tous les points du liquide. Le liquide est en repos.

Supposons le liquide en repos à l'origine des temps, il y a une fonction de vitesses ; d'après le théorème de Lagrange il y aura à un instant quelconque une fonction des vitesses donc le liquide restera en repos. Il faudra supposer toutefois que les forces qui agissent soient soumises à une fonction des forces, autrement on ne pourrait plus appliquer le théorème de Lagrange.

Considérons maintenant un fluide quelconque, supposons qu'il existe une fonction des vitesses et une fonction des forces, et que le mouvement soit un mouvement permanent, u, v, w, ne dépendent que de x, y, z.

Les équations fondamentales deviennent :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}$$
$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}$$
$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Autog. C. Laroche et ses fils, 8, Rue Mabillon, Paris

Multiplions la première par dx, la seconde par dy, la troisième par dz et ajoutons, il vient :

$$\frac{\partial p}{\rho} + dT = dU$$

Cas des liquides : Supposons d'abord ρ constant, c'est le cas des liquides incompressibles. Nous pouvons intégrer et nous avons :

$$\frac{p}{\rho} + T = U + C$$

Dans le cas particulier où la seule force qui agit est la pesanteur, ($X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$ en supposant l'axe des z vertical vers le bas) cette équation se simplifie et donne le théorème de Bernouilli.

Dans ce cas $U = gz$ et nous avons

$$\frac{p}{\rho} + T = gz + C$$

C'est le théorème de Bernouilli, dans le cas des liquides, en supposant qu'il y a une fonction des vitesses.

On peut se demander si ce théorème s'applique s'il n'y a pas de fonction des vitesses. Nous allons voir qu'il s'applique en tous les points d'un même filet.

On appelle filet, dans un liquide, en mouvement permanent la trajectoire d'une certaine molécule. Toutes les molécules d'un même filet vont successivement passer par un point.

Considérons alors un filet liquide, soit m la position d'une molécule au temps t, x, y, z ses coordonnées, m' la position de la même molécule au temps $t + dt$, soient $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ ses coordonnées, nous avons :

$$dx = u\,dt, \quad dy = v\,dt, \quad dz = w\,dt$$

Les équations différentielles du filet, trajectoire du point m seront alors :

$$\frac{\partial x}{u} = \frac{\partial y}{v} = \frac{\partial z}{w}$$

Multiplions alors les équations (1) générales de l'hydrodynamique la première par dx, la seconde par dy, la troisième par dz ; et remarquons que $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ et que $dx = u.dt$, $dy = v.dt$, $dz = w.dt$. Cela donne en ajoutant

$$\frac{dp}{\rho} + dt \left| \begin{array}{l} u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + uv \frac{\partial u}{\partial y} + uw \frac{\partial u}{\partial z} \\ + uv \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial y} + vw \frac{\partial v}{\partial z} \\ + uw \frac{\partial w}{\partial x} + uw \frac{\partial w}{\partial y} + w^2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right| = dU$$

or ce second terme du premier membre est précisément dT où on a remplacé dx par $u\,dt$; dy par $v.dt$; dz par $w\,dt$. On a donc :

$$dp + dT = dU$$

Nous retrouvons l'équation différentielle qui nous a donné le théorème de Bernouilli. Il s'applique donc à tous les points d'un même filet fluide.

La constante C d'intégration est la même pour tous les points d'un même filet, et elle diffère pour deux filets différents.

Cas d'un gaz : nous avons toujours la même équation différentielle qui s'applique soit à tous les points de la masse du gaz s'il y a une fonction des vitesses, soit à tous les points d'un même filet s'il n'y a pas de fonction des vitesses.

On peut l'intégrer dans certains cas :

1° Si le gaz est soumis à la loi de Mariotte : $p = K\rho$

L'équation devient : $\frac{dp}{K\rho} + dT = dU$

Ou en intégrant $\frac{1}{K}\ L\,.\,p + T = U + C$

La forme du théorème de Bernouilli est un peu modifiée.

2° Il arrive plus souvent qu'on ait à appliquer la loi adiabatique la pression et la température varient en même temps.

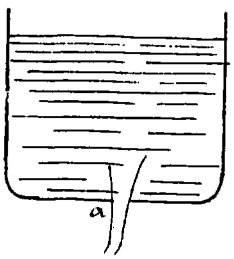
On a dans ce cas : $p = K\rho^{\gamma}$ γ est le rapport des chaleurs spécifiques.

On a alors $\frac{dp}{K\rho^{\gamma}} + dT = dU$

D'où en intégrant $\frac{p^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)} + T = U + C$

Voilà ce que devient dans ce cas le théorème de Bernouilli.

Une des principales applications du théorème de Bernouilli est le théorème de Toricelli.



Considérons un vase plein de liquide et supposons qu'en un un point du vase soit percé un orifice à mince paroi, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'ajutage, le liquide va s'écouler, il se produira une veine liquide sortant de l'orifice a.

Le problème qui se pose est de trouver la vitesse du liquide au point a.

On peut toujours supposer qu'il y a une fonction des vitesses car le liquide part du repos et n'est soumis qu'à la pesanteur.

En général ce mouvement ne sera pas permanent car le niveau du liquide s'abaisse. Si toutefois nous supposons les dimensions de l'orifice très petites par rapport à celles du vase, la vitesse ne sera sensible que dans le voisinage de l'orifice, le niveau libre ne s'abaissera que très lentement, ce qui nous permettra d'appliquer les formules du mouvement permanent et de regarder la vitesse comme nulle en tous les points du niveau libre

Posons $T = \frac{H^2}{2}$ H sera la vitesse

L'équation de Bernouilli donne : $\frac{p}{\rho} + \frac{H^2}{2} = gz + C$.

Déterminons la constante en nous servant de cette condition que la vitesse est nulle en tous les points du niveau libre pendant le temps dt, H est nul, et la pression est la pression atmosphérique p_0.

Ceci nous donne $\frac{p_0}{\rho} = C$,

car $z = 0$ nous avons pris le plan du niveau libre pour plan des xy.

L'équation précédente donne alors $p + \rho\frac{H^2}{2} = \rho g z + p_0$

Considérons le point a, en ce point la pression est p_0 pression atmosphérique, $z = h$ hauteur du niveau libre au dessus de l'orifice, l'équation donne donc

$$H^2 = 2gh$$

$$\text{ou} \quad H = \sqrt{2gh}$$

Appliquons le même théorème au cas d'un gaz enfermé dans un récipient et s'échappant par un orifice en supposant la pression intérieure plus grande que la pression extérieure.

Il faut appliquer la formule adiabatique $\frac{p^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)} + T = U + C$.

Supposons que la pression intérieure soit p, la pression extérieure p_0. Nous pouvons négliger l'action de la pesanteur qui est très petite et supposer la pression du gaz à l'intérieur constante. Le gaz peut être regardé comme n'étant soumis à aucune force.

Considérons un point à l'intérieur très éloigné de l'orifice, la pression en ce point est p_1 sa vitesse nulle, nous aurons :

$$\frac{p_1^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)} = C$$

Considérons le point a, la pression est p_0, la vitesse est H, on a donc en ce point

$$\frac{p_0^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)} + \frac{H^2}{2} = \frac{p_1^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{H^2}{2} = \frac{p_1^{1-\gamma} - p_0^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)}$$

Cette formule se simplifie si p_1 diffère très peu de p_0

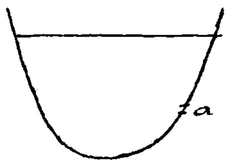
on peut poser $p_1^{1-\gamma} - p_0^{1-\gamma} = (p_1 - p_0)\frac{d}{dp}(p^{1-\gamma})$
$= (1-\gamma)\, p_0^{-\gamma}(p_1 - p_0)$ On a donc $\frac{H^2}{2} = \frac{p_1 - p_0}{K p_0^{\gamma}} = \frac{p_1 - p_0}{\rho}$

formule simple mais qui ne s'applique que dans le cas où p_1 et p_0 diffèrent très peu l'un de l'autre

19ᵉ Leçon.

Nous avons supposé que les dimensions de l'orifice sont très petites par rapport aux dimensions du vase ; il en résulte que le liquide n'a de vitesse que dans le voisinage de l'orifice ; le niveau libre reste horizontal.

Grâce à cette hypothèse on peut considérer le mouvement comme permanent.



Soit H la vitesse de sortie à l'orifice a percé en mince paroi ; h la hauteur du liquide au dessus de a, nous avons : d'après le théorème de Toricelli,

$$H = \sqrt{2gh}$$

Il s'agit maintenant de calculer le débit, c'est-à-dire la quantité Q qui s'écoule dans l'unité de temps.

Lorsqu'on considère un élément de surface $d\omega$, la quantité de liquide qui traverse cet élément pendant le temps dt est :

$$\rho \, d\omega \, dt \, (\alpha u + \beta v + \gamma w)$$

α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\omega$; $\alpha u + \beta v + \gamma w$ représente la composante normale de la vitesse.

Supposons le mouvement permanent, la quantité de fluide qui traverse l'élément $d\omega$ dans l'unité de temps est :

$$\rho \, d\omega \, (\alpha u + \beta v + \gamma w)$$

Soit ω la section de l'orifice de sortie, décomposons-le en une infinité d'éléments $d\omega$, $\omega = \Sigma \, d\omega$

La quantité de liquide qui traverse l'élément $d\omega$ sera

$$\rho \, d\omega \, H \cos\theta$$

θ étant l'angle de la vitesse avec la normale à l'élément.

La quantité de liquide qui traverse tout l'orifice dans l'unité de temps est

$$Q = \int \rho \, H \cos\theta \, d\omega$$

En un point du pourtour de l'orifice on a : $H = \sqrt{2gh}$

On peut admettre avec un degré d'approximation suffisant qu'en un point quelconque de l'orifice la pression atmosphérique ; alors la vitesse est $\sqrt{2gh}$.

On a alors $Q = \rho \sqrt{2gh} \int \cos\theta \, d\omega$

Posons $\int \cos\theta \, d\omega = \mu \, \omega$

Alors $Q = \rho \sqrt{2gh}\,.\,\mu\omega$

μ est plus petit que 1. En effet le coefficient de $d\omega$ est $\cos\theta$ plus petit que 1

alors $\int \cos\theta \, d\omega$ est plus petit que $\int d\omega$ ou ω

Donc on a $\mu < 1$

μ est ce qu'on appelle le coefficient de contraction.

Au sortir de l'orifice la section de la veine diminue d'abord pour rester constante ensuite à une très faible distance de l'orifice. L'expérience montre que les filets liquides à partir du moment où la veine est cylindrique sont parallèles à la direction de la veine, c'est-à-dire qu'une molécule quelconque a sa vitesse perpendiculaire à la section normale de la veine.

Si on cherche le débit on trouve que la vitesse d'un point quelconque appartenant à la section contractée ω' est $\sqrt{2gh} + \delta h$. δh est une quantité très petite négligeable, la vitesse est normale à ω'

Donc pour le débit $Q = \rho\omega'\sqrt{2gh}$

Nous avons trouvé d'autre part

$$Q = \rho\sqrt{2gh}\,\mu\,.\,\omega$$

On a donc : $\mu = \dfrac{\omega'}{\omega}$

C'est pour cette raison qu'on appelle μ le coefficient de contraction ; c'est le rapport de la section de la veine contractée à la section de l'orifice.

