Sur les Equations aux Dérivées Partielles de la Physique Mathématique

H. Poincaré

American Journal of Mathematics, Vol. 12, No. 3. (Mar., 1890), pp. 211-294.

Stable URL:
http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9327%28189003%2912%3A3%3C211%3ASLEADP%3E2.0.CO%3B2-X

American Journal of Mathematics is currently published by The Johns Hopkins University Press.

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of JSTOR's Terms and Conditions of Use, available at http://www.jstor.org/about/terms.html. JSTOR's Terms and Conditions of Use provides, in part, that unless you have obtained prior permission, you may not download an entire issue of a journal or multiple copies of articles, and you may use content in the JSTOR archive only for your personal, non-commercial use.

Please contact the publisher regarding any further use of this work. Publisher contact information may be obtained at http://www.jstor.org/journals/jhup.html.

Each copy of any part of a JSTOR transmission must contain the same copyright notice that appears on the screen or printed page of such transmission.

The JSTOR Archive is a trusted digital repository providing for long-term preservation and access to leading academic journals and scholarly literature from around the world. The Archive is supported by libraries, scholarly societies, publishers, and foundations. It is an initiative of JSTOR, a not-for-profit organization with a mission to help the scholarly community take advantage of advances in technology. For more information regarding JSTOR, please contact support@jstor.org.

http://www.jstor.org
Mon Jan 7 09:21:52 2008

Sur les Equations aux Dérivées Partielles de la Physique Mathématique.

PAR H. POINCARÉ.

Quand on envisage les divers problèmes de Calcul Intégral qui se posent naturellement lorsqu'on veut approfondir les parties les plus différentes de la Physique, il est impossible de n'être pas frappé des analogies que tous ces problèmes présentent entre eux. Qu'il s'agisse de l'électricité statique ou dynamique, de la propagation de la chaleur, de l'optique, de l'élasticité, de l'hydrodynamique, on est toujours conduit à des équations différentielles de même famille et les conditions aux limites, quoique différentes, ne sont pas pourtant sans offrir quelques resemblances. Nous ne citerons ici que quelques exemples.

J'imagine d'abord que l'on se propose de trouver la température finale d'un corps solide conducteur, homogène et isotrope, lorsque les divers points de la surface de ce corps sont maintenus artificiellement à des températures données.

Ce problème traduit dans le langage analytique s'énonce comme il suit:

Trouver une fonction V qui dans une portion de l'espace satisfasse à l'équation de Laplace,

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0\,,$$

et qui prenne des valeurs données aux divers points de la surface qui limite cet espace.

C'est le *problème de Dirichlet.*

Supposons maintenant que l'on cherche quelle est la distribution de l'électricité statique à la surface d'un conducteur donné; nous retrouverons le même problème analytique.

Il s'agit de trouver une fonction V qui satisfasse à l'équation de Laplace dans tout l'espace extérieur au conducteur et qui se réduise à 0 à l'infini et à 1 à la surface au conducteur.

C'est un cas particulier du problème de Dirichlet, mais on connaît un moyen (par les fonctions de Green) de ramener le cas général à ce cas particulier.

Les deux problèmes, absolument différents au point de vue physique, sont identiques au point de vue analytique.

D'autres analogies, quoique moins completes, sont cependant évidentes.

Nous citerons d'abord le problème suivant; un liquide est contenu dans un vase qu'il remplit complètement; divers corps solides mobiles sont plongés dans ce liquide; on connaît les mouvements de ces corps et on suppose qu'il y a une fonction des vitesses; on demande quel est le mouvement du liquide.

C'est là le problème des sphères pulsantes de M. Bjerknes (imitation hydrodynamique des phénomènes électriques).

Au point de vue analytique, il s'agit de trouver une fonction V qui satisfasse à l'équation de Laplace à l'intérieur, d'un certain espace et telle que sur la surface qui limite cet espace la dérivée $\frac{dV}{dn}$ ait des valeurs données.

Je rappelle quel est le sens de cette notation $\frac{dV}{dn}$ dont il sera fait un fréquent usage dans la suite. Soit un élément de surface quelconque; et α, β, γ les trois cosinus directeurs de la normale à cet élément; nous posons:

$$\frac{dV}{dn} = \alpha \frac{dV}{dx} + \beta \frac{dV}{dy} + \gamma \frac{dV}{dz}.$$

Ainsi dans le problème hydrodynamique, nous retrouvons la même équation différentielle que dans les problèmes thermique et électrique; les conditions aux limites seules diffèrent. Il en sera encore de même dans le problème de l'induction magnétique.

Supposons un ou plusieurs aimants permanents mis en présence d'un corps magnétique parfaitement doux M. Il s'agit de trouver une fonction V (le potentiel magnétique) qui satisfait à l'équation de Laplace dans toute la portion de l'espace qui n'est pas occupée par des aimants permanents et qui est assujettie en outre aux conditions suivantes. Aux divers points où il y a du magnétisme permanent, ΔV n'est pas nul, mais peut être regardé comme donné. La fonction V est continue dans tout l'espace; ses dérivées sont continues à l'intérieur du corps M et à l'extérieur de ce corps, mais elles sont discontinues à la surface du corps M. Dans le voisinage de cette surface, $\frac{dV}{dn}$ aura donc deux valeurs différentes selon qu'on se placera à l'intérieur

ou à l'extérieur du corps M; mais le rapport de ces deux valeurs sera une constante donnée.

Ici encore, nous retrouvons la même équation différentielle, avec des conditions aux limites analogues quoique différentes.

Voici maintenant des cas où l'équation différentielle est légèrement modifiée.

Supposons que l'on cherche la loi du refroidissement d'un corps solide isolé dans l'espace. Il s'agira de trouver une fonction V satisfaisant à l'équation

$$\frac{dV}{dt} = k\Delta V,$$

et qui de plus est donnée pour $t = 0$. Enfin à la surface du corps le rapport de V à $\frac{dV}{dn}$ est donnée.

Dans les problèmes d'optique, on a trois fonctions inconnues u, v, w et quatre équations :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = k\Delta u, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = k\Delta v, \quad \frac{d^2w}{dt^2} = k\Delta w, \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Les conditions aux limites varient suivant les problèmes ; mais dans les questions de diffraction principalement elles ne sont pas sans analogie avec celles que nous avons rencontrées jusqu'ici.

Ce sont encore les mêmes équations, avec des conditions aux limites analogues, quoique différentes, que l'on rencontre dans le problème de la viscosité des liquides, traité d'après des idées de Navier. Les récents travaux de M. Couette ont rappelé l'attention sur cette question, qui était tombée dans un injuste oubli, malgré le beau chapitre que Kirchhoff y avait consacré dans sa Physique Mathématique.

La théorie de l'élasticité nous offre des équations plus compliquées, mais qui ne diffèrent pas beaucoup des précédentes.

On a encore trois fonctions inconnues u, v, w, auxquelles j'adjoindrai la fonction auxiliaire $\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$ et trois équations dont la première s'écrit:

$$\Delta u + \lambda \frac{d\theta}{dx} = 0.$$

Je n'écris pas les conditions aux limites tout à fait analogues, *mutatis mutandis*, à celles des problèmes précédents et je passe immédiatement à une question très

importante en hydrodynamique et qui consiste à trouver les composantes de la vitesse en tous les points d'un liquide quand on connaît les composantes du tourbillon en tous les points de ce même liquide. Ce problème au point de vue analytique s'énonce comme il suit:

Connaissant trois fonctions α, β, γ, trouver trois fonctions inconnues u, v, w, qui satisfont à certaines conditions aux limites et de plus aux équations

$$\alpha = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \quad \beta = \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \quad \gamma = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0. \quad (1)$$

L'analogie avec les problèmes précédents ne paraît pas d'abord évidente, mais elle le devient si on observe que les trois premières équations (1) peuvent (en vertu de la quatrième) être remplacées par trois autres dont la première s'écrit

$$\Delta u = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy},$$

et dont des autres peuvent s'écrire par symétrie.

Je pourrais montrer aussi, si je ne craignais de fatiguer l'attention par de trop nombreux exemples, que presque toutes les questions, encore mal étudiées, relatives à l'induction électrodynamique dans des conducteurs non linéaires se ramènent à des problèmes analogues aux précédents et surtout à la dernière question d'hydrodynamique que je viens de mentionner.

Cette revue rapide des diverses parties de la Physique Mathématique nous a convaincus que tous ces problèmes, malgré l'extrême variété des conditions aux limites et même des équations différentielles, ont, pour ainsi dire, un certain air de famille qu'il est impossible de méconnaître. On doit donc s'attendre à leur trouver un très grand-nombre de propriétés communes.

Malheureusement la première des propriétés communes à tous ces problèmes, c'est leur extrême difficulté. Non seulement on ne peut le plus souvent les résoudre complètement, mais ce n'est qu'au prix des plus grands efforts qu'on peut en démontrer rigoureusement la possibilité.

Cette démonstration est-elle nécessaire? La plupart des physiciens en feraient bon marché. L'expérience ne permettant pas de douter, par exemple, de la possibilité de l'équilibre électrique, on ne peut douter, non plus semble-t-il, de la possibilité des équations qui expriment cet équilibre. Nous ne saurions nous contenter de cette défaite; l'analyse doit pouvoir se suffire à elle-même et d'ailleurs un pareil raisonnement, n'il s'applique peut-être aux problèmes que

l'on rencontre directement en Physique, ne saurait s'appliquer de même à une foule de problèmes plus simples, qui se posent d'eux mêmes dès qu'on cherche à résoudre les premiers. En outre toute démonstration rigoureuse de la possibilité d'un problème en est toujours une solution ; dans le cas qui nous occupe, cette solution sera généralement grossière et tout à fait impropre au calcul numérique ; cependant elle nous enseignera toujours quelque chose.

Maintenant si cette démonstration est nécessaire, devons-nous pourtant nous astreindre à la même rigueur que dans une question d'analyse pure ? Ce serait dans beaucoup de cas un pédantisme bien inutile. Les équations différentielles auxquelles obéissent les phénomènes physiques n'ont été souvent établies que par des raisonnements peu rigoureux ; on ne les regarde que comme des approximation ; les résultats expérimentaux, auxquels il s'agit de comparer les conséquences de la théorie, sont eux-mêmes approximatifs. Dans ces conditions, la rigueur absolue est de peu de prix, et il semble souvent qu'il n'y a pas lieu de la rechercher si on doit la payer de trops d'efforts.

Mais alors comment reconnaîtra-t-on qu'on raisonnement dont la rigueur n'est pas absolue, n'est pas un simple paralogisme ? Quand aura-t-on le droit de dire que telle démonstration, insuffisante pour l'Analyse, est assez rigoureuse pour la Physique ? La limite est bien difficile à tracer. J'essayerai pourtant de le faire ; je m'efforcerai de marquer nettement cette frontière et d'expliquer pourquoi en deçà on est encore dans le domaine de la science, et au delà dans celui du paralogisme.

Néanmoins toutes les fois que je le pourrai, je viserai à la rigueur absolue et cela pour deux raisons ; en premier lieu, il est toujours dur pour un géomètre d'aborder un problème sans le résoudre complètement ; en second lieu, les équations que j'étudierai sont susceptibles, non seulement d'applications physiques, mais encore d'applications analytiques. C'est sur la possibilité du problème de Dirichlet que Riemann a fondé sa magnifique théorie des fonctions abélienne. Depuis d'autres géomètres ont fait d'importantes applications de ce même principe aux parties les plus fondamentales de l'Analyse pure. Est-il encore permis de se contenter d'une demi-rigueur ? Et qui nous dit que les autres problèmes de la Physique Mathématique ne seront pas un jour, comme l'a déjà été le plus simple d'entre eux appelés à jouer en Analyse un rôle considérable ?

§1.—*Problème de Dirichlet.*

Le Problème de Dirichlet énoncé plus haut est toujours possible; ce principe est connu sous le nom de principe de Dirichlet et la première démonstration est due à Riemann. Si une fonction V est assujettie à prendre des valeurs données aux divers points d'une certaine surface, limitant un certain volume où le fonction et ses dérivées sont continues, l'intégrale triple:

$$\int\int\int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz$$

ne peut s'annuler; elle admet donc un certain minimum et il est aisé de vérifier que ce minimum correspond au cas où la fonction V satisfait à l'équation de Laplace. Cette démonstration, qui est à peu de chose près elle de Riemann n'est pas rigoureuse car elle est soumise à toutes les objections relatives à la continuité des fonctions définies par le calcul des variations.

