SUR UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

Par M. **H. Poincaré**, à Paris.

(*Extrait d'une Lettre adressée à M. G.-B. Guccia*).

Adunanza dell'11 novembre 1888.

. . . .

La lecture de la Note de M. Vivanti dans un des derniers numéros des *Rendiconti*, m'a vivement intéressé et m'a inspiré diverses réflexions qu'il ne sera peut-être pas inutile de mettre sous les yeux de vos lecteurs.

D'après M. Vivanti, une fonction multiforme est de la $n^{\text{ème}}$ puissance, si l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre pour une valeur donnée de la variable, est lui-même de la $n^{\text{ème}}$ puissance, au sens de M. Cantor. En particulier, elle sera de la $1^{\text{ère}}$ puissance si elle peut prendre en un point donné une infinité de valeurs susceptibles d'être rangées en une série linéaire:

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n, \quad \ldots,$$

de façon que chacune d'elles se trouve dans cette série une fois, et une seule, avec un indice déterminé; si, en d'autres termes, on peut assigner à chacune de ces valeurs un numéro d'ordre. Au contraire une fonction qui pourrait prendre en un point donné, par exemple, toutes les valeurs possibles commensurables ou non, ou encore toutes les valeurs incommensurables, serait de la 2de puissance.

Je me propose d'établir qu'il n'y a pas de fonction *analytique* multiforme d'une puissance supérieure à la 1ère. Mais pour cela il faut bien s'entendre sur ce qu'on doit appeler fonction analytique.

J'adopterai la définition de M. Weierstrass.

Un élément de fonction analytique sera une série de puissances convergente à l'intérieur d'un certain cercle. Deux éléments de fonctions seront la continuation analytique l'un de l'autre, ou, plus brièvement, seront *dérivés* l'un de l'autre quand les deux cercles de convergence ont une partie commune et que dans cette partie commune les deux séries ont même somme.

Pour construire une fonction analytique, nous partirons d'un élément de fonction F_0 convergent dans un certain cercle C_0. Nous construirons ensuite les divers éléments de fonction F_1 dérivés de F_0; puis les éléments F_2 dérivés des divers éléments F_1; puis les éléments F_3 dérivés de F_2, et ainsi de suite.

L'ensemble des éléments F_1, celui des éléments F_2, etc. sont de la 2de puissance. Mais il n'est pas nécessaire d'envisager tous ces éléments pour obtenir toutes les déterminations de la fonction.

J'appellerai F'_i ceux des éléments F_i dont le cercle de convergence C'_i aura pour centre un point ayant ses deux coordonnées commensurables.

Il est aisé de vérifier que l'ensemble des éléments F'_1 est de la 1ère puissance (et qu'il en est de même de l'ensemble des éléments F'_{i+1} dérivés d'un élément F_i donné).

On voit aussi sans peine que tout point intérieur à l'un des cercles de convergence C_1 de l'un des éléments F_1 sera aussi intérieur à l'un des cercles de convergence C'_1 de l'un des éléments F'_1.

Tout cercle ayant une partie commune avec l'un des cercles C_1 aura aussi une partie commune avec un des cercles C'_1. Donc, tout élément dérivé de l'un des éléments F_1 sera aussi dérivé de l'un des éléments F'_1. Les divers éléments F'_2 sont donc dérivés des divers éléments F'_1; de même les éléments F'_3 seront dérivés des éléments F'_2, etc.

La considération des éléments F'_1, F'_2, F'_3, etc. suffit pour obtenir toutes les déterminations de la fonction. Soit en effet AMB un chemin quelconque allant de la valeur initiale A de la variable à la valeur finale B. Il existera un nombre *fini* d'éléments $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n$ ayant pour cercles de convergence $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ et tels que F_{i+1} soit dérivé de F_i, que le point A soit intérieur à C_0 et le point B à C_n et que l'arc AMB traverse successivement le cercle C_0, la partie commune à C_0 et C_1, le cercle C_1, la partie commune à C_1 et C_2, etc., sans jamais sortir de l'ensemble des $n+1$ cercles $C_0, C_1, \ldots, C_n$. Ce n'est qu'à cette condition que la fonction aura une valeur déterminée au point B quand on sera arrivé en ce point par le chemin AMB.

Nous pourrons alors remplacer $F_0, F_1, \ldots, F_n$, par $n+1$ éléments $F_0, F'_1, \ldots, F'_n$ qui en diffèrent assez peu pour que l'arc AMB ne sorte pas de l'ensemble des $n+1$ nouveaux cercles de convergence $C_0, C'_1, \ldots, C'_n$.

La considération de ces éléments F'_i suffit donc pour faire connaître la valeur qu'acquiert la fonction quand on a parcouru le chemin AMB. C.Q.F.D.

L'ensemble des éléments $F'_1, F'_2, \ldots, F'_n$ etc. est de la 1ère puissance.

En effet, l'ensemble des éléments F'_1, dérivés de F_0, est de la 1ère puissance; donc on peut attribuer à chacun d'eux un numéro d'ordre α_1. L'ensemble des éléments F'_2, dérivés de celui des éléments F'_1 qui a pour numéro d'ordre α_1, sera encore de la 1ère puissance, donc on peut donner à chacun d'eux un numéro d'ordre α_2, et ainsi de suite.

En résumé, un élément F'_n sera défini par n numéros d'ordre :

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

De sorte que l'ensemble des éléments $F'_1, F'_2, \ldots, F'_n$ etc. aura même puissance que l'ensemble des fractions continues limitées :

$$\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\alpha_n}}},$$

ou que l'ensemble des nombres commensurables, lequel est comme on sait de la 1ère puissance. C. Q. F. D.

Il suit de là que *l'ensemble des déterminations d'une fonction analytique en un point donné est toujours, au plus, de la* 1ère *puissance.*

Il n'existe donc pas, par exemple, de fonction analytique qui prenne en un point donné toutes les valeurs possibles commensurables ou non.

Paris, le 27 octobre 1888.

POINCARÉ.