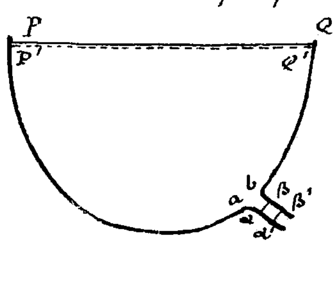
L'expérience montre que l'on a $\mu = 0,63$.

Il est impossible de déterminer théoriquement le coefficient de contraction, on peut seulement démontrer que μ est plus grand que $\frac{1}{2}$.

Pour le démontrer nous allons appliquer le théorème des projections des quantités du mouvement qui s'énonce ainsi :

« Si on considère un système mécanique quelconque la dérivée par « rapport au temps de la somme des projections des quantités de mouvement « de tous les points du système sur un axe est égal à la somme des projections « des forces sur le même axe. »

Appliquons le théorème à la quantité de liquide $Pa\alpha\beta bQ$.



Projetons la quantité de mouvement du système sur une direction parallèle à la veine.

Au bout d'un temps infiniment petit dt le liquide se sera déplacé ; $\alpha\beta$ sera venu en $\alpha'\beta'$, PQ en $P'Q'$, et l'on aura : volume $\alpha\beta\alpha'\beta'$ = volume $PQP'Q'$.

Cherchons la projection de la quantité de mouvement sur l'axe. Les deux volumes $PQ\alpha\beta$, $P'Q'\alpha'\beta'$ ont la portion $P'Q'\alpha\beta$ commune. La quantité de liquide qui remplit ce volume commun est la même au temps t et au temps $t+dt$, car nous supposons le mouvement permanent; il n'y a donc pas à s'occuper de cette partie commune pour avoir l'accroissement de la quantité de mouvement.

L'accroissement de la quantité de mouvement est la quantité de mouvement de la portion de liquide $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ diminuée de la quantité de mouvement de la portion $PQP'Q'$. Or cette dernière est négligeable car nous avons supposé négligeable la vitesse du niveau libre.

L'accroissement de la quantité de mouvement se réduit donc à la quantité de mouvement de $\alpha\beta\,\alpha'\beta'$; pour l'avoir, il faut multiplier la masse par la vitesse: la masse est égale au produit $Q\,dt$ (Q représentant le débit); la vitesse est $\sqrt{2gh}$ sa direction est précisément celle de la veine. La projection sur la direction de la veine de l'accroissement de la quantité de mouvement est donc:

$$Q\,dt\,\sqrt{2gh}$$

et la dérivée par rapport au temps de la projection de la quantité de mouvement sera: $Q\sqrt{2gh}$

Calculons les projections des forces extérieures;

Nous avons d'abord le poids P du liquide, dirigé suivant la verticale, qui a pour projection sur la direction de la veine liquide $P\cos\alpha$, en appelant α l'angle de la veine liquide avec la verticale dirigée vers le bas.

Il faut en plus considérer les pressions sur toute la surface du liquide. Soit $d\sigma$ un élément quelconque de la surface, p, la pression correspondante, φ l'angle de la normale à l'élément avec la direction de la veine liquide.

La projection sur la veine de la pression sur l'élément $d\sigma$ est:

$$p\cos\varphi\,d\sigma$$

et la somme des projections de toutes les pressions sur tous les éléments de la surface est $\int p\cos\varphi\,d\sigma$.

Cette intégrale étant étendue à toute la surface de la portion de liquide considérée.

Le théorème des projections des quantités de mouvement donne donc:

$$Q\sqrt{2gh} = P\cos\alpha + \int p\cos\varphi\, d\sigma$$

Ou en remplaçant Q par sa valeur

$$2gh\,\rho\,\mu\,\omega = P\cos\alpha + \int p\cos\varphi\, d\sigma$$

Nous avons trouvé d'autre part :

$$\frac{p}{\rho} + T = gz + \frac{p_0}{\rho} \quad \text{où} \quad T = \frac{v^2}{2}$$

$$\text{d'où} \quad p = \rho g z + p_0 - \rho T$$

p_0 est la pression sur le niveau libre que nous avons pris pour plan des xy, en tous les points de ce niveau libre on a $T=0 \quad z=0 \quad p=p_0$.

Remplaçons p par sa valeur dans l'équation qui précède, nous aurons.

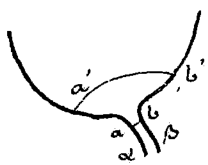
$$2gh\rho\mu\omega = P\cos\alpha + \int(\rho g z + p_0)\cos\varphi\, d\sigma - \int \rho T\cos\varphi\, d\sigma.$$

$\rho g z + p_0$, c'est la pression hydrostatique en un point qui aurait lieu si le liquide était en équilibre c'est-à-dire si on fermait l'orifice. Dans ce cas la pression hydrostatique ferait équilibre à la pesanteur et on devrait avoir :

$$P\cos\alpha + \int(\rho g z + p_0)\cos\varphi\, d\sigma = 0$$

Reste alors : $2gh\mu\rho\omega = -\int \rho\, T\cos\varphi\, d\sigma$

L'hypothèse est que la vitesse n'est sensible que très près de l'orifice ; T peut donc être considéré comme nul pour tous les points du volume excepté pour une petite zone $a'b'ab$ voisine de l'orifice.



Il faudra alors étendre l'intégrale du second membre, d'une part à la portion $aa'bb'$, d'autre part à $a\alpha\beta b$. Nous aurons donc :

$$2gh\mu\rho\omega = -\int_{(aa',bb')} \rho\, T\cos\varphi\, d\sigma - \int_{(a\alpha,\beta b)} \rho\, T\cos\varphi\, d\sigma$$

La première de ces intégrales est impossible à calculer, nous savons seulement qu'elle est négative, car $\cos\varphi$ est négatif, nous avons donc :

$$2gh\,\rho\,\mu\,\omega > -\int_{(a\alpha,\beta b)} \rho\, T\cos\varphi\, d\sigma$$

$$\text{ou} \quad 2gh\,\rho\,\mu\,\omega > \int_{(a\alpha,\beta b)} \rho\, T(-\cos\varphi)\, d\sigma$$

Le second membre est positif.

Nous avons d'ailleurs $\rho = C^{te}$ puisque nous considérons un liquide et $T = \frac{1}{2}v^2 = gh$.

Il reste donc en supprimant le facteur commun $gh\rho$:

$$2\mu\,\omega > \int(-\cos\varphi)\, d\sigma$$

or $(-\cos\varphi\, d\sigma)$ c'est la projection de l'élément $d\sigma$ sur un plan perpendiculaire à la direction de la veine, car φ est est l'angle de la normale à $d\sigma$ avec la direction de la veine ; ce plan perpendiculaire à la direction de la veine, c'est le plan de l'orifice ;

$$\int_{(a\alpha,\,\beta b)} (-\cos\varphi)\, d\sigma \quad ,$$

c'est la projection sur le plan de l'orifice de la surface $(a\alpha, b\beta)$ c'est la section même de l'orifice, ω nous avons donc :

$$2\mu\omega > \omega$$

$$\text{ou } \mu > \tfrac{1}{2}$$

Il y a un cas où μ sa valeur limite $\frac{1}{2}$. C'est le cas de l'ajutage rentrant ; il suffit en effet pour que $\mu = \frac{1}{2}$ que l'on ait :

$$\int_{(aa'bb')} \rho T \cos\varphi \, d\sigma = 0$$

or l'ajutage est parallèle à la veine, φ est l'angle de la normale au cylindre ajutage avec la veine, angle qui est droit donc $\cos\varphi = 0$, et l'intégrale disparaît.

L'expérience confirme d'ailleurs suffisamment les prévisions théoriques.

Petits mouvements des fluides.

Reprenons les équations générales de l'hydrodynamique

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X$$
$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = X$$
$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z$$

Supposons les déplacements très petits, les vitesses sont très petites et par suite leurs composantes u, v, w ; on peut donc en négliger les carrés et il reste :

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = X$$
$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = Y$$
$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = Z$$

Considérons seulement le cas des fluides pesants, nous avons :

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z = 0$$

Supposons encore de plus qu'il y a une fonction des vitesses φ alors on a

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

et les équations deviennent :

Autog. C. LAROCHE & ses FILS, 8, rue Mabillon, PARIS

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0$$
$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0$$
$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=g$$

Multiplions la première par dx, la seconde par dy, la 3^e par dz et ajoutons, il vient :

$$\frac{dp}{\rho}+d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=g\,dz$$

Il faut observer que dans ces différentielles totales, le temps est considéré comme une constante.

Intégrons nous aurons :

$$\frac{p}{\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=gz+C$$

C'est une expression qui ne dépend que de t, soit $f'(t)$.

Nous pouvons toujours supposer que $C=0$, si en effet il n'en était pas ainsi, nous poserions : $\varphi=\varphi_1+f$.

On pourrait encore prendre φ_1 comme fonction des vitesses car

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\qquad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}$$

L'équation ci-dessus devient alors :

$$\frac{p}{\rho}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+f'(t)=gz+f'(t)$$
$$\text{ou}\quad\frac{p}{\rho}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=gz.$$

A cette équation il faut joindre l'équation de continuité

$$\Delta\varphi=0$$

Nous devrons aussi satisfaire aux conditions qui se rapportent à la surface libre.

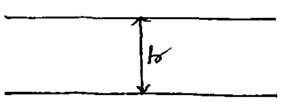
Nous aurons en tous les points de cette surface

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=gz$$

Dérivons ; p_0 est une constante, sa dérivée est donc nulle : $\frac{\partial z}{\partial t}$ c'est la composante verticale de la vitesse, c'est $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Donc on a : $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=g\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$

De plus en tous les points de la paroi du vase, la composante de la vitesse normale au vase devra être nulle.



Supposons qu'on ait un liquide pesant compris entre deux plans horizontaux, le plan des xy représentant le fond du liquide.

L'axe des z étant étant dirigé vers le bas l'équation du niveau libre est

$z = -h$; Pour $z = -h$, on doit avoir :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = g \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Pour la surface inférieure, la composante normale de la vitesse est nulle, alors pour $z=0$ on a $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$

Une solution particulière du problème sera :

$$\varphi = \left(e^{mz} + e^{-mz}\right) \sin\,(mx - \lambda t)$$

m et λ étant liés par une certaine relation.