Aussi un très grand nombre de géomètres se sont-ils préoccupés d'établir plus solidement ce principe; je citerai en première ligne les recherches de M. Schwarz (dans le programme de l'Ecole Polytechnique de Zurich 1869 et dans les Monatsberichte de l'Academie de Berlin 1870) bien qu'elles se rapportent plus particulièrement au cas de deux variables et ne puissent pas toujours s'étendre sans modification au cas qui nous occupe.

M. Neumann a donné de son côté une méthode générale qui permet de resoudre complètement le problème, si la surface où la fonction V prend des valeurs données est convexe. Il résout donc le problème de la distribution électrique dans le cas d'un conducteur convexe.

La méthode de M. Robin ne s'applique également qu'aux conducteurs convexes. Toutefois il y a un certain nombre de méthodes plus ou moins compliquées connues sous le nom de *méthodes alternantes* et qui permettent d'étendre les résultats au cas d'un conducteur de forme quelconque ou de plusieurs conducteurs isolés.

Le problème de Dirichlet se ramène à la recherche des fonctions de Green.

Soit à trouver une fonction V qui à l'intérieur d'une surface S satisfasse à l'équation de Laplace et sur cette surface prenne des valeurs données.

Supposons qu'on ait trouvé une fonction U qui soit finie, qui satisfasse à l'équation $\Delta U = 0$, continue à l'intérieur de S sauf au point (a, b, c) intérieur à S où la fonction U sera infinie, de telle façon que la différence

$$U - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

soit finie. Pour achever de définir la fonction U nous l'assujettirons à s'annuler en tous les points de S. On voit alors que la valeur de V au point a, b, c est égale à l'intégrale

$$\int \frac{V \frac{dV}{dn} d\omega}{4\pi}$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de S.

Donc quand on saura trouver les fonctions de Green, on saura résoudre le problème de Dirichlet.

D'autre part la recherche des fonctions de Green se ramène, à l'aide de la transformation par rayons vecteurs réciproques, aù problème de la distribution électrostatique à la surface d'un conducteur.

Ce problème de la distribution électrostatique n'est qu'un cas particulier du problème de Dirichlet, et cependant nous voyons que le cas général s'y ramène. La méthode alternante de Murphy permet d'ailleurs de ramener le problème de la distribution à la surface de plusieurs conducteurs isolés, au cas d'un conducteur unique. Nous ne nous occuperons donc plus désormais que du cas particulier où l'on cherche la distribution électrostatique à la surface d'un seul conducteur, puisque le cas général 1 y ramène.

Que devons-nous penser des méthodes proposées jusqu'ici ? Ce sont à la fois des méthodes de démonstration destinées à établir la possibilité du problème et des méthodes de calcul destinées à le résoudre effectivement. Comme méthodes de démonstration, elles sont assez compliquées, mais elles se completent mutuellement de façon à s'appliquer à tous les cas et à satisfaire les juges plus sévères au sujet de la rigueur.

Comme méthodes de calcul, elles ne valent rien ; car personne n'aura jamais l'idée de les appliquer ; même les plus simples d'entre elles, celles de Neumann ou de Robin, conduisent à des calculs inextricables dès la seconde approximation. Tout ce qu'on peut espérer en tirer, sans un labeur par trop écrasant, ce sont des inégalités assez grossières auxquelles sera sommise la capacité du conducteur.

Tel est l'état actuel de la question ; voyons maintenant quel est le but que je me suis proposé ; ce qui eût été le plus intéressant, c'eût été de remplacer les méthodes de calcul actuel par d'autres moins défectueuses. Je n'ai pu le faire, je me suis borné à chercher une méthode de démonstration plus simple que celles qui ont été proposées jusqu'ici et directement applicable à tous les cas.

Je vais commencer par rappeler succinctement les principales propositions dont j'aurai à faire usage dans la suite.

1°. La fonction de Green, U, relative à une sphère S et à un point P s'obtient de la façon suivante. Soit R le rayon de la sphère.

Prenons sur la droite OP une longueur $OQ = \frac{R^2}{OP}$; la fonction U sera le potentiel de deux masses l'une égale à 1 et placée au point P, l'autre égale à $-\sqrt{\frac{OQ}{OP}}$ et placée au point Q.

2°. La valeur de $\frac{dU}{dn}$ correspondant à un élément quelconque de la sphère S est en raison inverse du cube de la distance de cet élément au point P. Elle est égale à

$$\frac{R^2 - OP^2}{R} \frac{1}{MP^3},$$

M désignant le centre de gravité de l'élément considéré.

3°. Si l'on considère une sphère S et un point P intérieur à cette sphère, le potentiel d'une masse électrique égale à 1 et placée au point P sera égale à $\frac{1}{MP}$ au point M.

Imaginons ensuite que cette même masse électrique égale à 1 se répartisse sur la surface de la sphère S de telle façon que la densité sur un élément quelconque de cette sphère soit en raison inverse du cube de la distance de cet élément au point P. Je dis que le potentiel de cette masse ainsi distribuée que nous appellerons W sera égale à $\frac{1}{MP}$ en tout point M extérieur à la sphère et plus petit que $\frac{1}{MP}$ si le point M est intérieur à la sphère.

En effet considérons une fonction qui soit égale à la fonction de Green, U, définie plus haut à l'intérieur de la sphère et 0 à l'extérieur de la sphère. Cette fonction satisfait partout à l'équation de Laplace; elle est continue sauf au point P et sur la surface de la sphère. Au point P la fonction devient infinie et sa différence avec $\frac{1}{MP}$ reste finie; sur la surface de la sphère, la fonction elle-même reste continue, mais sa dérivée $\frac{d}{dn}$ subit un saut brusque égal à $\frac{R^2 - OP^2}{R.MP^3}$.

Nous devons en conclure que cette fonction est égale aù potentiel de diverses masses électriques distribuées comme il suit :

1°. Une masse égale à 1 au point P.

2°. Une masse de densité $-\frac{R^2 - OP^2}{4\pi . R . MP^3}$ aux divers points de la surface de S.

Cette seconde masse n'est autre chose que la masse définie plus haut et dont le potentiel était W, mais *changée de signe.*

On a donc :

$$\frac{1}{MP} - W = 0$$

à l'extérieur de S et

$$\frac{1}{MP} - W = U > 0$$

à l'intérieur de S. C. Q. F. D.

4°. Supposons que nous nous proposions de trouver une fonction V qui satisfasse à l'équation de Laplace à l'intérieur de la sphère S et qui aux différents points M de la surface de cette sphère prennent des valeurs données V^0.

La valeur de cette fonction V en un point P intérieur à la sphère sera l'intégrale

$$\int \frac{R^2 - OP^2}{4\pi R} \frac{V^0}{MP^3} d\omega,$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de la sphère.

5°. Soient w et W la plus petite et la plus grande valeur que puisse prendre V^0 ; ce seront aussi, comme on le sait, la plus petite et la plus grande valeur que puisse prendre V.

Si w est positif, il sera de même de V^0 et de V.

D'ailleurs comme MP est toujours compris entre $R - OP$ et $R + OP$; on aura

$$V < \frac{R + OP}{(R - OP)^2} \int \frac{V^0 d\omega}{4\pi R}$$

et

$$V > \frac{R - OP}{(R + OP)^2} \int \frac{V^0 d\omega}{4\pi R}.$$

6°. J'arrive au théorème de Harnack dont je ferai un fréquent usage et qui peut s'énoncer comme il suit :

Si une série

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$$

est convergente en un point intérieur à sphère S, que tous ses termes soient positifs à l'intérieur de cette sphère et satisfassent tous à l'équation de Laplace, cette série sera uniformément convergente à l'intérieur de toute sphère intérieure elle-même à S.

Soit en effet V_i^0 la valeur de V_i en un point quelconque de la surface de S; d'après l'hypothèse V_i^0 sera essentiellement positif de sorte qu'on pourra écrire:

$$V_1 < \frac{R + OP}{(R - OP)^2} \int \frac{V_i^0 d\omega}{4\pi R}, \quad V_i > \frac{R - OP}{(R + OP)^2} \int \frac{V_i^0 d\omega}{4\pi R}.$$

Si maintenant nous appelons V_i' la valeur de V_i au point O, centre de la sphère, on aura

$$V_i' = \int \frac{V_i^0 d\omega}{4\pi R^2},$$

d'où:

$$V_i' \frac{R(R + OP)}{(R - OP)^2} > V_i > \frac{R(R - OP)}{(R + OP)^2} V_i',$$

ou si le point P est intérieur à une sphère s, concentrique à S et de rayon $r < R$,

$$\frac{R(R + r)}{(R - r)^2} V_i' > V_i > \frac{R(R - r)}{(R + r)^2} V_i'.$$

Si donc le point P est intérieur à s, chacun des termes positif de la série

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$$

sera plus petit que le terme de la série convergente

$$V_1' + V_2' + \ldots + V_n' + \ldots$$

multiplié par le facteur constant

$$\frac{R(R + r)}{(R - r)^2}.$$

Si donc la série converge au point O, elle convergera en tous les points intérieurs à S, et la convergence sera uniforme à l'intérieur de s.

Il suffit d'ailleurs que la série converge en un point P quelconque pour qu'elle converge au point O; on a en effet:

$$V_i' < V_i \frac{(R + OP)^2}{R(R - OP)}.$$

Ainsi si la série converge en un point quelconque intérieur à S, elle convergera encore en tous les autres points intérieurs à S, et la convergence sera uniforme dans toute sphère intérieure à S.

Ce n'est pas tout ; non seulement la série :

$$V_1 + V_2 + \ldots . + V_n + \ldots .$$

converge uniformément à l'intérieur de s ; mais il en est de même des séries

$$\frac{dV_1}{dx} + \frac{dV_2}{dx} + \ldots . + \frac{dV_n}{dx} + \ldots . ,$$

$$\frac{d^2V_1}{dx^2} + \frac{d^2V_2}{dx^2} + \ldots . + \frac{d^2V_n}{dx^2} + \ldots . ,$$

$$\frac{d^2V_1}{dxdy} + \frac{d^2V_2}{dxdy} + \ldots . + \frac{d^2V_n}{dxdy} + \ldots . ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La démonstration est la même ; et en effet la fonction V_i étant exprimée sous la forme d'une intégrale définie, une dérivée quelconque de V_i s'obtiendra sous la même forme par le procédé de la différentiation sous le signe $\int$; et on en déduira comme plus haut deux inégalités auxquelles cette dérivée devra satisfaire.

On en conclut qu'à l'intérieur de la sphère S, la somme de la série

$$V_1 + V_2 + \ldots . + V_n + \ldots .$$

est une fonction finie et continue ainsi que toutes ses dérivées et que cette fonction satisfait à l'équation de Laplace.

Le théorème démontré pour une sphère, s'étend aisément à une région R de l'espace.

Si dans la région R les fonctions

$$V_1,\ V_2,\ \ldots .\ V_n,\ \ldots .$$

sont positives et satisfont à l'équation de Laplace.

Si en un point de cette région la série

$$V_1 + V_2 + \ldots . + V_n + \ldots .$$

converge, elle convergera dans toute la région et la somme sera une fonction finie et continue qui satisfera à l'équation de Laplace.

Ces préliminaires posés, je puis aborder le problème que j'ai en vue. Il s'agit de démontrer la possibilité de l'équilibre électrostatique à la surface d'un conducteur isolé.

Je supposerai qu'en chaque point de la surface de ce conducteur il y a un plan tangent déterminé et deux rayons de courbure principaux déterminés. Ces

conditions restrictives ne sont pas toutes indispensables. Je préfère pourtant me les imposer d'abord et rechercher ensuite, par une courte discussion, quelles sont celles dont je puis me débarrasser.

On peut évidemment toujours trouver une sphère Σ telle que le conducteur soit contenu tout entier à l'intérieur de cette sphère.

On peut ensuite trouver un système de sphères en nombre infini

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

jouissant des deux propriétés suivantes: 1°. Chacune de ces sphères sera tout entière extérieure au conducteur. 2°. Tout point de l'espace extérieur au conducteur appartiens aù moins à une des sphères du système.

Cette proposition paraîtra presque évidente à qui voudra se donner la peine d'y réfléchir.

Nous croyons néanmoins devoir la démontrer en quelques mots.

Il s'agit de démontrer que l'on peut trouver à l'extérieur du conducteur une infinité de points

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$$

tels que pour tout point M extérieur au conducteur, il y ait un point C_i plus rapproché du point M que de la surface du conducteur. Et en effet s'il en est ainsi et que du point C_i comme centre on décrive une sphère S_i ayant pour rayon la plus courte distance de C_i à la surface du conducteur, la sphère S_i sera tout entière extérieure au conducteur et le point M sera intérieur à la sphère S_i.

