REMARQUES SUR LES INTÉGRALES IRRÉGULIÈRES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Réponse à M. Thomé

PAR

H. POINCARÉ
À PARIS.

J'ai publié deux mémoires sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, le premier *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* dans l'American journal of mathematics (t. 7, 1885, p. 203—258), le second *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires* dans les Acta Mathematica (t. 8, 1886, p. 295—344). Ces deux mémoires ont inspiré à M. THOMÉ une *Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen* qu'il a fait imprimer dans le Journal de CRELLE (t. 101, 1887) et que je ne puis laisser sans réponse.

Soit une équation linéaire de la forme suivante:

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0$$

ou les P sont des polynômes entiers en x d'un même degré m.

On démontre que pour x très grand, cette équation admet n intégrales de la forme suivante:

$$x^{\rho_i} \phi_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

les ϕ étant des séries convergentes doublement infinies procédant suivant les puissances positives et négatives de x. Mais on n'a aucun moyen de déterminer les exposants ρ et les coëfficients des séries ϕ.

D'autre part, on trouve n séries que j'appellerai *séries normales* et qui satisfont *formellement* à l'équation (1). Ces séries, qui sont généralement divergentes, sont de la forme:

$$e^{a_i x} x^{r_i} \varphi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les φ étant des séries ordonnées suivant les puissances négatives de x. J'ai démontré à ce sujet deux théorèmes.

1°. Pour qu'une série normale soit convergente, il faut et il suffit que la transformée de LAPLACE de l'équation (1) admette une intégrale holomorphe dans tout le plan.

2°. Alors même qu'une série normale diverge, elle représente *asymptotiquement* une des intégrales de l'équation (1), quand x croît indéfiniment avec un argument déterminé.

M. THOMÉ attaque ces deux théorèmes, mais à deux points de vue différents. Quant au premier, il n'en conteste pas l'exactitude, mais il le déclare dénué d'intérêt. C'est là un point sur lequel il est malaisé de discuter.

D'après M. THOMÉ, il est aussi difficile de distinguer si l'équation transformée a une intégrale holomorphe, que de reconnaître si la série normale converge. J'en conviens volontiers, mais j'estime qu'il n'est pas inutile, quand on est en présence de deux problèmes également insolubles, de montrer qu'ils se ramènent l'un à l'autre.

On croirait que M. THOMÉ attendait de moi l'énoncé sous forme explicite des conditions de convergence des séries normales. Il ne dépendait pas de moi de le lui donner; ces conditions s'expriment évidemment par des relations entre les $(n + 1)(m + 1)$ coëfficients des polynômes P; mais ces relations ne sont pas algébriques. Tout ce qu'on peut faire, c'est étudier les transcendantes qui y entrent. En établissant que la convergence se rattache à une propriété du groupe de l'équation transformée, je montrais en même temps que ces transcendantes sont intimement liées à d'autres fonctions que j'ai étudiées dans mon mémoire *Sur les groupes des équations linéaires* (Acta Mathematica, t. 4, 1884, p. 201—311). Les résultats que j'ai donnés au sujet de ces deux classes de transcendantes sont, il est vrai, fort incomplets; mais il est probable qu'on n'en trouvera pas d'autres d'ici à quelque temps; c'est ce qui m'a déterminé à les publier, tout en partageant les regrets de M. THOMÉ au sujet des lacunes qui y subsistent encore.

Quant au second théorème, M. THOMÉ le regarde comme faux, et cela parce qu'il l'interprète de la façon suivante:

Ce serait toujours la même intégrale qui serait représentée asymptotiquement par la même série normale, quel que soit l'argument avec lequel x croît indéfiniment; d'où il résulterait que les exposants r_i devraient être égaux aux exposants ρ_i.

Je n'ai jamais dit une pareille bêtise et M. THOMÉ me la prête gratuitement. Le § 5 du mémoire de l'American Journal est tout entier destiné à démontrer le contraire et j'ai encore répété le contraire à plusieurs reprises dans le mémoire des Acta Mathematica, et en particulier dans les deux dernières lignes de la page 309 et les huit premières lignes de la page 310.

En ce qui concerne ces dix lignes, je reconnais que j'aurais mieux fait de les souligner; mais, quant au § 5, je ne pouvais imaginer qu'un paragraphe tout entier échappât au lecteur le plus inattentif.

Je prévois la réponse de M. THOMÉ; mais, dira-t-il, si vous ne pouvez nous donner explicitement la valeur des exposants ρ, votre travail est dénué d'intérêt. J'en suis fâché, mais cette détermination explicite est impossible; on est obligé de se contenter de procédés d'approximations indéfinies et c'est ce que j'ai fait en définitive, dans le § 5, en ramenant le problème à la détermination du groupe d'une équation linéaire, question que j'avais traitée, quoique d'une façon incomplète, dans le mémoire cité des Acta Mathematica (t. 4).

Paris, le 24 Juillet 1887.