Vérifions d'abord que cette fonction satisfait à l'équation $\Delta\varphi = 0$

Nous avons
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -m^2 \varphi$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = m^2 \varphi$$

La somme est nulle. Donc l'équation $\Delta\varphi = 0$ est vérifiée

Nous avons de plus $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = m \left(e^{mz} - e^{-mz}\right) \sin\,(mx - \lambda t)$

pour $z=0$ on a bien $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ car $e^{mz} - e^{-mz} = 0$

pour $z = -h$ nous devons avoir $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = g \frac{\partial \varphi}{\partial z}$,

or : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\left(e^{mz} + e^{-mz}\right) \lambda^2 \sin\,(mx - \lambda t)$

Ce qui donne en faisant $z = -h$ et écrivant l'égalité $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = g \frac{\partial \varphi}{\partial z}$:

$$-\lambda^2 \left(e^{mh} + e^{-mh}\right) \sin.\,\cancel{(mx - \lambda t)} = gm \left(e^{-mh} - e^{mh}\right) \sin\,\cancel{(mx - \lambda t)}$$

On doit donc avoir :

$$\lambda = \sqrt{gm \frac{e^{mh} - e^{-mh}}{e^{mh} + e^{-mh}}}$$

λ satisfait à cette condition, φ est une solution du problème. Ceci donne une onde élémentaire.

On aura une infinité de solutions en faisant varier m, en ajoutant une constante, on pourra de plus remplacer le sinus par le cosinus, et x par $x \cos\theta + y \sin\theta$, ce qui revient à faire tourner les axes des x et des y, ceci est permis car rien ne distingue l'axe des x parmi toutes les directions du plan horizontal. On pourra d'ailleurs combiner entre elles ces diverses solutions en les ajoutant entre elles après les avoir multipliées par des facteurs constants.

Revenons à l'onde élémentaire.

φ dépend de z et de $mx - \lambda t$. Cela montre que les ondes se propagent parallèlement à ox avec une vitesse constante égale à $\frac{\lambda}{m}$. La vitesse de propagation est donc :

$$\sqrt{\frac{g}{m} \frac{e^{mh} - e^{-mh}}{e^{mh} + e^{-mh}}}$$

Un cas particulier intéressant est celui où mh est très petit, alors on négligera m^2h^2 et les termes de degré supérieur, on aura alors pour la vitesse de propagation :

$$v = \sqrt{gh}$$

C'est la formule connue sous le nom de formule de Lagrange, elle ne s'applique que dans le cas de m très petit c'est-à-dire dans le cas des ondes très longues, par exemple dans le cas d'une perturbation violente.

Pour les ondes courtes la fonction sous le radical va en diminuant la vitesse est plus petite que $\sqrt{gh}$ et pour m très grand la vitesse tend vers zéro

Un cas particulier est celui où la profondeur est très grande,

h est très grand $h = \infty$

alors $V = \sqrt{\frac{g}{m}}$

20e Leçon.

Théorème de Helmholtz

Le théorème de Helmholtz s'applique au cas où il n'y a pas de fonction des vitesses, il n'est autre que celui de Lagrange généralisé.

Donnons d'abord quelques définitions :

Posons, en conservant les notations précédemment employées ;

$$A = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad B = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad C = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

S'il y a une fonction des vitesses on a :

$$A = 0 \qquad - B = 0 \qquad C = 0$$

Car $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ est une différentielle exacte et alors :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Si au contraire il n'y a pas de fonction des vitesses, les quantités $A\,B\,C$ ne sont pas nulles à la fois.

Ces quantités sont ce qu'on appelle les trois composantes du Tourbillon, parallèlement aux axes, A parallèlement à ox, B à oy, C à oz.

On représente le Tourbillon par un segment de droite dont les projections sur les 3 axes sont ABC si on appelle (H) la grandeur du Tourbillon, on a :

$$(H) = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

On justifie cette définition en remarquant que l'axe du tourbillon est le même en grandeur et en direction quelsque soient les axes choisis.

De plus supposons que la masse fluide soit animée d'un mouvement de rotation autour de Oz comme un corps solide. Les composantes de la vitesse sont :

$$u = \omega y \quad , \quad v = -\omega x \quad , \quad w = 0$$

Alors $A = 0$, $B = 0$, $C = 2\omega$

Ceci montre que dans le cas où toute la masse est animée d'un mouvement de rotation autour de Oz, en chaque point de la masse il y a un tourbillon proportionnel à la vitesse de rotation et ayant son axe parallèle à l'axe de rotation.

Lorsqu'on a le tourbillon ABC on dit qu'il y a une rotation infiniment petite autour de la droite ayant pour projections A, B, C.

Les trois grandeurs A, B, C, sont liées par la relation :

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

Il est aisé de le vérifier :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x . \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x . \partial y}$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x . \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y . \partial z}$$

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y . \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x . \partial z}$$

Ajoutons membre à membre, nous trouverons la relation annoncée.

Lignes de Tourbillon. — On nomme ainsi une ligne située dans l'intérieur du fluide, et qui a pour tangente en chacun de ses points, l'axe du tourbillon correspondant.

Si on appelle dx, dy, dz les différentielles des coordonnées d'un point quelconque d'une de ces lignes ; dx, dy, dz seront proportionnels aux cosinus directeurs de la tangente et par suite aux projections de l'axe du tourbillon.

On a donc : $\dfrac{dx}{A} = \dfrac{dy}{B} = \dfrac{dz}{C}$

Ce sont les équations différentielles des lignes de tourbillon.

Théorème de Helmholtz. — Si un certain nombre de molécules se trouvent à l'origine des temps sur une même ligne de Tourbillon elles se trouveront toujours sur une même ligne de Tourbillon.

Ce théorème est soumis aux mêmes restrictions que le théorème de Lagrange :

1° il faut une fonction des forces U.

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU$$

2° Il faut que la densité du fluide soit seulement fonction de la pression.

$$\rho = \varphi(p)$$

Lemme : Considérons une certaine fonction $f(x, y, z, t)$.

Soit m (x, y, z) une molécule à l'époque t, f la fonction correspondante ; au temps $t + dt$, m est en m_1 dont les coordonnées sont $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$; f est devenu $f + \delta f$.

δf est une différentielle totale, c'est :

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z$$

ou en remplaçant δx, δy, δz par leur valeur :

$$\delta x = u\,dt \qquad \delta y = v\,dt \qquad \delta z = w\,dt$$

il vient $\dfrac{\delta f}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + u\dfrac{\partial f}{\partial x} + v\dfrac{\partial f}{\partial y} + w\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

En particulier nous aurons la formule

$$\frac{\delta A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} + u\frac{\partial A}{\partial x} + v\frac{\partial A}{\partial y} + w\frac{\partial A}{\partial z}$$

Si on applique cette même formule à la densité ρ, nous avons :

$$\frac{\delta \rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

Ce qu'on peut écrire : $\dfrac{\delta \rho}{dt} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \sum u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$.

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

Ou encore $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \sum u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\sum\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

C'est-à-dire $\dfrac{\delta \rho}{dt} + \rho\sum\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

d'où $\sum\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\delta \rho}{\rho . dt}$

ou $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{\delta \rho}{\rho . \partial t}$.

C'est une nouvelle forme de l'équation de continuité.

Nous allons de la même manière mettre sous une forme nouvelle les 3 autres équations de l'hydrodynamique.

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X$$

Nous avons posé $T = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)$

d'où $\dfrac{\partial T}{\partial x} = u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v.\dfrac{\partial v}{\partial x} + w\dfrac{\partial w}{\partial x}$

L'équation ci-dessus peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial T}{\partial x}+v\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+w\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=X=\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial T}{\partial x}+vC-wB=\frac{\partial U}{\partial x}$$

C'est la première équation de l'hydrodynamique que nous allons encore simplifier en posant :

$$F=U-T-\int\frac{dp}{\rho}\quad .$$

$\int\frac{dp}{\rho}$ est parfaitement déterminé ; $\frac{dp}{\rho}$ est une différentielle exacte parce que nous avons supposé que ρ ne dépend que de p et l'équation devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+vC-wB=\frac{\partial F}{\partial x}$$

C'est la nouvelle forme de la première équation de l'hydrodynamique, les autres se déduisent par permutation circulaires.

$$\frac{\partial v}{\partial t}+wA-uC=\frac{\partial F}{\partial y}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+uB-vA=\frac{\partial F}{\partial z}$$

Faisons immédiatement quelques applications au théorème de Bernoulli ; supposons donc le mouvement permanent :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0\qquad\frac{\partial v}{\partial t}=0\qquad\frac{\partial w}{\partial t}=0$$

S'il y a une fonction des vitesses, A, B, C, sont nuls, les premiers membres disparaissent et il reste :

$$F=C^{te}.$$

C'est le théorème de Bernoulli.

Supposons qu'il n'y ait pas de fonction des vitesses, $A\ B\ C$ ne sont pas nuls, nous allons voir que la fonction F est la même tout le long d'un même filet.

Les équations d'un filet sont : $\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$

Pour avoir l'accroissement de F quand on suit un filet, multiplions respectivement les trois équations de l'hydrodynamique par u, v, w et ajoutons nous avons.

$$u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

Ou en vertu des équations du filet :

$$dx\frac{\partial F}{\partial x}+dy\frac{\partial F}{\partial y}+dz\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

$dF=0$ pour tous les points d'un même filet, F est constant

F est encore constant tout le long d'une ligne de tourbillons.

Ajoutons en effet les trois équations de l'hydrodynamique après avoir multipliée la première par A, la seconde par B la troisième par C, il vient

$$A\frac{\partial F}{\partial x} + B\frac{\partial F}{\partial y} + C\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Mais les équations d'une ligne de tourbillon sont :

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}$$

On a donc $dx\dfrac{\partial F}{\partial x} + dy\dfrac{\partial F}{\partial y} + dz\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$

Équation qui exprime que tout le long d'une ligne de tourbillon F a la même valeur.

Supposons maintenant le mouvement non permanent. Nous allons calculer

$$\frac{\delta A}{dt}$$

Écrivons d'abord l'équation identique :

$$uA - uA = 0$$

$$\text{puis } -\frac{\partial w}{\partial t} + vA - uB = -\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\text{et } \frac{\partial v}{\partial t} + wA - uC = \frac{\partial F}{\partial y}$$

qui sont la 3^e^ et la 2^e^ des équations de l'hydrodynamique.

Différentions la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, la 3^e^ par rapport à z et ajoutons, nous aurons une relation indépendante de F.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z.\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial y.\partial t} + \left(u\frac{\partial A}{\partial x} + v\frac{\partial A}{\partial y} + w\frac{\partial A}{\partial z}\right) + A\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z}\right) - u\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) = 0$$

Équation qui se simplifie, nous avons en effet :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z.\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial y.\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\text{puis } \frac{\partial A}{\partial t} + u\frac{\partial A}{\partial x} + v\frac{\partial A}{\partial y} + w\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\delta A}{dt}$$

$$A\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\delta \rho}{\rho.dt}$$ en vertu de l'équation de continuité

$$\text{enfin } \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

L'équation simplifiée s'écrit alors :

$$\frac{\delta A}{\partial t} - A.\frac{\delta \rho}{\rho.dt} = A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z}$$

Divisant par ρ il vient : $\dfrac{1}{dt}\left(\dfrac{\rho\delta A - A\delta\rho}{\rho^2}\right) = \dfrac{A}{\rho}.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{B}{\rho}.\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{C}{\rho}.\dfrac{\partial u}{\partial z}$

ou $$\frac{\delta\left(\frac{A}{\rho}\right)}{dt} = \frac{A}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{B}{\rho}\, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{C}{\rho}\, \frac{\partial u}{\partial z}.$$

C'est de cette équation que nous allons déduire le théorème de Helmoltz précédemment énoncé.