Cherchons donc à établir l'existence des points C_i.

Considérons d'abord une région finie R située à une distance finie de la surface du conducteur et soit δ la plus courte distance de la région R à cette surface. Cela posé considérons le triple système de plans:

$$x = \frac{m_1\delta}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{m_2\delta}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{m_3\delta}{\sqrt{3}}$$

parallèles aux trois plans de coordonnées. Les trois quantités m_1, m_2, m_3 sont des nombres entiers positifs ou négatifs. Ces plans partageront l'espace en une infinité de cubes égaux dont la diagonale est égale à δ.

Ceux de ces cubes qui appartiendront en totalité ou en partie à la région R seront en nombre fini. Soient

$$K_1, K_2, \ldots, K_n$$

ces cubes. L'intérieur de chacun d'eux j'envisagerai un point appartenant à la région R; j'obtiendrai ainsi n points

$$C_1, C_2, \ldots, C_n,$$

le point C_i appartenant à la fois au cube K_i et à la région R.

Si nous considérons maintenant un point M quelconque de la région R, ce point appartiendra à l'un de nos cubes, par exemple au cube K_i. La distance du point M au point C_i sera plus petite que δ diagonale du cube; la distance du point C_i à la surface du conducteur est elle-même plus grande que δ, puisque C_i appartient à R.

Donc tout point de R est plus rapproché de l'un des n points $C_1, C_2, \ldots C_n$ que celui-ci ne l'est du conducteur.

Je partage maintenant l'espace extérieur au conducteur en une infinité de régions

$$\ldots R_{-n}, R_{-n+1}, \ldots, R_{-2}, R_{-1}, R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$$

Chacune de ces régions est ainsi représentée par la lettre R affectée d'un indice qui peut varier depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. La région R_i se compose des points dont la plus courte distance à la surface du conducteur est comprise entre Q^i et Q^{i+1}. Dans chacune de ces régions je définirai les points $C_1, C_2, \ldots, C_n$ comme je l'ai dit plus haut. J'obtiendrai ainsi une infinité de points C. Il est clair alors que tout point extérieur au conducteur sera toujours plus près de l'un de ces points que celui-ci ne l'est lui-même de la surface du conducteur.

C. Q. F. D.

L'existence des sphères S_i est donc établie.

Il est clair qu'on pourrait construire ces sphères S_i d'une infinité d'autres manières et que celle que je viens d'exposer en détail dans le seul but de fixer les idées n'a été choisie d'une façon tout à fait arbitraire. La seule chose essentielle c'est que les sphères S_i, quoique en nombre infini, puissent être rangées en une série linéaire:

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots,$$

où chacune d'elles ait un indice entier positif parfaitement déterminé, c'est-à-dire pour parler le langage de M. Cantor, que l'ensemble des sphères S_i soit de la 1ère puissance.

L'ordre dans lequel ces sphères seront rangées dans la série linéaire

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

est d'ailleurs indifférent.

Il s'agit maintenant d'établir qu'il existe une fonction V finie et continue ainsi que toutes ses dérivées à l'extérieur du conducteur et satisfaisant à l'extérieur du conducteur à l'équation de Laplace; et de plus que cette fonction tend vers 0 quand le point (x, y, z) s'éloigne indéfiniment et vers 1 quand le point (x, y, z) se rapproche indéfiniment de la surface du conducteur.

Soit O le centre et R le rayon de la sphère Σ; imaginons une certaine quantité d'électricité positive distribuée uniformément à la surface de cette sphère avec une densité $\frac{1}{4\pi R}$. J'appelle V_0 le potentiel dû à cette électricité. Nous aurons

$$V_0 = 1$$

à l'intérieur de la sphère Σ et en particulier à l'intérieur du conducteur et

$$V_0 = \frac{R}{OM}$$

lorsque le point $M(x, y, z)$ est extérieur à Σ. On a dans tous les cas

$$0 < V_0 \leqq 1$$

et V_0 tend vers 0 quand le point M s'éloigne indéfiniment.

Nous allons faire maintenant une série d'opérations que je vais définir.

Nous avons vu plus haut que si une masse électrique P se trouve à l'intérieur d'une sphère S, on peut la remplacer par une masse égale distribuée à la surface de la sphère de façon que la densité en chaque point de cette surface soit en rayon inverse du cube de la distance de ce point au point P. Le potentiel par rapport à un point extérieur à S n'est pas changé, le potentiel par rapport à un point intérieur est diminué.

On peut appeler cette couche électrique répandue à la surface de S la *couche équivalente* à la masse unique P.

Cela posé, supposons qu'on remplace toutes les masses électriques qui peuvent exister à l'intérieur d'une sphère S_i par la couche équivalente répandue à la surface de cette sphère. Le potentiel en un point extérieur à S_i ne changera pas, le potentiel en un point intérieur à S_i diminuera. Cette opération pourra s'appeler: "balayer la sphère S_i."

Nous partons de la masse électrique répandue sur Σ et dont le potentiel est V_0. Chacun des points de Σ appartenant à l'une des sphères S_i, quelques-unes de ces sphères contiendront de l'électricité; soit S_1 une de celles qui en contien-

nent; "balayons" cette sphère; balayons ensuite la sphère S_2 si cette sphère contient de l'électricité et ainsi de suite.

Il faut diriger les opérations de façon que chaque sphère soit balayée une infinité de fois. On peut par exemple balayer les sphères dans l'ordre suivant:

$$S_1S_2S_1S_2S_3S_1S_2S_3S_4S_1S_2S_3S_4S_5S_1S_2S_3S_4S_5S_6 \ldots .$$

Il est aisé de constater que de cette façon chaque sphère est balayée une infinité de fois.

Soit ensuite V_1 ce que devient le potentiel V_0 après la première opération, V_2 ce que devient V_1 après la seconde opération; soit enfin V_n ce qui devient le potentiel après n opérations.

Supposons que la n^e opération consiste à balayer le sphère S_k. On aura:

$$V_n = V_{n-1} \quad \text{à l'extérieur de } S_k,$$
$$V_n < V_{n-1} \quad \text{à l'intérieur de } S_k.$$

On aura donc dans tous les cas:

$$V_n \leqq V_{n-1}.$$

Cette inégalité montre qu'en un point quelconque de l'espace V_n est toujours décroissant (ou du moins toujours non-croissant) quand on fait croitre l'indice n.

Il importe de remarquer qu'il n'y a aucun moment et en aucun point de masse électrique négative. Au début nous avons sur la sphère Σ une couche électrique uniforme et positive. Aucune des opérations subséquentes ne peut introduire de masses négatives. En effet le balayage d'une sphère quelconque consiste à remplacer les masses électriques *positives* situées à l'intérieur de cette sphère par des couches équivalentes *positives* répandues à la surface de cette sphère.

On a donc $$V_n > 0.$$

Ainsi en un point quelconque de l'espace V_n est toujours positif et décroissant. Donc quand n croît indéfiniment, V_n tend vers une limite finie et déterminée que j'appelle V. J'ai donc démontré l'existence d'une fonction V définie en tous les points de l'espace. Il reste à étudier les propriétés de cette fonction.

Considérons une quelconque des sphères S_i. Par hypothèse cette sphère sera balayée une infinité de fois. Supposons qu'elle le soit à la α_1^e opération, à la $\alpha_2^e, \ldots$ à la $\alpha_n^e, \ldots$ Après chacune de ces opérations, il n'y aura plus d'électricité à l'intérieur de S_i de sorte qu'on aura:

$$\Delta V_\alpha = 0 \qquad (\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, \ldots).$$

Quand α_n croît indéfiniment, V_{α_n} tend vers V de sorte que la série:

$$V_{\alpha_1} + (V_{\alpha_2} - V_{\alpha_1}) + (V_{\alpha_3} - V_{\alpha_2}) + \ldots + (V_{\alpha_n} - V_{\alpha_{n-1}}) + \ldots$$

converge et a pour somme V. Chacun de ces termes satisfait à l'équation de Laplace; de plus chacun d'eux est négatif (sauf le premier) car on a:

$$V_{\alpha_n} < V_{\alpha_{n-1}} \text{ si comme on le suppose } \alpha_n > \alpha_{n-1}.$$

Donc en vertu du théorème de Harnack la convergence est uniforme et les séries déduites de la précédente par différentiation convergent aussi uniformément. Donc à l'intérieur de S_i la fonction V est continue aussi que toutes ses dérivées et satisfait à l'équation de Laplace.

Mais par hypothèse tout point de l'espace éxtérieur au conducteur appartient au moins à l'une des sphères S_i.

Donc en tout point extérieur au conducteur, V et ses dérivées sont continues et l'on a:

$$\Delta V = 0.$$

Je dis que V tend vers 0 quand le point M s'éloigne indéfiniment. En effet on a:

$$V_0 > V > 0.$$

Or V_0 tend vers 0 quand M s'éloigne indéfiniment, donc il en est de même de V.

Il reste à démontrer que V tend vers 1 quand le point M se rapproche indéfiniment de la surface du conducteur.

Soit donc M_0 un point de la surface du conducteur et suppose que le point M se rapproche indéfiniment de M_0. Par hypothèse il y a au point M_0 un plan tangent déterminé et deux rayons de courbure principaux déterminés. On peut donc construire une sphère σ tangente à la surface du conducteur en M_0 et dont le rayon r est assez petit pour que cette sphère soit tout entière contenue à l'intérieur du conducteur.

Soit C le centre de cette sphère. La fonction

$$\frac{M_0 C}{MC} = \frac{r}{MC},$$

regardée comme fonction des coordonnées x, y, z du point M satisfait à l'équation de Laplace et si réduit à 1 à la surface de la sphère σ.

D'autre part la fonction V_n est un potentiel dû à des masses électriques qui sont toutes positives. Il en résulte que cette fonction V_n peut avoir des maxima, mais ne peut avoir de minimum.

De plus V_n est égal à 1 en tous les points intérieurs au conducteur et en particulier sur toute la surface de σ. En effet cela est vrai de V_0, mais, en balayant l'une des sphères S_i, on ne change pas le potentiel à l'extérieur de cette sphère, ni par conséquent à l'intérieur du conducteur qui est tout entier extérieur, par hypothèse, à toutes les sphères S_i. On a donc à l'intérieur du conducteur

$$1 = V_0 = V_1 = \ldots = V_n = \ldots$$

La différence

$$U = V_n - \frac{r}{MC}$$

est un potentiel dû aux masses électriques qui engendrent V_n et qui toutes sont positives et extérieures à σ, et à une masse $-r$ concentrée au point C et par conséquent intérieure à σ. Toutes celles de ces masses qui sont extérieures à σ sont positives. Donc à l'extérieur de σ, la fonction U ne peut avoir que des maxima et pas de minima. A la surface de σ, U est nul, car

$$V_n = \frac{r}{MC} = 1.$$

A l'infini, U est encore nul, car

$$V_n = \frac{r}{MC} = 0.$$

Donc à l'extérieur de σ, U ne peut être que positif, en sorte que l'on a:

$$V_n > \frac{r}{MC}.$$

Nous avons donc la double inégalité

$$1 > V_n > \frac{r}{MC},$$

qui à la limite devient:

$$1 \geqq V \geqq \frac{r}{MC} \geqq \frac{r}{r + MM_0}.$$

Il est donc clair que quand la distance MM_0 tend vers 0, V tend vers 1.

C. Q. F. D.

La fonction V satisfait donc bien aux conditions que nous nous etions imposées et le *principe de Dirichlet est établi.*

Voyons maintenant si on peut se débarrasser des conditions restrictives que nous nous sommes imposées, à savoir que le plan tangent et les rayons de courbure principaux sont déterminés. Nous ne nous sommes servis de ces condi-

tions que pour établir l'existence de la sphère σ, tangente au conducteur et toute entière intérieure à ce conducteur. Cette sphère σ n'existera évidemment que si le plan tangent est déterminé; mais elle pourra exister encore en un point singulier où les rayons de courbure ne varieraient pas suivant les lois habituelles; nous n'aurions alors rien à changer à notre démonstration.

Nous n'avons donc qu'à examiner les points singuliers pour lesquels la sphère σ n'existerait pas. S'il y a sur la surface du conducteur de pareils points singuliers, nous ne pouvons pas encore affirmer que la fonction V tende vers 1 quand le point M se rapproche de l'un de ces points singuliers; remarquons toutefois que l'existence de ces points singuliers n'empêche pas V de tendre vers 1 quand M se rapproche d'un point non singulier de la surface.