Considérons deux molécules m et m' situées sur une même ligne de tourbillon à l'instant t, soient x, y, z les coordonnées de la molécule m ; $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$, celles de m' infiniment voisine de m ; ξ, η, ζ sont des quantités infiniment petites projections de $m\,m'$ sur les axes.

m' $\quad m'_1$ $\quad m$ et m' étant deux points infiniment voisins d'une même ligne de tourbillon, nous avons :

$m \quad m_1 \qquad \dfrac{\xi}{A} = \dfrac{\eta}{B} = \dfrac{\zeta}{C}$. $\qquad$ Posons : $\dfrac{\xi}{A} = \ldots = \dfrac{\varepsilon}{\rho}$.

Cela donne : $\xi = A\dfrac{\varepsilon}{\rho}$, $\eta = B\dfrac{\varepsilon}{\rho}$, $\zeta = C\dfrac{\varepsilon}{\rho}$

La distance $m\,m'$ est alors $(H)\dfrac{\varepsilon}{\rho}$. (H) représentant le tourbillon.

Au bout du temps infiniment petit dt, m sera en m_1 et m' en m'_1 ; m_1 aura pour coordonnées $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ $\;m'_1$ aura pour coordonnées

$$x + \xi + \delta x + \delta \xi$$
$$y + \eta + \delta y + \delta \eta$$
$$z + \zeta + \delta z + \delta \zeta$$

Il faut trouver $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$.

Nous avons $\delta x = dt \cdot u$

Lorsqu'on passe de m à m', u varie avec x, y, z ; t reste le même u, devient :

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta$$

et on a $$\delta x + \delta\xi = dt\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta\right)$$

d'où $$\frac{\delta\xi}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta.$$

ou encore $$\frac{\delta\xi}{dt} = \varepsilon\left(\frac{A}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{B}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{C}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\varepsilon\,\delta}{dt}\left(\frac{A}{\rho}\right)$$

$$\delta\xi = \varepsilon\,\delta\left(\frac{A}{\rho}\right)$$

En passant de l'époque t à l'époque $t + dt$, $\dfrac{A}{\rho}$ est devenu $\dfrac{A}{\rho} + \delta\left(\dfrac{A}{\rho}\right)$ et ξ est devenu $\xi + \delta\xi$.

et nous avons encore : $\xi + \delta\xi = \varepsilon\left[\dfrac{A}{\rho} + \delta\left(\dfrac{A}{\rho}\right)\right]$

Le rapport de ξ à $\dfrac{A}{\rho}$ est donc constant et égal à ε. Il en est de même pour η et ζ.

Donc ξ, η, ζ sont toujours proportionnels aux projections de l'axe de tourbillon sur les trois axes, et les deux molécules sont constamment sur une même ligne de tourbillon.

De plus nous avons vu $mm' = (H) \cdot \frac{\varepsilon}{\rho}$

Ceci montre que la distance des molécules reste proportionnelle au tourbillon et inversement proportionnelle à la densité du fluide.

Ce théorème peut être considéré comme une généralisation du théorème de Lagrange. Nous allons retrouver ce dernier.

Supposons qu'il y ait une fonction des vitesses à l'origine des temps, alors

$$A = B = C = 0$$

Les équations $\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}$ sont indéterminées

Une ligne quelconque est une ligne de tourbillon.

Toutes les molécules qui sont à l'origine sur une ligne quelconque qui est une ligne de tourbillon seront à un instant quelconque sur une même ligne de tourbillon; une ligne quelconque est donc toujours une ligne de tourbillon. Les équations seront indéterminées, on aura donc par suite à cet instant quelconque

$$A = 0 \qquad B = 0 \qquad C = 0$$

c'est à dire qu'il y aura une fonction des vitesses. C'est le théorème de Lagrange.

21e Leçon.

Nous avons posé:

$$A = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$B = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$C = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

A, B, C sont les composantes du tourbillon, il est représenté en grandeur et en direction par une droite dont les projections sur les axes sont A, B, C et il a pour valeurs

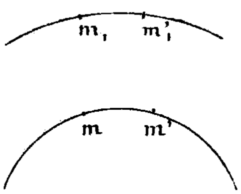
$$(H) = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Une ligne de tourbillon est une ligne dont la tangente en chaque point est l'axe du tourbillon correspondant; ses équations différentielles sont:

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}$$

Nous avons démontré le Théorème de Helmholtz.

Si deux molécules appartiennent à un instant donné à une ligne de tourbillon ; elles seront toujours sur une même ligne de tourbillon.



Considérons deux molécules m et m' infiniment voisines, la droite $m\,m'$ est la tangente en m, c'est l'axe du tourbillon.

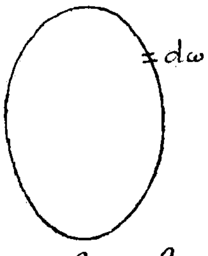
A un autre moment les points m et m' seront en m_1, m'_1, $m_1 m'_1$ sera parallèle à l'axe du tourbillon.

Nous avons vu que $m\,m' = \varepsilon \dfrac{(H)}{\rho}$

où ε est une constante

Enfin que l'on a : $\dfrac{\partial A}{\partial x} + \dfrac{\partial B}{\partial y} + \dfrac{\partial C}{\partial z} = 0$

Cette équation peut être mise sous une forme différente.



Considérons une surface fermée quelconque et un élément $d\omega$ de cette surface.

Soit (H) le tourbillon correspondant à $d\omega$, il fait avec la normale à l'élément un angle φ, nous allons démontrer que l'intégrale $\int (H) \cos\varphi \, d\omega$ étendue à tous les éléments de la surface fermée est nulle.

$(H)\cos\varphi$ c'est la projection du tourbillon correspondant à l'élément $d\omega$ sur la normale à cet élément ;

$$(H)\cos\varphi = A\alpha + B\beta + C\gamma,$$

α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale

Nous avons donc $\int (H) \cos\varphi \, d\omega = \int (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, d\omega$

or $\int A\alpha \, d\omega = \int \dfrac{\partial A}{\partial x} \, d\sigma$,

$d\sigma$ désignant un élément quelconque du volume intérieur à la surface d'après un théorème établi, et plusieurs fois déjà appliqué.

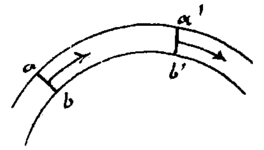
Alors $\int (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, d\omega = \int \left(\dfrac{\partial A}{\partial x} + \dfrac{\partial B}{\partial y} + \dfrac{\partial C}{\partial z} \right) d\sigma = 0$

Donc : $\int (H) \cos\varphi \, d\omega = 0$

Faisceau de lignes de tourbillon. — Considérons un élément de surface quelconque $d\omega$, par chacun des points de cet élément on peut faire passer une ligne de tourbillon, cet ensemble constitue un faisceau.

Toutes les molécules qui à un instant donné font partie d'un même faisceau feront toujours partie d'un même faisceau.

Moment d'un faisceau. — Considérons un faisceau et coupons le



par un plan normal, nous aurons une section infiniment petite $a\,b$, soit $d\omega$.

Soit (H) le tourbillon au centre de gravité de $a\,b$; le produit $(H)\,d\omega$ est par définition le moment du faisceau.

Ce moment est une constante à deux points de vue :

1° Il est le même en tous les points d'un même faisceau. Considérons une seconde section normale $a'\,b'$, soit $d\omega'$ cette section, et $(H)'$ le tourbillon en son centre de gravité.

Nous avons $(H)\,d\omega = (H)'\,d\omega'$

Pour le démontrer appliquons le théorème $\int (H) \cos\varphi \, d\omega = 0$ à la surface fermée $a\,a'\,b\,b'$, limitée par le faisceau et les deux sections droites.

Pour les éléments de la surface latérale l'intégrale est nulle. Considérons en effet un point quelconque de la surface du faisceau, formée de lignes de tourbillon. Le plan tangent en ce point contient la tangente à la ligne de tourbillon passant par ce point, par conséquent la projection du tourbillon sur la normale est nulle ; $(H) \cos\varphi = 0$

Pour $a\,b$, et pour $a'\,b'$ le tourbillon est normal à l'élément, pour l'un on aura $\cos\varphi = 1$ et pour l'autre $\cos\varphi = -1$. On aura donc :

$$\int \left((H)\,d\omega - (H)'\,d\omega' \right) = 0$$

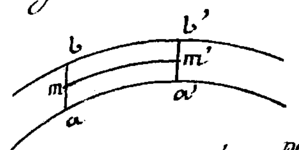
quels que soient les éléments considérés.

Il faut donc que l'on ait $(H)\,d\omega - (H)'\,d\omega' = 0$

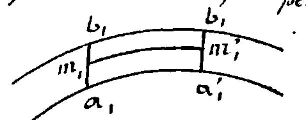
ou $(H)\,d\omega = (H)'\,d\omega'$. C.Q.F.D.

2° Il est le même quelle que soit l'époque à laquelle on le considère.

Considérons un faisceau F, une ligne de tourbillon dessus et sur cette ligne deux molécules infiniment voisines m et m'.



Par m et m' menons deux plans parallèles qui déterminent deux sections infiniment petites $a\,b$, $a'\,b'$; le volume infiniment petit $a\,b$, $a'\,b'$ peut être assimilé à un cylindre oblique ; car les arcs infiniment petits tels que $m\,m'$ peuvent être considérés comme rectilignes.



Au bout d'un temps quelconque, F sera en F_1, les points m et m' seront en m_1 et m'_1 et les molécules qui occupaient le volume $a\,b$, $a'\,b'$, occuperont alors le volume $a_1\,b_1$, $a'_1\,b'_1$.

Les surfaces $a_1\,b_1$, $a'_1\,b'_1$ ne seront pas restées rigoureusement planes, mais comme elles sont infiniment petites on peut les considérer comme planes, et parallèles car leur angle est infiniment petit.

Le volume $a_1\,b_1$, $a'_1\,b'_1$ pourra alors aussi être assimilé à un cylindre oblique.

Écrivons que la masse qui remplit ce volume est constante. Le volume du petit cylindre, c'est : $m\,m'.d\omega$, en appelant $d\omega$ la section droite, sa masse sera $\rho\, m\, m'.d\omega$. Écrivons qu'elle est constante cela donne :

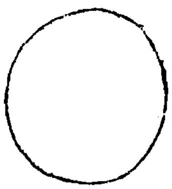
$$\rho .\, m\, m'.d\omega = C^{te}$$

comme $m\,m' = \varepsilon \frac{(H)}{\rho}$ et $\varepsilon = C^{te}$

Nous avons $(H)\,d\omega = C^{te}$ C.Q.F.D.

On a rendu visibles ces faisceaux avec des fumées. Les couronnes d'hydrogène phosphoré ne sont autre chose que des faisceaux de lignes de tourbillon. Elles se disposent en sortes de tores dont les points tournent autour du lieu des centres des sections méridiennes.