Mais on peut aller plus loin; supposons que le principe de Dirichlet soit démontré pour un certain conducteur C'. Supposons ensuite que le conducteur donné C présente un point singulier M_0, et que l'on puisse construire un conducteur C'', semblable à C', dont la surface passe par M_0 et qui soit tout entier intérieur à C. Je dis que quand le point M se rapprochera de M_0, V tendra vers 1.

En effet le principe de Dirichlet établi pour C' l'est aussi pour C''; il existe donc une fonction V'' satisfaisant à l'équation de Laplace à l'extérieur de C'' et se réduisant à 0 à l'infini et à 1 à la surface de C''. Nous allons faire jouer alors au conducteur C'' le même rôle qu'à la sphère σ dans le cas précédemment examiné. On verrait comme plus haut que:

$$1 > V_n > V''$$

et par conséquent que: $$1 > V > V''.$$

Or quand M tend vers M_0: $$\lim V'' = 1.$$

Donc $$\lim V = 1.$$ C. Q. F. D.

Parmi ces points singuliers les plus intéressants sont les points coniques que nous allons étudier de plus près.

Je suppose qu'une partie de la surface du conducteur C soit une portion de cône de révolution. Soit M_0 le sommet de ce cône. Je dis que V tendra vers 1 quand le point M se rapprochera indéfiniment de M_0.

Mais pour cela il est nécessaire de démontrer le lemme suivant:

Soit S une sphère fixe, C un cercle fixe sur cette sphère, P un point fixe

en dehors de la sphère. Soit maintenant E un ellipsoïde de révolution variable assujetti à restes tangent à la sphère S tout le long du cercle C. Soit V une fonction satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$ à l'extérieur de E et se réduisant à 0 à l'infini et à 1 à la surface de E. Soit V_0 la valeur de V au point P.

Je dis que V_0 tendra vers 1 quand le grand axe de E croîtra indéfiniment.

Désignons en effet par ρ et $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ les axes de l'ellipsoïde E, par $\rho + h$ et $\sqrt{(\rho + h)^2 - b^2}$ les axes de l'ellipsoïde E', homofocal à E et passant par P. On aura :

$$V_0 = \frac{L\dfrac{\rho + h - b}{\rho + h + b}}{L\dfrac{\rho - b}{\rho + b}} = \frac{L(\rho + b) + L\left(1 + \dfrac{h}{\rho + b}\right) - L(\rho + h - b)}{L(\rho + b) - L(\rho - b)}.$$

A la limite les ellipsoïdes E et E' se réduisent à deux paraboloïdes homofocaux P_1 et P_1' faciles à construire.

Alors h tend vers une limite finie qui n'est autre que la distance des sommets des deux paraboloïdes ; $\rho - b$ tend vers une limite finie qui est le demiparamètre de P_1. On voit aussi que $L(\rho - b)$ et $L(\rho + h - b)$ tendent vers des limites finies, que $L\left(1 + \dfrac{h}{\rho + b}\right)$, tend vers 0 et que $L(\rho + b)$ croît indéfiniment. Par conséquent V_0 tend vers 1. C. Q. F. D.

Revenons maintenant à notre conducteur C dont une partie de la surface appartiendra à un cône de révolution de sommet M_0. Par le point M_0, et en dehors du cône faisons passer une droite M_0P et supposons que le point M se rapproche de M_0 en suivant cette droite ; je dis que V tendra vers 1.

En effet du point M je mène une normale au cône et par le pied de cette normale je fais passer un parallèle du cône de révolution. Je construis ensuite un ellipsoïde de révolution E qui soit tangent au cône tout le long de ce parallèle. Je ferai varier cet ellipsoïde de telle façon qu'il reste constamment tout entier à l'intérieur du conducteur C et son grand axe reste fini quand le point M se rapproche indéfiniment de M_0. Cela est manifestement toujours possible.

Je construis ensuite un potentiel W qui se réduise à 1 à la surface de E. Soit W_0 la valeur de W au point M, on aura :

$$1 > V > W_0.$$

Construisons maintenant une figure homothétique de la précédente en prenant pour centre d'homothétie le point M_0, le cône de révolution sera son propre

homothétique; l'homothétique de l'ellipsoïde E sera un ellipsoïde E' tangent au cône tout le long d'un parallèle; l'homothétique du point M sera un point M' de la droite M_0P. Nous choisirons le rapport d'homothétie de façon que M' soit fixe; alors l'ellipsoïde de révolution E sera tangent au cône tout le long d'un parallèle fixe.

Soit maintenant un potentiel W' qui se réduise à 1 à la surface de E'. Soit W_0' la valeur de W' au point M'; on aura:

$$W_0 = W_0'.$$

Lorsque le point M se rapprochera de M_0, le rapport d'homothétie et par conséquent le grand axe de E' croîtront indéfiniment. Donc d'après le lemme W_0' tendra vers 1. Donc W_0 et par conséquent V tendront aussi vers 1.

C. Q. F. D.

Cela posé considérons maintenant un conducteur C quelconque, et un point singulier M_0 de ce conducteur; je supposerai qu'en ce point M_0 le plan tangent est déterminé, ou que ce point M_0 est un point conique ordinaire. Je pourrai alors construire un conducteur C'' formé par exemple d'une sphère et d'un cône de révolution circonscrit, ayant pour sommet M_0; je pourrai choisir l'angle du sommet du cône et le rayon de la sphère assez petits pour que C'' soit tout entier intérieur à C.

Le principe de Dirichlet est démontré pour C''; C'' est intérieur à C; nous devons en conclure, comme nous l'avons vu plus haut que V tend vers 1, quand M tend vers M_0.

Nous pouvons résumer cette discussion en disant que *le principe de Dirichlet est établi pour tout conducteur dont la surface est telle que le plan tangent en chaque point est déterminé sauf en un nombre limite de points coniques ordinaires.*

Comme méthode de démonstration, celle que je viens d'exposer ne laisse rien à désirer comme méthode de calcul; elle ne vaut pas mieux que celles qu'on a proposées jusqu'ici et même si le conducteur est convexe, elle est inférieure à celles de Neumann et de Robin. Mais même à ce point de vue, je ne regrette pas de l'avoir publiée; en effet, ainsi que nous l'avons vu, il ne faut guère compter que sur la première approximation si l'on veut pousser plus loin, même avec le procédé de Neumann, on serait conduit à des calculs trop rebutants. Chaque méthode donnera donc seulement quelques inégalités, il n'est donc pas inutile de multiplier les méthodes; dans chaque cas particulier, un analyste habile saura choisir celle qui convient le mieux, ou mieux encore les combiner toutes d'une manière convenable.

A ce point de vue, la méthode que j'expose ici offrira à cette analyste habile d'assez grandes ressources à cause de son élasticité (si j'ose m'exprimer ainsi). Le choix des sphères S_1, S_2, ... S_n reste arbitraire dans une très large mesure ; d'ailleurs on peut sans rien changer à la méthode remplacer la sphère Σ par d'autres surfaces, ou même prendre pour V_0 une fonction potentielle quelconque, pourvu qu'elle se réduise à 1 à l'intérieur du conducteur et que les masses électriques qui l'engendrent soient toutes positives.

On pourra encore remplacer les sphères S_i par d'autres surfaces, pourvu que l'on sache construire sur cette surface la couche équivalente à une masse électrique donnée intérieure à la surface. On conçoit qu'on pourra profiter de toutes ces facilités pour adapter le mieux possible la méthode à chaque cas particulier.

Parmi ces perfectionnements dont la méthode est susceptible, il en est un qui me paraît fort important. Nous avons construit les sphères S_i de façon que tout point extérieur au conducteur soit intérieur au moins à l'une de ces sphères.

Imaginons qu'on construisa seulement assez de sphères S_i tout entières extérieures au conducteur, pour que tout point extérieur au conducteur et *intérieur à* Σ soit intérieur au moins à l'une de ces sphères. Les sphères S_i dont le rayon doit être fini dès qu'on est à une distance finie du conducteur, empéiteront d'ailleurs sur la région extérieure à Σ.

Dans ces conditions tout point de l'espace est ou bien intérieur au conducteur C, ou intérieur à l'une des sphères S_i, ou extérieur à Σ.

Il ne peut être à la fois intérieur à C et intérieur à S_i, ou bien intérieur à C et extérieur à Σ; mais il peut être à la fois intérieur à deux ou plusieurs des sphères S_i, ou intérieur à l'une ou plusieurs de ces sphères et extérieur à Σ. Nous avons vu plus haut comment on pouvait remplacer une masse électrique P intérieure d'une sphère Σ, c'est-à-dire par une couche électrique répandue à la surface de la sphère et dont le potentiel soit égal à celui de la masse P à l'extérieur de Σ et plus petit à l'intérieur.

Je dis maintenant qu'on peut également remplacer une masse électrique Q *extérieure* à la sphère Σ par une couche équivalente, c'est-à-dire par une couche électrique répandue à la surface de Σ, et dont le potentiel soit égal à celui de la masse Q à *l'intérieur* de Σ et plus petit à l'extérieur.

En effet soit O le centre de Σ et R son rayon ; soient P et Q deux points situés sur un même rayon vecteur OP et tels que :

$$OP \cdot OQ = R^2.$$

Supposons que P soit intérieur à Σ; Q sera extérieur à Σ.

Considérons deux masses l'une égale à 1 et placée en P, l'autre égale à $-\sqrt{\frac{OQ}{OP}}$ et placée en Q. Nous avons vu que le potentiel dû à ces deux masses était une fonction U, nulle à la surface de Σ, positive à l'intérieur de Σ et négative à l'extérieur.

Soit W le potentiel de la couche équivalente à la masse P répandue à la surface de Σ. D'après ce que nous avons vu, nous aurons:

$$\text{à l'extérieur de } \Sigma: \quad \frac{1}{MP} - W = 0 \qquad \frac{1}{MP} < \sqrt{\frac{OQ}{OP}}\,\frac{1}{MQ}$$

et

$$\text{à l'intérieur de } \Sigma: \quad \frac{1}{MP} - W = \frac{1}{MP} - \sqrt{\frac{OQ}{OP}}\,\frac{1}{MQ} > 0.$$

La lettre M désigne toujours le point de coordonnées courantes x, y, z.

Ces égalités montre que l'on a:

$$\text{à l'extérieur de } \Sigma: \quad W < \sqrt{\frac{OQ}{OP}}\,\frac{1}{MQ},$$

$$\text{à l'intérieur de } \Sigma: \quad W = \sqrt{\frac{OQ}{OP}}\,\frac{1}{MQ}.$$

Par conséquent la couche équivalente à la masse intérieure 1 située en P est aussi équivalente à la masse extérieure $\sqrt{\frac{OQ}{OP}}$ située en Q.

Il importe de remarquer une différence essentielle entre les deux cas; nous savons que la masse totale de la couche équivalente à la masse 1 située en P est égale à 1 et par conséquent plus petite que $\sqrt{\frac{OQ}{OP}}$, c'est-à-dire que la masse extérieure située en Q.

Ainsi la couche équivalente à une masse *intérieure* a une masse totale *égale* à cette masse; la couche équivalente à une masse *extérieure* a une masse totale *plus petite* que cette masse.

A côté opérations dont il a été question plus haut et qui consistent à "balayer" l'intérieur des sphères S_i, nous pourrons introduire une opération nouvelle que nous pourrons appeler le balayage de l'extérieur de Σ.

Cette opération consistera à remplacer toutes les masses extérieures à Σ par la couche équivalente répandue à la surface de cette sphère.

Cela posé on fera une série de balayages successifs en partant de la fonction V_0 et en ayant soin de diriger les opérations de telle façon que l'intérieur de chacune des sphères S_i, ainsi que l'extérieur de Σ, soient balayés une infinité de fois.

Les raisonnements que nous avons faits plus haut sont encore applicables et on obtiendra une série de fonctions

$$V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

qui convergeront de la fonction cherchée V.

Seulement l'approximation sera plus rapide, parce que chaque balayage de l'extérieur de Σ, peut remplacer le balayage d'une infinité de sphères S_i qui devraient, dans la méthode primitive, remplir l'espace infini extérieur à Σ.

De plus, nous devons observer que dans la méthode primitive, chaque balayage laissait subsister la même quantité totale d'électricité dans l'espace ; au contraire, dans la méthode nouvelle, cette quantité totale diminue après chaque balayage de l'extérieur de Σ.

La méthode nouvelle se prête par conséquent mieux que la première au calcul des capacités.

Nous avons vu que le problème général de Dirichlet se ramène au cas que nous venons de traiter. Nous pourrions donc nous dispenser d'étudier directement ce cas général. Cependant je vais montrer que la méthode exposée ci-dessus y est directement applicable.

Soit donc C une surface partageant l'espace en deux régions l'une extérieure à la surface, l'autre intérieure. Soit U une fonction quelconque, bien déterminée en tous les points de C.

Nous nous proposons de trouver une fonction V:

1°. Qui est finie et continue ainsi que ses dérivées tant à l'extérieur de C qu'à l'intérieur, mais qui peut devenir discontinue sur la surface C elle-même.

2°. Qui satisfasse à l'équation de Laplace tant à l'extérieur de C qu'à l'intérieur, mais qui peut cesser d'y satisfaire sur la surface C elle-même.

3°. Qui tende vers O quand le point M de coordonnées courantes x, y, z s'éloigne indéfiniment.

4°. Qui tende vers U quand le point M se rapproche indéfiniment d'un point de C, soit par l'intérieur, soit par l'extérieur.

1er cas. Supposons qu'on puisse trouver une fonction V_0 finie et continue dans tout l'espace ainsi que ses dérivées des deux 1ers ordres ; qui soit égale à 0 à

l'infini et à U à la surface de C et qui soit telle que ΔV_0 soit constamment négatif.

Une pareille fonction pourra être regardée comme un potentiel dû à de l'électricité répandue dans tout l'espace et dont la densité $-\frac{\Delta V_0}{4\pi}$ sera partout positive.

Nous n'avons donc encore ici que des masses électriques positives.

Construirons maintenant une infinité de sphères $S_1, S_2, \ldots, S_n$, de telle façon que chacune de ces sphères soit tout entière extérieure à la surface C et que tout point de l'espace, extérieur à C, soit intérieur au moins à l'une des sphères S_i.

Balayons ensuite, comme il a été dit plus haut, ces diverses sphères S_i en dirigeant les opérations de telle sorte que chacune d'elles soit balayée une infinité de fois.

Soit V_n ce que devient V_0 après la n^e opération; on aura encore, puisque toutes les masses électriques sont positives:

$$V_{n+1} < V_n \text{ et } V_n > 0$$

ce qui montre que quand n croît indéfiniment V_n tend vers une limite finie et déterminée que j'appelle V. Pour un point intérieur à C on a $V_n = V_0$.

On verrait, comme plus haut, qu'à l'intérieur de chacune des sphères S_i, et par conséquent pour tout point extérieur à C, la fonction V est finie et continue ainsi que ses dérivées et satisfait à l'équation de Laplace.

On verrait également que V tend vers 0 quand le point M s'éloigne indéfiniment. Il me reste à montrer que V tend vers U quand le point M se rapproche de la surface C.

Nous supposerons pour fixer les idées que le point M se rapproche indéfiniment d'un point M_0 de la surface C en restant extérieur à cette surface.

Nous construirons une sphère σ tangente à la surface C en M_0 et de rayon assez petit pour être tout entière intérieure à C.

Le principe de Dirichlet étant démontré pour une sphère, nous pourrons construire une fonction W qui à l'extérieur de la sphère satisfasse à l'équation $\Delta W = 0$, qui se reduise à O à l'infini, et à V_0 à la surface de la sphère.

Quand le point M tendra vers M_0, la fonction W tendra vers V_0 et par conséquent vers U.

Comparons les fonctions V_n et W.

A la surface de σ, on a:

$$V_n = V_0 = W.$$

A l'infini, on a: $$V_n = 0 = W.$$

Maintenant V_n et W sont deux potentiels; le premier est engendré par des masses électriques toutes positives et dont quelques unes sont extérieures à σ; le second par des masses qui sont toutes intérieures à σ.

Donc à l'extérieur de σ la différence $V_n - W$ peut avoir des maxima, mais pas de minima; et comme elle est nulle à la surface de σ elle sera toujours positive. On a donc:

$$V_0 > V_n > W \text{ et par conséquent à la limite } V_0 > V > W.$$

Quand M tend vers M_0, V_0 et W tendent tous deux vers U. Donc V tend aussi vers U. C. Q. F. D.

Le principe de Dirichlet est ainsi établi pour la région extérieure à C; on le démontrerait absolument de la même manière pour la région intérieure.

2e cas. Supposons maintenant qu'on puisse trouver une fonction V_0 qui soit finie et continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, qui se réduise à O à l'infini et à U à la surface de C. (Nous ne supposons donc plus que ΔV_0 est toujours négatif.) On pourra trouver une fonction V_0 satisfaisant à ces conditions toutes les fois que *la fonction U sera elle-même finie et continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres.*

La fonction V_0 pourra être regardée comme un potentiel engendré par des masses électriques répandues dans tout l'espace avec une densité $-\frac{\Delta V_0}{4\pi}$. Seulement comme ΔV_0 n'est pas toujours négatif, les masses ne seront pas toutes positives. Nous pourrons alors écrire:

$$V_0 = V_0' - V_0'',$$

V_0' étant le potentiel dû aux masses positives seulement, et V_0'' le potentiel dû seulement aux masses négatives changées de signe.

Soient U' et U'' les valeurs de V_0' et V_0'' à la surface de C, on aura:

$$U = U' - U''.$$

V_0' et V_0'' n'étant engendrés que par des masses positives, on pourra, comme nous venons de le voir, construire des fonctions V' et V'' qui satisferont à l'équation

de Laplace à l'extérieur de C et qui se réduiront respectivement à U' et à U'' à la surface de C.

La différence $$V = V' - V''$$

satisfera à l'équation $\Delta V = 0$ et se réduira à U à la surface de C.

Le principe de Dirichlet est donc encore ici établi.

3e cas. Il nous reste à examiner le cas où la fonction U n'est plus continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres.

Bien des méthodes s'offrent à nous pour généraliser les résultats obtenus dans les deux premiers cas.

Je ferai d'abord observer que si la fonction U est elle-même continue et si ses dérivées du 1er ordre ne présentent de discontinuités que le long de certaines courbes analytiques tracées sur la surface C, les démonstrations dont j'ai fait usage dans les deux premiers cas peuvent se répéter sans qu'on ait rien à y changer.

Passons au cas général; nous pourrons trouver deux séries indéfinies de fonctions $$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots; U'_1, U'_2, \ldots, U'_n,$$

qui à la surface de C jouissent des propriétés suivantes:

1°. Elles sont finies et continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres.

2°. On a: $$U_{n+1} > U_n, \quad U'_{n+1} < U'_n, \quad U'_n > U_n.$$

3°. On a: $$\lim U_n = \lim U'_n = U \quad \text{pour } n \text{ infini.}$$

(Cela n'aura lieu que pour les points de C dans le voisinage desquels U est continue.)

Nous pourrons alors construire deux séries de fonctions

$$V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots; V'_1, V'_2, \ldots, V'_n$$

telles que $$\Delta V_n = 0 \quad \Delta V'_n = 0$$

à l'extérieur de C et $$V_n = U_n \quad V'_n = U'_n$$

à la surface de C. On aura alors:

$$V_{n+1} > V_n \quad V'_{n+1} < V'_n \quad V'_n > V_n.$$

Nous conclurons de là que V_n tend vers une limite finie et déterminée V.

Le théorème de Harnack montre que l'on a:

$$\Delta V = 0. \quad \text{D'ailleurs } V'_n > V > V_n.$$

Il reste à montrer que V tend vers U quand le point M se rapproche indéfiniment d'un point M_0 de la surface de C. Pour cela, il faut que dans le voisinage de M_0 la fonction U soit continue, sans quoi la proposition qu'il s'agit de démontrer serait fausse et n'aurait même pas de sens.

Nous voulons démontrer que l'on peut prendre M assez voisin de M_0 pour que

$$U - \varepsilon < V < U + \varepsilon$$

quelque petit que soit ε.

Comme au point M_0, U est continu, U_n et U'_n tendent vers une limite commune U quand n croît indéfiniment. Nous pourrons donc prendre n assez grand pour que :

$$U'_n - U_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où *a fortiori*

$$U'_n - U < \frac{\varepsilon}{2} \qquad U - U_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous regardons n comme désormais déterminé, nous pourrons prendre M assez voisin de M_0 pour que :

$$V_n > U_n - \frac{\varepsilon}{2} \qquad V'_n < U'_n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors :

$$V > V_n > U_n - \frac{\varepsilon}{2} > U - \varepsilon$$

et

$$V < V'_n < U'_n + \frac{\varepsilon}{2} < U + \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

§2.—*Problème de Fourier.*

Le problème de Fourier a pour objet l'étude du refroidissement d'un corps solide rayonnant. J'ai donné de ce problème, dans une note insérée aux Comptes Rendus, une solution plus rigoureuse et plus complète que celles qui ont été proposées jusqu'ici. Bien qu'elle ne soit pas encore entièrement satisfaisante, je crois qu'il ne sera pas inutile de la rappeler et de la développer ici ; car elle va nous servir de point de depart naturel pour ce qui va suivre.

Considérons un corps solide homogene et isotrope, isolé dans un milieu indéfini à travers lequel la chaleur se propage par rayonnement. Soit V la température d'un point du corps ; ce sera une fonction de x, y, z et t ; soit 0 la température extérieure. On aura, à l'intérieur du corps :

$$\frac{dV}{dt} = a^2 \Delta V \tag{1}$$

et à la surface du corps
$$\frac{dV}{dn} + hV = 0. \tag{2}$$

a^2 est un coefficient constant qui dépend de la conductibilité du corps et de sa chaleur spécifique. Quant à h c'est un coefficient positif et constant qui dépend du pouvoir émissif du corps.

Le premier point est d'établir l'existence d'une infinité de fonctions auxiliaires
$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$$
ne dépendant que de x, y, z et satisfaisant aux équations suivantes:

On aura à l'intérieur du corps:
$$\Delta U_n + k_n U_n = 0$$
et à la surface:
$$\frac{dU_n}{dn} + hU_n = 0.$$
Les quantités
$$k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$$
sont des coefficients constants que je supposerai rangés par ordre de grandeur croisante et que je déterminerai plus complètement dans la suite.

Enfin pour achever de définir la fonction U_n, nous ajouterons que l'intégrale
$$\int U_n^2 d\tau$$
étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du corps solide doit être égale à 1. Nous allons pour démontrer l'existence des fonctions U_n employer une démonstration analogue à celle par laquelle Riemann établit le principe de Dirichlet.

Soit F une fonction quelconque et posons:
$$A = \int F^2 d\tau,$$
$$B = h\int F^2 d\omega + \int \left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right] d\tau.$$

L'intégrale A ainsi que la seconde des intégrales de l'expression B sont étendues à tous les éléments $d\tau$ du volume du solide et l'intégrale $\int F^2 d\omega$ à tous les éléments $d\omega$ de sa surface.

Supposons que la fonction F soit assujettie à la condition
$$A = 1.$$

Les deux intégrales de l'expression B ont tous leurs éléments positifs. B ne peut donc devenir négatif. B ne peut non plus devenir nul; en effet il ne pourrait s'annuler que si tous les éléments des deux intégrales étaient nuls à la fois, c'est-à-dire si l'on avait :

$$F = 0$$

à la surface du corps et

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dz} = 0$$

à l'intérieur du corps. Il faudrait donc que F fût encore nul à l'intérieur du corps, ce qui est impossible à cause de la condition :

$$A = \int F^2 d\tau = 1.$$

B admettra donc un minimum absolu. Soit U_1 la valeur de F qui correspond à ce minimum. Le calcul des variations nous donne :

$$\frac{1}{2}\delta A = \int U_1 \delta U_1 d\tau = 0,$$

$$\frac{1}{2}\delta B = h\int U_1 \delta U_1 d\omega + \int\left(\frac{dU_1}{dx}\frac{d\delta U_1}{dx} + \frac{dU_1}{dy}\frac{d\delta U_1}{dy} + \frac{dU_1}{dz}\frac{d\delta U_1}{dz}\right)d\tau = 0.$$

Or le théorème de Green nous donne :

$$\int\left(\frac{dU_1}{dx}\frac{d\delta U_1}{dx} + \frac{dU_1}{dy}\frac{d\delta U_1}{dy} + \frac{dU_1}{dz}\frac{d\delta U_1}{dz}\right)d\tau = \int\frac{dU_1}{dn}\delta U_1 d\omega - \int \Delta U_1 \delta U_1 d\tau$$

de sorte qu'il vient :

$$\frac{1}{2}\delta B = \int\left(hU_1 + \frac{dU_1}{dn}\right)\delta U_1 d\omega - \int \Delta U_1 \delta U_1 d\tau = 0.$$

δB doit s'annuler toutes les fois que δA s'annule. On doit donc d'après l'une des régles du calcul des variations, pouvoir trouver une constante k_1 telle que

$$\delta B - k_1 \delta A$$

soit nulle quel que soit δU_1. On doit donc avoir identiquement :

$$\int\left(\frac{dU_1}{dn} + hU_1\right)\delta U_1 d\omega - \int(\Delta U_1 + k_1 U_1)\delta U_1 d\tau = 0$$

ce qui exige que tous les éléments des deux intégrales soient nuls ou que l'on ait à la surface du corps

$$\frac{dU_1}{dn} + hU_1 = 0$$

et à l'intérieur: $$\Delta U_1 + k_1 U_1 = 0.$$

On a d'ailleurs par hypothèse:

$$A = \int U_1^2 d\tau = 1.$$

L'existence de la fonction U_1 est donc démontrée.