Applications. —— Considérons un liquide enfermé dans un vase qu'il remplit complètement : Si l'on se donne à un instant quelconque les valeurs des trois fonctions A, B, C je dis que les valeurs de u, v, w sont déterminées. Supposons qu'on ait deux systèmes de valeurs (u, v, w) (u_1, v_1, w_1) correspondant à un même système A, B, C.



Nous aurons alors : $A = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}$ puis $A = \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial y}$

Retranchons membre à membre cela donne :

$$\frac{\partial (v - v_1)}{\partial z} = \frac{\partial (w - w_1)}{\partial y}$$

en considérant B et C nous aurons deux autres relations analogues :

$$\frac{\partial (w - w_1)}{\partial x} = \frac{\partial (u - u_1)}{\partial z} \qquad \frac{\partial (u - u_1)}{\partial y} = \frac{\partial (v - v_1)}{\partial x}$$

Équation qui signifie que l'on a :

$$(u - u_1)\,dx + (v - v_1)\,dy + (w - w_1)\,dz = d\varphi \quad \text{. différentielle exacte.}$$

Alors
$$u = u_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
$$v = v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$
$$w = w_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Nous allons démontrer que l'on a $\varphi = 0$

Le fluide étant incompressible nous avons pour l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{et aussi} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$

Retranchons membre à membre il vient :

$$\frac{\partial (u - u_1)}{\partial x} + \frac{\partial (v - v_1)}{\partial y} + \frac{\partial (w - w_1)}{\partial z} = 0$$

ou
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

C'est à dire $\Delta \varphi = 0$

D'ailleurs la vitesse en un point quelconque de la paroi du vase est dans le plan tangent ce qui s'exprime par l'équation : $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

En appelant $\alpha\,\beta\,\gamma$ les cosinus directeurs de la normale à la surface nous aurons de même $\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0$. Retranchons membre à membre, il vient : $\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$

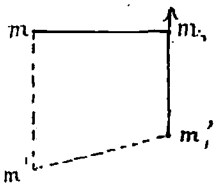
ou $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ en tous les points de la paroi.

Or on sait d'après le théorème de Green que toute fonction qui satisfait à ces conditions $\Delta \varphi = 0$ et $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ est identiquement nulle.

Donc $\varphi = 0$ identiquement

et on a $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$,

Supposons qu'à l'origine des temps on connaisse u, v, w, on en déduira immédiatement $A B C$. Considérons alors une molécule quelconque et une molécule infiniment voisine sur la même ligne de tourbillon. Connaissant u, v, w nous connaissons



la position m_1 de m au bout du temps dt, de même nous connaissons au bout du même temps la position m'_1 de m'. Ceci nous donne en $m_1 m'_1$ la nouvelle direction du tourbillon au point m_1, sa grandeur est donnée par la relation : $m_1 m'_1 = \varepsilon \frac{H}{\rho}$.

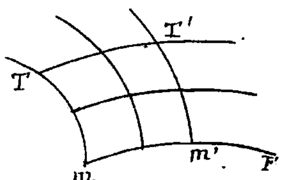
On connaît donc le tourbillon en m_1 en grandeur et direction, c'est-à-dire A, B, C.

Donc si on connaît u, v, w au temps t, on connaît également A, B, C au temps $t + dt$, et par suite d'après ce qui a été démontré, les valeurs de u, v, w à l'instant $t + dt$.

Ce qui montre que si on connaît u, v, w à l'origine des temps, on les connaît à un instant quelconque. Donc si on considère un liquide parfait enfermé dans un vase qu'il remplit complètement, le mouvement ne dépend que de la vitesse initiale, et pas des forces extérieures. Il en est encore de même si un liquide parfait remplit un espace indéfini et de telle façon que la vitesse soit nulle à l'infini.

Ce théorème est soumis aux mêmes restrictions que le théorème de Helmholtz : il faut qu'il y ait une fonction des forces.

Cas du mouvement permanent. —— Considérons un point m ; par ce point passe un filet F et une ligne de tourbillon T.



Par les différents points de F menons des lignes de tourbillon, et par ceux de T des filets, nous obtenons ainsi en apparence deux surfaces : ces deux surfaces coïncident.

En effet au bout d'un temps t les molécules qui étaient sur la ligne de tourbillon T sont sur la ligne de tourbillon T' qui passe par m' nouvelle position de m, ce qui prouve que tout filet qui rencontre T rencontre aussi T'.

Donc les lignes de tourbillon qui rencontrent le filet F rencontrent tous les filets qui rencontrent la ligne de tourbillon T.

Nous avons vu d'ailleurs que le théorème de Bernouilli s'applique tout le long d'un même filet et d'une même ligne de tourbillon.

$F = C^{te}$ c'est l'énoncé du théorème, et on a $F = \int \frac{dp}{\rho} - T - V$

$F = C^{te}$ est alors l'équation d'une certaine surface qui doit être engendrée par un système de lignes de tourbillon ; c'est aussi l'équation d'une certaine surface engendrée par un système de filets. – Or la fonction F a même valeur tout le long du filet F, elle a aussi la même valeur tout le long de la ligne de tourbillon T, et cette valeur est la même pour le filet F' et la ligne de tourbillon T', puisque ces deux lignes ont un point commun m.

Donc les deux surfaces $F = C^{te}$ coïncident.

Cas particulier. – Considérons un liquide pesant enfermé dans un vase dont la forme est une figure de révolution ; ce liquide sera animé d'un mouvement permanent et les filets seront des circonférences horizontales ayant leur centre sur l'axe oz du vase. La conséquence de ces hypothèses est que en un point quelconque chaque molécule décrit d'un mouvement uniforme une circonférence ayant son centre sur oz. La vitesse ω étant la même tout le long d'un même filet, ne dépend que du z du point considéré et de r.

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Nous allons voir que le mouvement permanent n'est possible que si ω est indépendant de z. – Pour cela reprenons les équations de l'hydrodynamique ; nous les avons déduites de celles de l'hydrostatique :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = X \qquad \frac{-1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = Y \qquad \frac{-1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = Z .$$

Il faut introduire les forces d'inertie ; $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$

Les molécules sont animées d'un mouvement circulaire uniforme, l'accélération se réduit à l'accélération centripète et la force d'inertie est la force centrifuge, ses composantes sont : $\omega^2 x \quad \omega^2 y \quad o$

les forces extérieures ont pour composantes o, o, g.

Les équations de l'hydrodynamique se réduisent alors à :

$$\frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \omega^2 x \qquad \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \omega^2 y \qquad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g$$

Multiplions la première par dx, la 2e par dy la 3e par dz et ajoutons, nous avons ρ étant constant : $\frac{dp}{\rho} = \omega^2 x\, dx + \omega^2 y\, dy + g\, dz$.

Le 1er membre est une différentielle exacte, donc le second est aussi une différentielle exacte, et on a $\frac{\partial (\omega^2 x)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial x}$ d'où $\frac{\partial \omega}{\partial z} = o$

ω est indépendant de z. Le mouvement permanent n'est donc possible que si la vitesse de rotation est la même tout le long d'une même verticale.

ω ne dépend donc que de r, supposons qu'on le connaisse en fonction de r on a $x\,dx + y\,dy = r\,dr$.

L'équation précédente donne : $\frac{p}{\rho} = \int \omega^2 r\,dr + gz + C^{te}$.

En un point quelconque de la surface libre la pression est constante et égale à la pression atmosphérique. Pour tous ces points, on a :

$$\int \omega^2 r\,dr + gz = \text{Constante}.$$

Quand on connaît $\int \omega^2 r\,dr = \Phi(r)$ cette équation donne la forme de la surface libre. Cherchons les lignes de tourbillon c'est-à-dire A, B, C.

$$u = \omega y \qquad v = -\omega x \qquad w = 0$$

alors $A = 0 \quad B = 0 \qquad C = 2\omega + x\frac{d\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy}$

$$\text{ou} \quad C = 2\omega + r\frac{d\omega}{dr}$$

On voit immédiatement que le tourbillon est parallèle à Oz, par conséquent les lignes de tourbillon sont des verticales.

La vitesse de rotation étant la même tout le long d'une verticale les molécules sont entraînées comme si elles appartenaient à un corps solide.

Supposons en particulier qu'on considère un cylindre de révolution vertical ayant pour axe Oz et pour rayon a. Le tourbillon ne dépend que de r. Je suppose qu'en tous les points intérieurs $C = C^{te} = C_0$ et en tous les points extérieurs $r > a$ $C = 0$. Déterminons ω. Nous avons :

$$C_0 = 2\omega + r\frac{d\omega}{dr}$$

C_0 est constant on satisfera à cette condition en prenant ω constant $\omega = \frac{C_0}{2}$

A l'extérieur on devra avoir

$$0 = 2\omega + r\frac{d\omega}{dr}$$

$$\text{ou} \quad \frac{d\omega}{\omega} = -2\frac{dr}{r}$$

$$\text{d'où} \quad \text{Log}\,\omega = -2\,\text{Log}\,r + \text{Log}.\,K$$

$$\omega = \frac{K}{r^2}$$

Les deux formules devant concorder pour $r = a$ on aura $K = \frac{C_0 a^2}{2}$.

22e Leçon.

Nous avons considéré un liquide parfait enfermé dans un vase qu'il remplit complètement et nous avons vu que la connaissance des quantités $A B C$, suffit pour permettre de déterminer u, v, w, et la connaissance de u, v, w permettent de déterminer A, B, C à un instant postérieur. Nous avons :

$$A = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}$$
$$B = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$C = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

A ces équations il faut joindre l'équation de continuité, qui devient dans le cas du liquide :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Il en est encore de même si l'on considère un liquide parfait remplissant un espace indéfini dans tous les sens, la vitesse du liquide étant nulle à l'infini.

La connaissance de A, B, C°, u, v, w à l'origine des temps suffit pour déterminer ces mêmes quantités à un instant quelconque et aussi la connaissance de A, B, C à l'origine permet de déterminer u, v, w à l'origine.

Nous avons vu que ce double problème est déterminé ; il reste maintenant à le résoudre, au moins dans des cas particuliers.

Supposons d'abord que le liquide remplisse un espace indéfini dans les trois sens, et que sa vitesse soit nulle à l'infini.

Supposons de plus u et v indépendants de z et $w = 0$

D'après ces hypothèses la vitesse d'un point quelconque est parallèle au plan des xy ; les vitesses de tous les points d'une verticale sont égales et parallèles. La trajectoire d'un point quelconque est donc dans un plan horizontal.

Deux points situés sur une même verticale à l'origine des temps seront toujours sur une même verticale.

Nous avons dans ce cas $A = B = 0$

En effet $\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ car u et v sont indépendants de z

$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ puisque $w = 0$

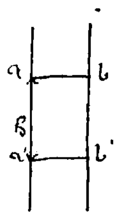
il reste $C = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$

et l'équation de continuité qui s'écrit : $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ (1)

Ces deux équations suffisent pour déterminer u et v, connaissant C°.

Les composantes A et B du tourbillon étant nulles, le tourbillon se réduit à sa composante verticale et l'on a : $C = (H)$

Les lignes de tourbillon sont des parallèles à Oz, les faisceaux de lignes de tourbillon seront des cylindres ayant leurs génératrices verticales.