On trouve:

$$B = h\int U_1^2 d\omega + \int \left[\left(\frac{dU_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU_1}{dz}\right)^2\right] d\tau$$

ou en vertu du théorème de Green:

$$B = \int U_1 \left(\frac{dU_1}{dn} + hU_1\right) d\omega - \int U_1 \Delta U_1 d\tau$$

ou en vertu des équations qui définissent U_1:

$$B = k_1 \int U_1^2 d\tau = k_1.$$

Ainsi k_1 n'est autre chose que la valeur du rapport $\frac{B}{A}$ pour $F = U_1$. Comme ce rapport atteint son minimum pour $F = U_1$, nous devons conclure que k_1 est le minimum du rapport $\frac{B}{A}$.

Prenons pour F une valeur quelconque, nous obtiendrons une certaine valeur de $\frac{B}{A}$ qui sera plus grande que k_1. C'est donc un moyen de trouver une limite supérieure de k_1.

Faisons par exemple $$F = 1.$$

Il vient:

$$A = \int d\tau = \text{volume du corps solide},$$

$$B = h\int d\omega = h \times \text{surface du corps solide}.$$

Le rapport $\frac{k_1}{h}$ est donc toujours plus petit que le rapport de la surface du solide à son volume.

Cherchons encore une autre inégalité.

Appelons W le volume du corps solide et S sa surface.

Prenons pour origine des coordonnées le centre de gravité du volume du corps,

Appelons I l'intégrale
$$\int x^2 d\tau$$
c'est-à-dire le moment d'inertie du volume par rapport au plan des yz.

Appelons H l'intégrale
$$\int x^2 d\omega$$
c'est-à-dire le moment d'inertie de la surface par rapport au plan des yz. Soit x_0 la distance du centre de gravité de la surface au plan des yz. Posons:
$$M = x_0 S = \int x d\omega.$$
Faisons maintenant: $$F = \alpha x + 1,$$
α étant une indéterminée; il viendra:
$$A = \int (\alpha x + 1)^2 d\tau = \alpha^2 I + W,$$
$$B = h\int (\alpha x + 1)^2 d\omega + \int \alpha^2 d\tau = \alpha^2 (hH + W) + 2\alpha Mh + Sh$$
d'où: $$k_1 < \frac{\alpha^2 (hH + W) + 2\alpha Mh + Sh}{\alpha^2 I + V}.$$
Il faut maintenant choisir α de telle sorte que le second membre de cette inégalité soit minimum. Ce second membre admet un maximum et un minimum qui sont les racines de l'équation en λ:
$$M^2 h^2 = (hH + W - \lambda I)(Sh - \lambda W)$$
ou $$\lambda^2 IV - \lambda (ISh + W^2 + WHh) + SHh^2 - M^2 h^2 + WSh = 0.$$

On a donc:
$$k_1 < \frac{ISh + W^2 + WHh}{2IW} - \frac{\sqrt{(ISh + WHh + W^2)^2 - SHh^2 + M^2 h^2 - WSh}}{2IW}$$
cette limite est inférieure à la précédente.

Occupons nous maintenant de démontrer l'existence de la fonction U_2; soit une fonction quelconque F assujettie aux deux conditions suivantes:
$$A = 1, \quad C = \int F U_1 d\tau = 0.$$

On pourra choisir cette fonction de façon que B soit minimum; soit U_2 la fonction qu'il faut choisir pour F afin de rendre B minimum. On devra avoir:
$$\frac{1}{2}\delta B = \int \left(hU_2 + \frac{dU_2}{dn}\right)\delta U_2 d\omega - \int \Delta U_2 \delta U_2 d\tau = 0$$

toutes les fois que:

$$\frac{1}{2}\delta A = \int U_2 \delta U_2 d\tau = 0 \qquad \delta C = \int U_1 \delta U_2 d\tau = 0.$$

On pourra donc trouver deux constantes λ_1 et k_2 telles que:

$$\delta B - k_2 \delta A - 2\lambda_1 \delta C = 0$$

quelque soit δU_2. On a donc identiquement:

$$\int \left(h U_2 + \frac{dU_2}{dn}\right) \delta U_2 d\omega - \int (\Delta U_2 + k_2 U_2 + \lambda_1 U_1) \delta U_2 d\tau = 0$$

de sorte qu'on aura à la surface du corps

$$h U_2 + \frac{dU_2}{dn} = 0$$

et à l'intérieur:

$$\Delta U_2 + k_2 U_2 + \lambda_1 U_1 = 0.$$

Calculons λ_1 et k_2. Nous trouvons d'abord:

$$\int U_1 \Delta U_2 d\tau + k_2 \int U_1 U_2 d\tau + \lambda_1 \int U_1^2 d\tau = 0.$$

Or

$$\int U_1^2 d\tau = 1 \qquad C = \int U_1 U_2 d\tau = 0,$$

on aura donc:

$$\lambda_1 + \int U_1 \Delta U_2 d\tau = 0.$$

Or le théorème de Green donne:

$$\int U_1 \Delta U_2 d\tau - \int U_2 \Delta U_1 d\tau = \int U_1 \frac{dU_2}{dn} d\omega = \int U_2 \frac{dU_1}{dn} d\omega.$$

Mais

$$\frac{dU_2}{dn} = -h U_2, \qquad \frac{dU_1}{dn} = -h U_1.$$

Il reste donc simplement:

$$\int U_1 \Delta U_2 d\tau = \int U_2 \Delta U_1 d\tau.$$

Mais

$$\Delta U_1 = -k_1 U_1.$$

Donc

$$\lambda_1 = \int U_1 \Delta U_2 d\tau = -k_1 \int U_1 U_2 d\tau = 0.$$

Donc λ_1 est nul.

Il vient donc:

$$\Delta U_2 + k_2 U_2 = 0$$

d'où:

$$\int U_2 \Delta U_2 d\tau + k_2 \int U_2^2 d\tau = 0.$$

Or
$$A = \int U_2^2 d\tau = 1.$$

Donc :
$$k_2 = -\int U_2 \Delta U_2 d\tau = -\int U_2 \frac{dU_2}{dn} d\omega + \int \left[\left(\frac{dU_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU_2}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU_2}{dz}\right)^2\right] d\tau$$

ou :
$$k_2 = h\int U_2^2 d\omega + \int \Sigma \left(\frac{dU_2}{dx}\right)^2 d\tau = B.$$

Ainsi k_2 n'est autre chose que la valeur de B qui correspond à $F = U_2$. k_1 était la valeur de B qui correspond à $F = U_1$ et au minimum de B.

Par conséquent on a :
$$k_1 < k_2$$

et d'ailleurs :
$$\frac{dU_2}{dn} + hU_2 = 0 \quad \text{à la surface du corps,}$$
$$\Delta U_2 + k_2 U_2 = 0 \quad \text{à l'intérieur,}$$
$$\int U_2^2 d\tau = 1 \qquad \int U_1 U_2 d\tau = 0.$$

L'existence de la fonction U_2 est donc démontrée.

Soit maintenant U_3 une fonction telle que
$$A = \int U_3^2 d\tau = 1, \quad C = \int U_3 U_1 d\tau = 0, \quad D = \int U_3 U_2 d\tau = 0$$

et choisie d'ailleurs de telle sorte que B soit aussi petit que possible.

On devra avoir : $\delta B = 0$

toutes les fois que
$$\delta A = 0, \quad \delta C = 0, \quad \delta D = 0.$$

On pourra donc trouver trois constantes λ_1, λ_2 et k_3 telles que l'on ait identiquement :
$$\delta B - k_3 \delta A - 2\lambda_1 \delta C - 2\lambda_2 \delta D = 0.$$

Un raisonnement analogue à celui qui précède montrerait que l'on doit avoir à la surface du corps $\frac{dU_3}{dn} + hU_3 = 0$

et à l'intérieur $\Delta U_3 + k_3 U_3 + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0.$

On demontrerait ensuite comme on l'a fait plus haut que λ_1 et λ_2 sont nuls et que k_3 est la valeur de B qui correspond à $F = U_3$.

D'après la définition de U_3, k_3 est donc la plus petite valeur que puisse prendre l'expression B quand la fonction F est assujettie aux conditions:

$$\int F^2 d\tau = 1; \quad \int F U_1 d\tau = 0; \quad \int F U_2 d\tau = 0.$$

D'autre part k_2 était la plus petite valeur que pouvait prendre B quand F était assujettie aux deux premières de ces conditions seulement. Donc:

$$k_3 > k_2.$$

La fonction U_3 est ainsi définie par les conditions:

$$\frac{dU_3}{dn} + hU_3 = 0, \quad \Delta U_3 + k_3 U_3 = 0,$$

$$\int U_3^2 d\tau = 1; \quad \int U_3 U_1 d\tau = \int U_3 U_2 d\tau = 0.$$

La loi est manifeste; il est inutile de pousser plus loin ce raisonnement. On voit que l'on a démontré l'existence d'une infinité de fonctions:

$$U_1, \; U_2, \; \ldots, \; U_p, \; \ldots$$

telles que l'on a à la surface du corps

$$\frac{dU_p}{dn} + hU_p = 0$$

et à l'intérieur:

$$\Delta U_p + k_p U_p = 0.$$

Les coefficients k_p sont des constantes positives et telles que:

$$k_{p+1} > k_p.$$

Enfin on a:

$$\int U_p U_q d\tau = 0 \qquad \text{pour } p \gtrless q$$

et

$$\int U_p^2 d\tau = 1.$$

Ce raisonnement est sujet aux mêmes objections que celui par lequel Riemann établit le principe de Dirichlet. Nous nous en contenterons toutefois pour le moment, nous chercherons dans la suite à le rendre plus rigoureux.

Ces fonctions U_p ont été entièrement construites par Lamé dans certains cas particuliers, par exemple dans celui de la sphère et celui du parallélipipède.

Dans celui du parallélipipède rectangle dont les trois dimensions parallèles aux trois axes sont $2a$, $2b$ et $2c$, l'expression des fonctions U_p et des coefficients k_p est particulièrement simple.