Le moment d'un faisceau (H) $d\omega$ est constant, ici c'est $C\,d\omega$.

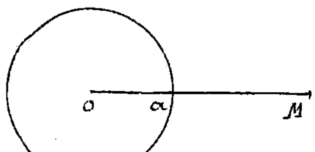
Nous allons voir que dans le cas actuel les deux facteurs sont constants.

Je coupe en effet le faisceau par deux plans horizontaux, j'ai un cylindre limité à deux sections droites, soit h sa hauteur, le volume du cylindre est $h\,d\omega$. h est constant en effet un point quelconque reste toujours dans un plan horizontal, la distance verticale des deux bases reste donc constante ; de plus, le liquide étant incompressible le volume est constant donc $h.d\omega$ est constant et par suite $d\omega$ est aussi constant.

$d\omega$ étant constant ainsi que $C\,d\omega$, il en résulte que C est constant.

Il s'agit maintenant de déterminer u et v à l'aide des équations (1)

Nous avons déjà résolu ce problème dans un cas particulier à la fin de la dernière leçon.



Nous avons considéré un cylindre de révolution de rayon a, et un point M, soit r sa distance à l'axe du cylindre qui est oz

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Pour les points intérieurs au cylindre, $r < a$ nous avons supposé $C = C_0$

——" —— extérieurs ——" —— $r > a$ ——" —— $C = 0$

Ce cylindre peut être considéré comme un faisceau de sections finie et son moment est $\pi a^2 C_0$.

Dans cette hypothèse nous avons déterminé la vitesse d'un point quelconque du plan, et par suite de l'espace puisque la vitesse est la même en tous les points d'une parallèle à l'axe des z.

Considérons donc cette vitesse ; nous avons vu qu'elle est la même que si le corps était animé d'un mouvement de rotation avec une vitesse angulaire

$$\omega \qquad u = \omega y \qquad v = -\omega x$$

On a trouvé à l'intérieur du cylindre, $\omega = \dfrac{C_0}{2}$

et à l'extérieur $\omega = \dfrac{K}{r^2}$

La vitesse angulaire d'un point extérieur au cylindre est en raison inverse du carré de sa distance à l'axe.

Pour $r = a$ c'est-à-dire pour les points du cylindre les deux valeurs de ω doivent être les mêmes, donc on a : $K = \dfrac{C_0 a^2}{2}$

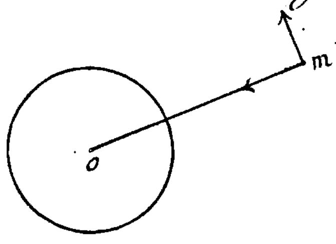
Conséquences. —— A l'extérieur du cylindre il n'y a pas de tourbillons alors A, B, C, sont nuls, et par suite il y a une fonction des vitesses.

Formons cette fonction φ, $d\varphi = u\,dx + v\,dy = \omega(y\,dx - x\,dy)$

ou $d\varphi = K\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ D'où $\varphi = K \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$.

Cette fonction n'est pas uniforme elle n'est donc parfaitement déterminée, car l'arc tang. est susceptible d'une infinité de valeurs. Si donc on prenait l'intégrale $\int (u\,dx + v\,dy)$ le long d'un contour fermé, il pourrait se faire que l'intégrale fût nulle, c'est ce qui arriverait si le contour d'intégration n'entourait pas le cylindre. Au contraire si le contour d'intégration entourait le cylindre l'intégrale $\int (u\,dx + v\,dy)$ serait égale à $2K\pi$.

Autre règle pour trouver la vitesse du point M situé à l'extérieur du cylindre.

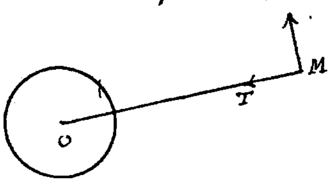


Nous avons un mouvement de rotation autour de l'axe du cylindre, la vitesse d'un point M est perpendiculaire à OM et égale en grandeur à ωr ou $\frac{K}{r}$ ou encore $\frac{C_0 a^2}{2r}$, elle est en raison inverse de la distance.

Imaginons maintenant le cylindre rempli de matière attirante de densité δ ; nous savons déterminer l'attraction en raison inverse de la distance de ce cylindre de révolution sur le point M ; elle est dirigée suivant M_o en raison inverse de r, et indépendante du rayon du cylindre, son expression est

$$\frac{2\pi a^2 \delta}{2r}$$

Ce sera précisément la même expression que celle de la vitesse ci-dessus si $\delta = \frac{C_0}{4\pi}$. Supposons donc qu'il en est ainsi, nous sommes conduits à la règle suivante, pour construire la vitesse du point M

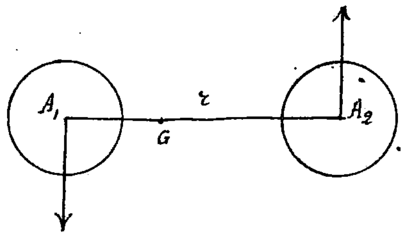


Règle.– On supposera le cylindre rempli de matière attirante de densité $\frac{C_0}{4\pi}$, on construira l'attraction de cette masse sur M on la fera tourner de $90°$ vers la gauche et on aura la vitesse de M en grandeur et en direction.

Ce résultat est vrai quelque soit a, par conséquent il est encore vrai si a devient infiniment petit ; on peut donc appliquer cette règle à un faisceau infiniment petit quelconque ; ce faisceau se réduit à une droite, on peut alors considérer sa section comme ayant une forme quelconque.

Cette règle s'applique encore au cas général

Nous pouvons en effet décomposer un faisceau quelconque en une infinité de faisceaux infiniment petits. Ces faisceaux sont cylindriques, la valeur de C sera la même tout le long de chaque faisceau élémentaire, mais elle pourra varier d'un faisceau à l'autre. Imaginons que ces cylindres soient remplis de matière attirante de densité $\frac{C}{4\pi}$. Construisons l'attraction de cette matière attirante sur le point m ; nous aurons la vitesse de ce même point m en faisant tourner de 90° l'attraction ainsi obtenue.



Considérons d'abord deux faisceaux infiniment petits et de sections circulaires, soient A_1 et A_2 les centres de ces sections, ω_1 et ω_2 les sections, C_1 et C_2 les valeurs de tourbillons, m_1 et m_2 leurs moments.

Nous avons $m_1 = C_1\,\omega_1$, $m_2 = C_2\,\omega_2$

Si le premier faisceau n'existait pas, la vitesse du point A_2 serait nulle ; sa vitesse vitesse se réduit donc à celle qui est due à l'existence du premier faisceau.

Soit $r = A_1A_2$ Appliquons la règle.

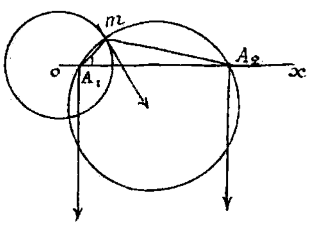
L'attraction du premier faisceau sur A_2 est $\dfrac{m_1}{2\pi r}$

La vitesse du point A_2 sera donc égale à $\dfrac{m_1}{2\pi r}$ et dirigée suivant la perpendiculaire à la droite A_1A_2

Pour la même raison la vitesse de A_1 sera perpendiculaire à A_1A_2 et égale à $\dfrac{m_2}{2\pi r}$. A chaque instant les vitesses des deux faisceaux sont perpendiculaires à la droite qui joint leurs centres.

Considérons le point G qui partage A_1A_2 en raison inverse des moments m_1 et m_2 ; en supposant chacun des deux faisceaux A_1 et A_2 affecté d'une masse proportionnelle à son moment, le point G sera le centre de gravité de ces deux faisceaux. Il est aisé de constater que sa vitesse sera nulle. — En effet pour avoir la vitesse du point G il faut composer les vitesses de A_1 et A_2 après avoir multiplié la 1ère par m_1, la 2e par m_2 ; ces vitesses étant parallèles et directement opposées, on trouve ainsi zéro. — Donc le point G est fixe. Les vitesses des points A_1 et A_2 sont constamment perpendiculaires à A_1G, A_2G, les droites A_1G, A_2G sont donc les normales aux trajectoires des points A_1 et A_2, et comme elles passent par un point fixe, les trajectoires sont donc des cercles ayant leur centre en G.

Ceci permet, connaissant la position de deux faisceaux à l'origine des temps de connaître leurs positions à un instant quelconque. Un cas particulier intéressant est celui où les moments m_1 et m_2 sont égaux et de signes contraires. Les deux vitesses sont dans le même sens et égales entre elles, le système A_1A_2 va se déplacer d'un mouvement de translation perpendiculaire à A_1A_2.



Il y a dans ce cas une propriété remarquable. Déterminons la direction de la vitesse d'un point M quelconque ; nous allons démontrer qu'elle est tangente à la circonférence lieu des points tels que le rapport $\dfrac{MA_1}{MA_2}$ est constant.

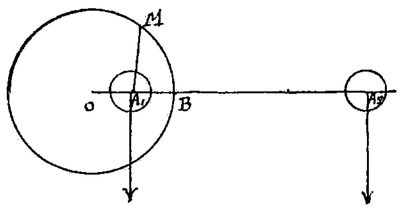
Considérons en effet la circonférence déterminée par les trois points A_1, M, A_2; elle est orthogonale à la première. La vitesse du point M lui est normale. Pour le faire voir il suffit de montrer que la fonction des vitesses est constante tout le long de cette circonférence, or la fonction des vitesses est la somme des fonctions des vitesses dues aux faisceaux A_1 et A_2.

La fonction φ c'est $K \text{ arc tg. } \frac{y}{x}$

Pour la vitesse due au faisceau A_1, la fonction sera $K\, \widehat{M A_1 A_2}$

Pour la vitesse due au faisceau A_2, la fonction sera $-K\,.\, \widehat{M A_2 x}$. La somme est $-K x$ (angle M)

Or tout le long de l'arc de cercle $A_1 M A_2$ l'angle M est constant donc la fonction des vitesses est constante tout le long de cet arc de cercle; or la vitesse est constamment normale à la courbe $\varphi = C^{te}$. Donc elle est normale à la circonférence $A_1 M A_2$ et par suite tangente à la première. Nous avons supposé jusqu'ici que le liquide remplit un espace indéfini, nous allons supposer maintenant qu'il remplit un vase de dimensions finies, circulaire, ayant pour axe l'axe des z.



Supposons que dans ce vase existe un faisceau de tourbillon A infiniment délié ayant pour section ω et égal à C. Le moment du faisceau infiniment mince est $C\omega$. Déterminons la vitesse d'un point quelconque du liquide contenu à l'intérieur du vase, il faut que C soit nul pour les points extérieurs au faisceau, constant à l'intérieur du faisceau A et qu'en un point de la paroi du vase la vitesse soit tangente à la paroi.

Soit $OB = a$ le rayon du vase

Joignons OA_1, et soit A_2 un point situé sur OA de telle sorte que

$$OA_1 \times OA_2 = a^2$$

tous les points de la circonférence de rayon OB sont tels que le rapport de leurs distance aux points A_1 et A_2 est constant $\frac{MA_1}{MA_2} = C^{te}$.