Nous devons avoir en effet à l'intérieur du corps:

$$\Delta U + kU = 0$$

et en outre:

$$\text{pour } x = a \quad \frac{dU}{dx} + hU = 0, \quad \text{pour } x = -a \quad \frac{dU}{dx} - hU = 0,$$

$$\text{pour } y = b \quad \frac{dU}{dy} + hU = 0, \quad \text{pour } y = -b \quad \frac{dU}{dy} - hU = 0,$$

$$\text{pour } z = c \quad \frac{dU}{dz} + hU = 0, \quad \text{pour } z = -c \quad \frac{dU}{dz} - hU = 0.$$

Posons:

$$U = \sin(\lambda_1 x + \mu_1) \sin(\lambda_2 x + \mu_2) \sin(\lambda_3 x + \mu_3).$$

Les constantes λ_1 et μ_1 nous seront données par les deux équations:

$$\lambda_1 \cos(\lambda_1 a + \mu_1) + h \sin(\lambda_1 a + \mu_1) = 0,$$

$$\lambda_1 \cos(\lambda_1 a - \mu_1) + h \sin(\lambda_1 a - \mu_1) = 0,$$

d'où:

$$\operatorname{tg}(\lambda_1 a + \mu_1) = \operatorname{tg}(\lambda_1 a - \mu_1),$$

$$\mu_1 = \frac{\varkappa\pi}{2},$$

$\varkappa$ étant un entier; il suffira de prendre $\varkappa = 0$ d'où:

$$\sin(\lambda_1 x + \mu_1) = \sin \lambda_1 x$$

et $\varkappa = 1$ d'où:

$$\sin(\lambda_1 x + \mu_1) = \cos \lambda_1 x.$$

On aura alors pour

$$\mu_1 = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{2} \qquad \lambda_1 + h \operatorname{tg}(\lambda_1 a + \mu_1) = 0.$$

De même μ_2, μ_3, λ_2 et λ_3 seront données par les équations:

$$\mu_2 = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{2} \qquad \lambda_2 + h \operatorname{tg}(\lambda_2 b + \mu_2) = 0.$$

$$\mu_3 = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{2} \qquad \lambda_3 + h \operatorname{tg}(\lambda_3 c + \mu_3) = 0.$$

Enfin on a:

$$k = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Considérons en particulier le cas de $h = 0$; ce qui correspond au cas où la surface du corps est imperméable à la chaleur; il vient

$$\operatorname{tg}(\lambda_1 a + \mu_1) = \infty$$

d'où:

$$\lambda_1 a + \mu_1 = \frac{\pi}{2} + \varkappa\pi \qquad \varkappa \text{ étant entier:}$$

ou à cause de $\mu_1 = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$.

$$\lambda_1 = \frac{m_1 \pi}{2a} \qquad m_1 \text{ étant entier.}$$

On a alors:

$$k = \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_3^2}{c^2}\right) \frac{\pi^2}{4}$$

où m_1, m_2, m_3 sont des entiers. On aura donc:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{\pi^2}{4a^2}$$

si $2a$ est la plus grande des trois dimensions du parallélipipède, c'est-à-dire si

$$a > b > c.$$

On trouve ainsi $\qquad k_1 = 0, \quad U_1 = \text{const.}$

et $\qquad k_2 = \frac{\pi^2}{4a^2}, \quad U_2 = \text{const. } \sin \lambda_1 x.$

Supposons maintenant $h = \infty$, ce qui correspond au cas où la surface du corps est maintenue artificiellement à la température 0; on a alors:

$$\operatorname{tg}(\lambda_1 a + \mu_1) = 0$$

d'où $\qquad \lambda_1 a + \mu_1 = \varkappa \pi, \qquad \varkappa$ étant entier,

ou puisque $\mu_1 = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$,

$$\lambda_1 a = m_1 \frac{\pi}{2}, \qquad m_1 \text{ étant entier.}$$

Nous trouvons donc encore:

$$k = \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_3^2}{c^2}\right) \frac{\pi^2}{4},$$

m_1, m_2 et m_3 étant entiers.

Mais toutes les solutions ne sont pas acceptables. On doit avoir en effet

$$U = 0$$

à la surface du corps; d'où:

$$\sin(\lambda_1 a + \mu_1) = \sin(\lambda_2 b + \mu_2) = \sin(\lambda_3 c + \mu_3) = 0,$$

ce qui exige que m_1, m_2 et m_3 soient au moins égaux à 1; il viendra donc:

$$k_1 = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \frac{\pi^2}{4}.$$

Laissons maintenant de côté le cas du parallélipipède rectangle et revenons au

cas général; il est clair que, pour un même corps, $k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$ sont des fonctions du pouvoir émissif h. Je dis que ces fonctions sont toujours croissantes. Soient en effet h' et h'' deux valeurs du pouvoir émissif; soient pour un corps donné, k'_n et k''_n les valeurs correspondantes de k_n, et U'_n et U''_n les fonctions U_n correspondantes. On aura:

à la surface du corps

$$\frac{dU'_n}{dn} + h' U'_n = \frac{dU''_n}{dn} + h'' U''_n = 0 \tag{3}$$

et à l'intérieur du corps:

$$\Delta U'_n + k'_n U'_n = \Delta U''_n + k''_n U''_n = 0. \tag{4}$$

Le théorème de Green nous donne:

$$\int \left(\frac{dU'_n}{dn} U''_n - \frac{dU''_n}{dn} U'_n \right) d\omega = \int (U''_n \Delta U'_n - U'_n \Delta U''_n)\, d\tau.$$

Dans cette identité remplaçons $\Delta U'_n$, $\Delta U''_n$, $\frac{dU'_n}{dn}$, $\frac{dU''_n}{dn}$ par leurs valeurs tirées des équations (2) et (4), il viendra:

$$(h' - h'') \int U'_n U''_n d\omega = (k'_n - k''_n) \int U'_n U''_n d\tau.$$

Supposons que h' et h'' diffère très peu de telle sorte que

$$h'' - h' = dh, \quad k''_n - k'_n = dk_n,$$

$U'_n = U''_n$ à des infiniments petits près, il vient:

$$dh \int U'^2_n d\omega = dk_n \int U'^2_n d\tau. \tag{5}$$

Dans l'équation (5), les deux intégrales sont essentiellement positives; il reste donc:

$$\frac{dk_n}{dh} > 0,$$

ce qui signifie que k_n est une fonction croissante de h. C. Q. F. D.

Pour $h = 0$; on a évidemment:

$$k_1 = 0, \quad U_1 = \text{const.} = \frac{1}{\sqrt{W}} \qquad (W \text{ étant le volume du corps}).$$

En effet, ces quantités satisfont aux équations

$$\Delta U_1 = \Delta U_1 + k_1 U_1 = 0, \quad \frac{dU_1}{dn} = 0.$$

L'équation (5) devient alors

$$\frac{dk_1}{dh} = \frac{S}{W},$$

S désignant la surface du corps et W son volume. Donc si h est très petit, k_1 est sensiblement égal à

$$h\frac{S}{W}.$$

Nous venons de trouver :

$$\frac{dh}{dk_n}\int U_n^2 d\omega = \int U_n^2 d\tau = 1.$$

Nous avons d'autre part :

$$k_n = h\int U_n^2 d\omega + \int\left[\left(\frac{dU_n}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU_n}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU_n}{dz}\right)^2\right] d\tau$$

d'où :

$$k_n > h\int U_n^2 d\omega, \quad \int U_n^2 d\omega < \frac{k_n}{h},$$

$$1 < \frac{k_n}{h}\,\frac{dh}{dk_n}$$

et

$$\frac{dk_n}{k_n} < \frac{dh}{h}.$$

Cette inegalité montre que le rapport $\frac{k_n}{h}$ va toujours en décroissant.

Il importe de remarquer, avant d'aller plus loin que quand h est positif, k_n est essentiellement positif. Sans doute, cela résulte de la façon dont les fonctions U_n ont été définies plus haut ; mais on pourrait imaginer qu'il existe des fonctions U autres que celles que nous venons de définir et pour lesquelles on aurait :

$$\frac{dU}{dn} + hU = 0, \quad \Delta U + kU = 0, \quad \int U^2 d\tau = 1, \quad k < 0.$$

Je dis que cela est impossible et il me suffit pour l'établir de montrer que l'on a :

$$k = h\int U^2 d\omega + \int\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2\right] d\tau,$$

ce qui se démontrerait par le même calcul que plus haut.

Si au contraire h était négatif, k_n pourrait aussi devenir négatif.

Il peut arriver quand on fait varier h, que deux des nombres k_n et k_{n+1} viennent à se confondre. Qu'arrivera-t-il alors en général ?

Soient k' et k'' deux valeurs de k, U' et U'' les fonctions U correspondantes. Imaginons que k', k'', U' et U'' soient des fonctions continues de h. Quand $h < h_0$, on aura par exemple $k' < k''$; pour $h = h_0$, on aura $k' = k''$; pour $h > h_0$,

on aura $k' > k''$. D'après ce que nous venons de démontrer, k' et k'' sont deux fonctions croissantes de h.

Maintenant, supposons qu'il y ait $n-1$ nombres k inférieurs à la fois à k' et à k''. Nous devrons, d'après nos conventions, appeler k_n la plus petite et k_{n+1} la plus grande des deux quantités k' et k''. Nous aurons donc :

$$k' = k_n \quad k'' = k_{n+1} \quad \text{pour } h < h_0$$

et

$$k'' = k_n \quad k' = k_{n+1} \quad \text{pour } h > h_0.$$

Les fonctions k' et k'' étant continues et croissantes, les fonctions k_n et k_{n+1} définies comme nous venons de le faire seront aussi continues et croissantes.

En résumé, dans tous les cas possibles, k_n est une fonction croissante de h; k_n atteint donc sa plus petite valeur pour $h = 0$.

Nous allons donc étudier la valeur de k_n pour $h = 0$.

Décomposons le volume de notre corps solide, d'une manière quelconque, en p volumes partiels. Considérons chacun de ces volumes partiels comme un corps solide de même conductibilité que le solide donné et dont la surface est imperméable à la chaleur. Soient :

$$\begin{array}{l} U_{11}\,,\ U_{12}\,,\ \ldots\ldots,\ U_{1n}\,,\ \ldots\ldots, \\ U_{21}\,,\ U_{22}\,,\ \ldots\ldots,\ U_{2n}\,,\ \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{p1}\,,\ U_{p2}\,,\ \ldots\ldots,\ U_{pn}\,,\ \ldots\ldots, \end{array}$$

les fonctions U relatives à ces p solides.

Soient :

$$\begin{array}{l} k_{11}\,,\ k_{12}\,,\ \ldots\ldots,\ k_{1n}\,,\ \ldots\ldots, \\ k_{21}\,,\ k_{22}\,,\ \ldots\ldots,\ k_{2n}\,,\ \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{p1}\,,\ k_{p2}\,,\ \ldots\ldots,\ k_{pn}\,,\ \ldots\ldots, \end{array}$$

les nombres k correspondants.

Comme pour chacun des p solides partiels on a $h = 0$, on aura :

$$k_{11} = k_{21} = \ldots\ldots = k_{p1} = 0$$

et les p fonctions $U_{11}, U_{21}, \ldots\ldots, U_{p1}$ seront des constantes.

Je conserverai la notation U_n et k_n pour les fonctions relatives au solide total. Posons maintenant :

$$V = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots\ldots + \alpha_n U_n,$$

les α étant des coefficients indéterminés.

Nous avons à la surface du corps, puisque h est supposé nul:

$$\frac{dV}{dn} = 0$$

et par conséquent en vertu du théorème de Green:

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] d\tau = -\int V \Delta V d\tau.$$

Le second membre peut s'écrire (en vertu de l'équation $\Delta U_i + k_i U_i = 0$):

$$\int (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_n U_n)(\alpha_1 k_1 U_1 + \alpha_2 k_2 U_2 + \ldots + \alpha_n k_n U_n)\, d\tau$$

ou encore $\left(\text{en vertu des relations} \int U_i^2 d\tau = 1, \quad \int U_i U_\kappa d\tau = 0\right)$:

$$k_1 \alpha_1^2 + k_2 \alpha_2^2 + \ldots + k_n \alpha_n^2.$$

D'autre part on a:

$$\int V^2 d\tau = \int (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_n U_n)^2 d\tau = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2,$$

d'où

$$\frac{\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] d\tau}{\int V^2 d\tau} = \frac{k_1 \alpha_1^2 + k_2 \alpha_2^2 + \ldots + k_n \alpha_n^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2} < k_n. \qquad (6)$$

Nous pouvons disposer de nos n coefficients arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de façon à satisfaire à $n - 1$ conditions. Voici comment nous choisirons ces conditions.

Nous annulerons d'abord les λ_1 intégrales

$$\int V U_{11} d\tau, \quad \int V U_{12} d\tau, \ldots, \quad \int V U_{1\lambda_1} d\tau$$

étendues au premier solide partiel.

Nous annulerons ensuite les λ_2 intégrales

$$\int V U_{21} d\tau, \ldots, \quad \int V U_{2\lambda_2} d\tau$$

étendues au second solide partiel.

Nous annulerons enfin les λ_p intégrales

$$\int V U_{p1} d\tau, \ldots, \quad \int V U_{p\lambda_p} d\tau$$

étendues au dernier solide partiel.

Nous devrons avoir d'ailleurs :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots . + \lambda_p = n - 1. \tag{7}$$

Rappelons quelle est la définition de $k_{1.\lambda_1+1}$. Ce coefficient est le minimum du rapport des deux intégrales :

$$B = \int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] d\tau, \quad A = \int V^2 d\tau;$$

quand la fonction arbitraire V est assujettie aux λ_1 conditions :

$$\int V U_{11} d\tau = \int V U_{12} d\tau = \ldots . = \int V U_{1\lambda_1} d\tau = 0.$$

Toutes les intégrales sont supposées étendues au premier solide partiel. Donc le rapport des deux intégrales B et A étendues à ce premier solide est plus grand que $k_{1.\lambda_1+1}$.