Imaginons que le liquide s'étende encore au dehors du vase et qu'on ait un 2e faisceau de moment égal et contraire à celui de A_1, et que ce faisceau soit A_2 et de plus qu'en dehors de ces points il y a une fonction des vitesses.

Le théorème qui précède nous montre que la vitesse du point M est tangente à la circonférence OB. Donc si on a un seul tourbillon à l'intérieur d'un vase ayant la forme d'un cylindre de révolution, tout se passe comme si le liquide s'étendait à l'infini et comme si on avait deux faisceaux de tourbillon, ces deux faisceaux ayant des moments égaux et de signes contraires.

Les vitesses des deux faisceaux sont alors perpendiculaires à $A_1 A_2$ et toutes les deux égales à $\frac{m}{2\pi r}$, m étant la valeur commune des moments, et r la distance $A_1 A_2$ si on désigne par d la distance OA_1 nous avons $r = \frac{a^2}{d} - d$.

Le faisceau A_1 est donc animé d'une vitesse perpendiculaire à OA_1, OA_1 est donc la normale à la trajectoire, et comme cette droite passe constamment par un point fixe O la trajectoire est une circonférence décrite de O comme centre d'un mouvement uniforme. Donc si dans un vase ayant la forme d'un cylindre de révolution on a un tourbillon unique de section infiniment petite, ce tourbillon tourne d'une manière uniforme autour de l'axe du vase. Revenons au cas du liquide indéfini : on peut résoudre le problème dans le cas de trois tourbillons, et à l'aide de quadratures trouver comment se comportent ces tourbillons à un instant quelconque. — Un autre cas particulier est celui où l'on a un faisceau de sections finies et elliptique à l'intérieur duquel C est constant. On démontre que ce faisceau tourne autour de son axe d'un mouvement uniforme. Pour avoir la vitesse d'un point quelconque du faisceau il n'y a qu'à appliquer les formules de l'attraction des ellipsoïdes et de faire tourner les attractions de 90°

Dans tout ce qui précède nous n'avons considéré que le cas où les faisceaux de lignes de tourbillon sont des cylindres verticaux $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, $W = 0$ et u et v indépendant de z.

Cas général. — Il s'agit de déterminer la vitesse d'un point quelconque de l'espace connaissant les lignes de tourbillon les faisceaux de lignes de tourbillon et leurs moments. On envisage d'abord le cas où on a un faisceau unique de section infiniment petite, le moment est donné et en dehors il y a une fonction des vitesses $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. — Nous obtiendrions la vitesse d'un point quelconque extérieur à ce tourbillon quand nous connaîtrons la fonction des vitesses, il faut la trouver. — Cette fonction φ satisfait d'abord à l'équation $\Delta \varphi = 0$, elle doit être finie et déterminée en tous les points de l'espace excepté sur le tourbillon où ses dérivées deviennent infinies. En partant de là il est aisé de démontrer que, en un point quelconque A de l'espace de coordonnées $x y z$ on obtient ainsi φ. On considère un cône de sommet A et ayant pour directrice le faisceau de lignes de tourbillon. On peut calculer l'angle solide au sommet de ce cône, c'est la portion de sphère de rayon 1 interceptée.

La fonction φ est alors $\varphi = K . M . S$.

K est une constante, M le mouvement du faisceau S l'angle solide au sommet du cône. C'est le cas où on a un faisceau unique. – S'il y a un nombre quelconque ou une infinité de faisceaux, on aura la vitesse d'un point quelconque en faisant la somme géométrique de toutes les vitesses partielles dues à tous les faisceaux élémentaires. – Cette règle est susceptible d'une interprétation physique remarquable. Considérons un courant fermé d'intensité i parcourant un fil ayant la même forme que le faisceau et l'intensité i étant :

$$i = c M$$

où c est une constante numérique, M le moment du faisceau

Imaginons un pôle magnétique, de masse 1, le courant exerce sur ce pôle une certaine attraction; il en résulte un potentiel V et les composantes de l'attraction sont $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$. V est proportionnel à i, c'est-à-dire à M et à l'angle solide sous lequel on voit le courant du point A.

Le potentiel V relatif à l'attraction de ce courant sur ce pôle magnétique est précisément égal à la fonction des vitesses φ.

Un cas particulier intéressant est celui d'un faisceau unique ayant la forme d'un tore infiniment délié, ayant pour axe Oz. On démontre que ce tore est animé d'un mouvement de translation parallèle à Oz.

23e Leçon.

Mouvement d'un corps solide plongé dans un liquide.

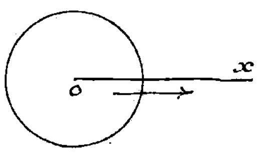
Considérons un liquide prolongé indéfiniment dans tous les sens, de densité 1.

Supposons qu'à l'origine des temps il y a une fonction φ des vitesses, alors

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi$$

différentielle exacte; si cela a lieu à l'origine des temps, cela a lieu à un instant quelconque.

Supposons que le corps solide plongé soit une sphère, et qu'elle soit animée d'un mouvement de translation, que nous supposerons parallèle à Ox.



Proposons-nous de déterminer la vitesse d'un point quelconque du liquide. La fonction des vitesses φ est déterminée par les 3 conditions suivantes:

1°. $\Delta\varphi = 0$ c'est l'équation de continuité.

2°. le liquide est en repos à l'infini, alors $\varphi = 0$ à l'infini

3°. c'est une condition relative à la vitesse du fluide à la surface de la sphère. Nous avons vu que dans le cas d'une paroi fixe, la composante normale à la paroi de la vitesse est nulle. Ici le corps solide étant en mouvement ce sera la composante normale de la vitesse relative du fluide par rapport au corps solide qui devra être nulle.

Or la vitesse relative est la différence géométrique de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement. Dire que la composante normale de la vitesse relative est nulle, c'est dire que la vitesse absolue et la vitesse d'entraînement ont même composante parallèle à cette direction.

Il faut donc exprimer qu'en tout point de la surface du corps solide les composantes normales à cette surface de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement sont égales.

Nous connaissons la composante normale de la vitesse d'entraînement soit N, on doit donc avoir $N = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$ à la surface du corps solide.

La fonction φ est donc soumise à ces trois conditions :

1°. $\Delta\varphi = 0$.

2°. $\varphi = 0$ à l'infini.

3°. $N = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$ à la surface du corps solide.

Ces trois conditions suffisent pour déterminer φ.

Considérons en effet deux fonctions φ et φ_1 satisfaisant à ces trois conditions, soit $\varphi - \varphi_1 = \psi$.

Nous avons $\Delta\varphi = 0$ et $\Delta\varphi_1 = 0$, donc $\Delta\psi = 0$;

à l'infini $\varphi = 0$ $\varphi_1 = 0$ donc $\psi = 0$

à la surface de la sphère $\frac{d\varphi}{dn} = N$ $\frac{d\varphi_1}{dn} = N$

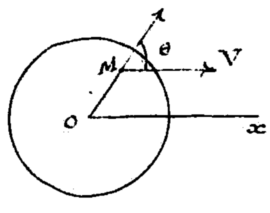
donc $\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0$ ou $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$.

Or on démontre à l'aide du théorème de Green que toute la fonction satisfaisant aux trois mêmes conditions que la fonction ψ est nulle.

Donc φ et φ_1 sont identiques.

Considérons donc une sphère qui se déplace parallèlement à ox avec une vitesse de translation V. Cherchons la fonction φ.

Pour déterminer φ, il faut déterminer N. Considérons un point M sur la sphère, et la normale en ce point dirigée vers l'extérieur, soit θ



l'angle que fait cette direction avec ox. La vitesse du point M est parallèle à ox et égale à V ; nous avons :

$$N = V \cos \theta$$

Soit r le rayon de la sphère, x, y, z les coordonnées du point M, nous avons :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\text{et } \cos \theta = \frac{x}{r}$$

Considérons maintenant un point quelconque de l'espace soit ρ sa distance au centre de la sphère, x, y, z ses coordonnées, nous avons :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Or on sait que $\frac{1}{\rho}$ considéré comme fonction de x, y, z satisfait à l'équation :

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta \varphi = 0$$

On sait de plus que si une fonction φ satisfait à l'équation $\Delta \varphi = 0$ elle satisfait encore à $\Delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0$

Donc $\frac{1}{\rho}$ satisfaisant à l'équation $\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$, nous avons encore :

$$\Delta \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial x} = 0$$

Or nous avons $x dx + y dx + z dz = \rho \, d\rho$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}$$

$$\text{par suite} \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho^2}\,\frac{x}{\rho} = -\frac{x}{\rho^3}$$

Nous aurons donc $\Delta\left(-\frac{x}{\rho^3}\right) = 0$ ou $\Delta\left(\frac{Ax}{\rho^3}\right) = 0$

A désignant une constante.

Nous allons poser $\varphi = \frac{Ax}{\rho^3}$

La première condition est remplie ; la seconde l'est aussi, car φ est nul pour un point à l'infini ; reste à déterminer A de façon que cette fonction satisfasse à la 3.e condition. Pour cela il faut calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$.

Or nous pouvons écrire $\varphi = \frac{A \cos \theta}{\rho^2}$

Si M se déplace sur la normale à la sphère, θ ne varie pas, ρ seul varie, alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \qquad \text{or} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -\frac{2A\cos\theta}{\rho^3}$$

à la surface de la sphère $\rho = r$; on a donc à la surface de la sphère :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{2A\cos\theta}{r^3}$$

cette expression est égale à N, c'est-à-dire à $V \cos \theta$

$$\text{on a donc} \quad -\frac{2A\cos\theta}{r^3} = V\cos\theta$$

$$\text{d'où} \quad A = -\frac{V r^3}{2}$$

alors $\varphi = -\dfrac{V r^3 \cos\theta}{\rho^2}$

Connaissant φ on connait la vitesse d'un point quelconque.

Cherchons quelle sera la résultante des actions du liquide sur la sphère

Considérons par exemple un liquide pesant, sa densité étant toujours égale à 1.

Le théorème de Bernouilli nous donne:

$$p = p_0 + g z - T - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

On pourra traiter le problème dans le cas de $g = 0$ c'est-à-dire dans le cas d'un liquide non pesant et ajouter à la force trouvée la poussée donnée par le principe d'Archimède. Alors $p = p_0 - T - \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$

Nous pourrions déterminer T et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ et substituer dans cette équation, mais nous allons opérer autrement. Appliquons le théorème des forces vives:

Considérons une certaine force X appliquée au centre de la sphère, et dirigée suivant ox,

Soit M la masse de la sphère solide, sa demi-force vive est $\frac{1}{2} M . V^2$.

Soit H la force vive du liquide.

La demi force de tout le système est $\frac{1}{2}\left(MV^2 + H\right)$

L'accroissement de cette demi-force vive est égal au travail de X, ce qui donne:

$$MV.\, dV + \frac{dH}{2} = X \frac{dx}{dt} : dt = XV$$

Pour écrire les équations du mouvement de la sphère il faut calculer H force vive totale du liquide.

Appliquons pour cela le théorème de Green, nous savons que:

$$-\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\omega = \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

$d\omega$ sont les différents éléments de la surface de la sphère

$d\tau$ sont les différents éléments du volume du liquide extérieur à la sphère.

Calculons cette intégrale. Le coefficient de $d\tau$ est le carré de la vitesse; la densité du liquide étant 1, $d\tau$, élément de volume est aussi l'élément de masse correspondant:

Le second membre est donc la force vive de tout le liquide H.

Nous avons donc $H = -\int \varphi \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} : d\omega$

Remplaçons φ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$ par leur valeur à la surface de la sphère.

$$\varphi = \frac{A\cos\theta}{r^2} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{2A\cos\theta}{r^3}$$

alors $H = \int \frac{2A^2\cos^2\theta}{r^5} d\omega$

Remplaçons A par sa valeur,

$$A = -\frac{Vr^3}{2} \qquad 2A^2 = \frac{V^2 r^6}{2}$$

alors $H = \frac{V^2 r}{2}\int \cos^2\theta \, d\omega$

Reste à évaluer cette intégrale.

Représentons les coordonnées d'un point à la sphère par deux angles θ et φ ; θ angle du rayon vecteur avec ox, φ angle que fait avec le plan x,o,y, le plan mené par ox et le rayon vecteur. Cela revient à déterminer le point par sa longitude et sa colatitude.

Dans ces conditions, on a :

$$d\omega = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

L'intégrale que nous cherchons est l'intégrale double :

$$r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta$$

Calculons $\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta$

Pour cela posons $\cos\theta = \xi \qquad d\xi = -\sin\theta \, d\theta$

Nous avons alors pour l'intégrale :

$$-\int_{+1}^{-1} \xi^2 \, d\xi \qquad \text{ou} \qquad \int_{-1}^{+1} \xi^2 \, d\xi = \frac{2}{3}$$

L'autre $\int_0^{2\pi} d\varphi$ donne 2π et nous trouvons pour H :

$$H = \frac{V^2 r}{2} \cdot 2\pi r^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{V^2}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

Ce serait la demi-force vive d'une sphère de liquide de même rayon que la sphère donnée.

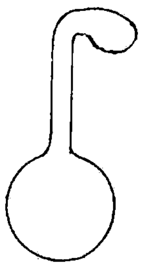
La demi-force vive totale devient alors : $\left[M + \frac{2}{3}\pi r^3 \right] \frac{V^2}{2}$

La force vive est la même que celle d'une sphère de masse $M + \frac{2}{3}\pi r^3$.

On a donc pour l'équation des forces vives :

$$\left[M + \frac{2}{3}\pi r^3 \right] \frac{dV}{dt} = X$$

Supposons $X = 0$ alors $\frac{dV}{dt} = 0$. La sphère est animée d'un mouvement uniforme sans subir aucune résistance de la part du liquide. Ce résultat s'applique aux fluides parfaits, mais l'expérience ne le vérifie pas dans le cas des fluides naturels. Il n'y a pas à s'étonner de ce résultat ; dans un fluide parfait il n'y a aucune viscosité, c'est-à-dire aucune force capable de détruire de la force vive pour la transformer en chaleur, comme il en existe dans les fluides naturels. — Nous avons supposé que le corps solide avait une forme et une grandeur invariables ; on peut avoir des corps de forme et de dimensions variables. C'est ce qui a été réalisé par les sphères pulsantes de M. Bjerknes. — L'appareil se compose d'une sphère en caoutchouc munie d'un tube et d'une poire, en pressant la poire ou en desserrant on peut avoir des dilatations ou des compressions de la sphère.



Cherchons comment se comportera le liquide.

1° Considérons une sphère pulsante isolée, elle restera en repos par raison de symétrie.

Calculons φ et la force vive totale du liquide.

Soit r le rayon de la sphère, c'est une fonction du temps puisque le diamètre est variable ; soit r' la dérivée de r par rapport au temps

Nous prendrons $\varphi = \frac{A}{\rho}$

Cette fonction $\frac{A}{\rho}$ satisfait bien à $\Delta \varphi = 0$

elle est nulle à l'infini, et c'est la seule qui ne dépende que de ρ.

Il faut déterminer A pour que $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = N$

N c'est r' $\quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -\frac{A}{\rho^2}$

On a donc $-\frac{A}{\rho^2} = r'$ à la surface de la sphère

donc $A = -r'r^2$

Calculons la force vive totale du liquide.

Appliquant comme précédemment le théorème de Green nous avons :

$$H = -\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega \text{ à la surface de la sphère}$$

$$\text{ou } H = + \int \frac{A^2}{r^3} d\omega$$

$$H = \frac{A^2}{r^3} \int d\omega$$

$\int d\omega$ c'est la surface de la sphère. Donc

$$H = \frac{A^2}{r} 4\pi = r'^2 r^3 . 4\pi$$

2° Imaginons qu'au lieu d'une seule sphère pulsante on ait dans le liquide deux sphères pulsantes de rayons r et r_1 soient r' et r_1' les dérivées par rapport au temps de r et de r_1

Soit c la distance des centres, on peut la supposer parallèle à ox.

Imaginons d'abord ces sphères fixes, la forme de la fonction φ est assez compliquée, c'est une série qu'on pourrait calculer, mais on peut se borner au premier terme en supposant que les rayons des sphères sont très petits par rapport à la distance des centres.

On peut dans ces conditions pour prendre la fonction des forces considérer isolément les deux sphères et faire la somme des fonctions des forces ainsi obtenues.

Considérons un point de l'espace, soient ρ et ρ_1 les distances de ce point aux centres des deux sphères, si la première sphère était seule, nous aurions :

$$\varphi = -\frac{r' r^2}{\rho}$$

si la seconde était seule, nous aurions

$$\varphi_1 = -\frac{r_1' r_1^2}{\rho}$$

En considérant les deux sphères, nous prendrons pour fonction des forces :

$$\Phi = \varphi + \varphi_1$$

$$\text{ou } \Phi = -\frac{r' r^2}{\rho} - \frac{r_1' r_1^2}{\rho_1}$$

Cette fonction Φ ne satisfait qu'approximativement à la 3^e condition que $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ soit N à la surface de la première sphère

$$\text{En effet } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$$

à la surface de la première sphère $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = N$

Reste à montrer que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$ est négligeable

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$ c'est la composante de la vitesse normale à la seconde sphère, elle est de l'ordre de $\frac{1}{\rho_1^2}$, et comme ρ_1 diffère très peu de C elle est l'ordre de $\frac{1}{C^2}$. Or nous avons supposé C très grand, $\frac{1}{C^2}$ est très petit, et nous pourrons alors prendre Φ pour fonction des forces.

Pour avoir la force vive, nous appliquerons le théorème de Green et nous écrirons

$$H = -\int \Phi \frac{d\Phi}{dn}\, d\omega$$

l'intégrale devant être prise à la surface des deux sphères. Nous poserons donc :

$$H = H_1 + H_2$$

H_1 étant l'intégrale prise sur la première sphère

H_2 l'intégrale prise sur la 2^e sphère.

Nous aurons :

$$H_1 = -\int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\omega \text{ à la surface de la sphère}$$

$$\text{or } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = N = r'$$

$$\text{Nous aurons donc } H_1 = -\int r' d\omega \left[-r' r - \frac{r_1'}{C} r_1^2\right]$$

en remplaçant ρ_1 par C

ou $H_1 = 4\pi r^2 \left[r'^2 r + \frac{r' r_1' r_1 r_1^2}{c} \right]$

ou $H_1 = 4\pi r'^2 r^3 + \frac{4\pi}{c} r' r_1' r^2 r^2.$

Par rapport à la seconde sphère nous aurons :

$$H_2 = 4\pi r_1'^2 \; r_1^3 + \frac{4\pi}{c} r' r_1' r^2 r_1^2$$

La force vive totale H sera la somme :

$$H = 4\pi \left[r'^2 r^3 + r_1'^2 r_1^3 + \frac{2}{c} r' r_1' r^2 r_1^2 \right]$$

L'expression de H n'est plus la même lorsqu'au lieu de supposer les deux sphères fixes, on imagine que l'une d'elles est mobile dans la direction de la ligne des centres. Alors la distance c des centres est variable et si l'on appelle c' la dérivée de c par rapport au temps ; il faut ajouter à H, trois termes de la forme :

$$2 B c' r' + 2 B_1 c' r_1' + D c'^2$$

B B_1 et D dépendant de r, r_1 et c.

Connaissant H pour calculer l'action des deux sphères l'une sur l'autre il suffit d'appliquer les équations de Lagrange.

Soit X l'action du liquide parallèlement à OX sur la première sphère $-X$ sera la résultante parallèle à ox de la réaction de la sphère sur le liquide, et le travail de cette force pour un accroissement virtuel δc de la distance c sera $-X \delta c$

Nous aurons alors, d'après les équations de Lagrange

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial H}{\partial c} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial c'} \right) \right] = X$$

si $c' = 0$ il reste

$$\frac{1}{2} \frac{dH}{dc'} = B r' + B_1 r_1',$$

Si l'on pose $r' = \varepsilon \cos \lambda t$, $r_1' = \varepsilon_1 \cos \lambda t$, il viendra :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dH}{dc'} \right) = E \sin \lambda t$$

E étant une constante, ce terme sera donc alternativement positif et négatif, de manière que si la période de pulsation est assez courte, ses effets, alternativement de sens contraire pourront être négligés. Il restera donc

$$X = \frac{1}{2} \frac{dH}{dc} = - \frac{4\pi}{c^2} r' r_1' r^2 r_1^2.$$

Cette formule montre que si r' et r_1' sont de même sens les deux sphères s'attirent ; si r' et r_1' sont de sens contraire les deux sphères se repoussent. r' ne peut pas être constant parce que le rayon de la sphère ne peut croître au delà de toute limite.

Supposons que ce soit une fonction périodique, par exemple

$$r' = \varepsilon \cos \lambda t \qquad r_1' = \varepsilon_1 \cos \lambda t$$

La période étant la même pour les deux sphères pulsantes.

Si ε et ε_1 sont de même signe, les deux sphères pulsantes se contractent en même temps, et se dilatent en même temps, r' et r'_1 sont toujours de même signe.

Si ε et ε_1 sont de signes contraires, une sphère se contracte pendant que l'autre se dilate, r' et r'_1 sont de signes contraires.

On peut réaliser de la sorte des phénomènes d'attraction et de répulsion apparente entre les sphères pulsantes

C'est ce qu'a réalisé M. Bjerknes

L'attraction est bien en raison inverse du carré de la distance mais il y a une différence avec les phénomènes électriques :

Dans les phénomènes électriques, deux molécules de même nom se repoussent, deux molécules de nom contraire s'attirent, ici c'est le contraire si deux sphères sont d'accord, c'est-à-dire si elles se contractent et se dilatent en même temps elles s'attirent ; au contraire elles se repoussent si l'une se contracte quand l'autre se dilate.

Table des Matières.

Première Partie.

Cinématique pure.

Mécanismes.

Seconde Partie

Potentiel.

Mécanique des Fluides.

Hydrostatique.

Hydrodynamique.

H. F.   A. G.