On verrait de même que le rapport de ces deux intégrales étendues au second solide est plus grand que $k_{2.\lambda_2+1}$, etc.; que le rapport de ces deux intégrales étendues au p^e solide partiel est plus grand que $k_{p.\lambda_p+1}$.

Donc le rapport des deux intégrales B et A étendues au solide total, sera plus grand que la plus petite des p quantités :

$$k_{1.\lambda_1+1}, \quad k_{2.\lambda_2+1}, \ldots . , k_{p.\lambda_p+1}. \tag{8}$$

Mais l'inégalité (6) exprime que ce même rapport est plus petit que k_n.

Donc k_n est plus grand que la plus petite des quantités (8) pourvu que la relation (7) soit satisfaite.

Ce résultat peut s'énoncer comme il suit :

Rangeons les quantités

$$\begin{array}{l} k_{11}, \; k_{12}, \ldots . , k_{1n}, \ldots . \\ k_{21}, \ldots . \ldots , k_{2n}, \ldots . \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ k_{p1}, \ldots \ldots \ldots , k_{pn}, \ldots . \end{array}$$

par ordre de grandeur croissante. (Il va sans dire que dans la série ainsi obtenue, plusieurs termes pourront être égaux ; c'est ainsi que les p premiers termes qui sont $k_{11}, k_{21}, \ldots . , k_{p1}$ sont tous égaux à 0.)

Chacun des termes de la série ainsi obtenue sera plus petit que le terme correspondant de la série :

$$k_1, k_2, \ldots . , k_n, \ldots .$$

Cela posé, supposons que notre solide soit un polyèdre limité par des faces qui soient toutes parallèles à l'un des trois plans de coordonnées.

Nous pourrons décomposer notre polyèdre en $n-1$ parallélipipèdes rectangles. Soient

$$k_{12},\ k_{22},\ \ldots,\ k_{n-1.2} \tag{9}$$

les valeurs de k_2 correspondant à ces $n-1$ parallélipipèdes; d'après ce que nous venons de voir, la valeur de k_n correspondant au polyèdre total, sera plus grande que la plus petite des quantités (9).

Si les trois dimensions d'un parallélipipède sont $2a$, $2b$, $2c$ de telle sorte que $a > b > c$; nous avons vu qu'on a, pour ce parallélipipède:

$$k_2 = \frac{\pi^2}{4a^2}.$$

Si donc aucune des trois dimensions d'aucun de nos $n-1$ parallélipipèdes partiels n'excède a, on aura pour le polyèdre total

$$k_n > \frac{\pi^2}{4a^2}.$$

Quand n croît indéfiniment, on peut faire tendre a vers 0; donc k_n croît indéfiniment.

Cela est vrai pour un polyèdre formé comme je viens de le dire; et comme on peut construire de pareils polyèdres qui diffèrent aussi peu qu'on le veut d'un solide quelconque, on pourrait dire que cela doit être vrai aussi d'un solide quelconque. Mais un semblable raisonnement ne saurait nous contenter.

Pour démontrer le théorème pour un solide quelconque, je dois d'abord chercher une limite inférieure de k_2 pour un solide *convexe* quelconque. Par solide convexe, j'entends un corps tel que le segment de droite MM', qui joint deux points M et M' intérieurs au corps, soit toujours tout entier intérieur au corps; ou ce qui revient au même tel qu'aucune droite ne rencontre la surface du corps en plus de deux points.

Rappelons d'abord la définition de k_2; k_2 est le minimum du rapport

$$\frac{\int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]d\tau}{\int V^2 d\tau}$$

quand la fonction V et assujettie à la condition:

$$\int V d\tau = 0. \tag{10}$$

On peut transformer la définition de façon à faire disparaître cette dernière condition.

Envisageons l'intégrale

$$\int (V - V')^2 d\tau\, d\tau'.$$

Dans cette intégrale, $d\tau$ et $d\tau'$ sont deux éléments de volume quelconques du solide donné ; x, y, z, et x', y', z' sont les coordonnées du centre de gravité de chacun de ces deux éléments ; V et V' sont les valeurs de la fonction V aux points x, y, z et x', y', z' ; enfin l'intégrale est étendue à toutes les combinaisons de deux éléments de volume $d\tau$ et $d\tau'$. (Chaque combinaison sera répétée deux fois de la façon suivante ; une première fois le premier élément jouera le rôle de $d\tau$ et le second celui de $d\tau'$ et la seconde fois ce sera le contraire.)

On trouve aisément en se servant de la relation (10) et en appelant W le volume total du corps

$$\int (V - V')^2 d\tau d\tau' = 2W \int V^2 d\tau$$

de sorte que k_2 sera le minimum de l'expression

$$\frac{2W \int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] d\tau}{\int (V - V')^2 d\tau\, d\tau'}. \tag{11}$$

Mais alors la condition (10) devient inutile ; si en effet on ajoute à V une constante quelconque, la condition (10) cesse d'être satisfaite et l'expression (11) ne change pas.

Nous pouvons donc dire finalement que k_2 est le minimum de l'expression (11), la fonction V étant tout à fait quelconque et n'étant assujettie à aucune condition.

C'est de la transformation de cette expression (11) que nous allons maintenant nous occuper.

Posons à cet effet :

$$\begin{aligned} x &= \xi + \rho \cos\phi \sin\theta, & x' &= \xi + \rho' \cos\phi \sin\theta, \\ y &= \eta + \rho \sin\phi \sin\theta, & y' &= \eta + \rho' \sin\phi \sin\theta, \\ z &= \rho \cos\theta \qquad\qquad , & z' &= \rho' \cos\theta. \end{aligned} \tag{12}$$

La théorie de la transformation des intégrales multiples nous donne :

$$\begin{aligned} \int (V - V')^2 d\tau\, d\tau' &= \int (V - V')^2 dx\, dy\, dz\, dx'\, dy'\, dz' \\ &= \int (V - V')^2 (\rho - \rho')^2 \sin\theta \cos\theta\, d\xi\, d\eta\, d\rho\, d\rho'\, d\theta\, d\phi. \end{aligned}$$

Il va sans dire que, bien que je n'emploie qu'un seul signe $\int$, il s'agit ici d'intégrales sextuples.

Parlons maintenant des limites d'intégration; supposons que ξ, η, θ et ϕ soient considérés un instant comme des constantes; quand on fera varier ρ, le point x, y, z décrira une droite; comme le corps est convexe, cette droite rencontrera la surface du corps en deux points. Soient ρ_0 et ρ_1 les valeurs de ρ qui correspondent à ces deux points d'intersection.

Pour obtenir alors tous les points (x, y, z), (x', y', z') intérieurs au corps il faudra faire varier ρ et ρ' de ρ_0 à ρ_1, θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ϕ de 0 à 2π, et donner à ξ et à η toutes les valeurs telles que ρ_0 et ρ_1 soient réels.

Cela posé, cherchons à transformer le numérateur de l'expression (11).

Nous avons d'abord, en vertu des équations (12):

$$\frac{dV}{d\rho} = \cos\phi \sin\theta \frac{dV}{dx} + \sin\phi \sin\theta \frac{dV}{dy} + \cos\theta \frac{dV}{dz}$$

d'où:

$$\int\int\left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 \sin\theta d\theta d\phi$$
$$= \int\int\left(\cos\phi \sin\theta \frac{dV}{dx} + \sin\phi \sin\theta \frac{dV}{dy} + \cos\theta \frac{dV}{dz}\right)^2 \sin\theta d\theta d\phi.$$

Calculons cette intégrale double en intégrant entre les limites 0 et 2π pour ϕ et entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour θ. Le coefficient de $\left(\frac{dV}{dx}\right)^2$ sera:

$$\int\int \cos^2\phi \sin^3\theta d\theta d\phi = \frac{2\pi}{3}.$$

Il est aisé de voir que le coefficient de $\left(\frac{dV}{dy}\right)^2$ a la même valeur.

Le coefficient de $\left(\frac{dV}{dz}\right)^2$ sera:

$$\int\int \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \frac{2\pi}{3}.$$

Le coefficient de $2\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dy}$ sera:

$$\int\int \cos\phi \sin\phi \sin^3\theta \, d\theta \, d\phi = 0.$$

Ceux de

$$2\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dz} \text{ et de } 2\frac{dV}{dy}\frac{dV}{dz} \text{ seront :}$$

$$\int\int \cos\phi \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta\, d\phi = \int\int \sin\phi \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta\, d\phi = 0.$$

Il reste donc simplement :

$$\int\int \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{2\pi}{3}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right].$$

Soit M une fonction quelconque de x, y et z; la théorie de la transformation des intégrales multiples donne :

$$\int M d\tau = \int M dx\, dy\, dz = \int M \cos\theta\, d\xi\, d\eta\, d\rho.$$

Il vient donc :

$$\int \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 \sin\theta \cos\theta\, d\xi\, d\eta\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \frac{2\pi}{3}\int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] d\tau.$$

Posons maintenant pour abréger :

$$B = \int_{\rho_0}^{\rho_1}\left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 d\rho, \quad A = \int_{\rho_0}^{\rho_1} d\rho \int_{\rho_0}^{\rho_1} d\rho' \,(V - V')^2(\rho - \rho')^2,$$

l'expression (11) deviendra :

$$\frac{3W}{\pi}\,\frac{\int B \sin\theta \cos\theta\, d\xi\, d\eta\, d\theta\, d\phi}{\int A \sin\theta \cos\theta\, d\xi\, d\eta\, d\theta\, d\phi}.$$

Les quantités sous les deux signes $\int$ sont essentiellement positives puisque θ varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Pour trouver une limite inférieure de l'expression (11), il nous suffira de connaître une limite inférieure du rapport $\frac{B}{A}$. C'est de quoi nous allons maintenant nous occuper.

Si la fonction V est choisie de telle façon que $A = 1$, il est clair que l'intégrale B ne pourra pas s'annuler ; elle admettra donc un certain minimum. Cherchons à déterminer ce minimum par le calcul des variations.

Nous trouvons:

$$\frac{1}{2}\delta B = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{dV}{d\rho}\,\frac{d\delta V}{d\rho}\,d\rho = 0,$$

$$\frac{1}{2}\delta A = \int\int (V - V')(\delta V - \delta V')(\rho - \rho')^2\,d\rho\,d\rho' = 0.$$

Transformons ces deux expressions, nous trouvons, par l'intégration par parties,

$$\frac{1}{2}\delta B = \left[\frac{dV}{d\rho}\,\delta V\right]_{\rho_0}^{\rho_1} - \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d^2V}{d\rho^2}\,\delta V d\rho = 0.$$

D'autre part, si dans l'intégrale double

$$J = \int\int (V - V')\,\delta V\,(\rho - \rho')^2\,d\rho d\rho'$$

on permute ρ et ρ', l'intégrale ne doit pas changer il vient ainsi:

$$J = \int\int (V' - V)\,\delta V'\,(\rho' - \rho)^2\,d\rho\,d\rho',$$

d'où

$$\frac{1}{2}\delta A = 2J$$

et

$$J = \int\int (V - V')(\rho - \rho')^2\,\delta V d\rho\,d\rho' = 0.$$

Cela peut s'écrire:

$$J = \int_{\rho_0}^{\rho_1} H\delta V d\rho = 0$$

en posant:

$$H = V\int_{\rho_0}^{\rho_1} (\rho - \rho')^2\,d\rho' - \int_{\rho_0}^{\rho_1} V'\,(\rho - \rho')^2\,d\rho'.$$

Posons donc pour abréger:

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} d\rho' = \rho_1 - \rho_0;\quad \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho' d\rho' = \frac{\rho_1^2 - \rho_0^2}{2};\quad \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho'^2 d\rho' = \frac{\rho_1^3 - \rho_0^3}{3},$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} V' d\rho' = \int_{\rho_0}^{\rho_1} V d\rho = \alpha;\quad \int_{\rho_0}^{\rho_1} V'\rho' d\rho' = \int_{\rho_0}^{\rho_1} V\rho d\rho = \beta;\quad \int_{\rho_0}^{\rho_1} V'\rho'^2 d\rho' = \gamma.$$

Il viendra:

$$H = V\left[\rho^2(\rho_1 - \rho_0) - \rho(\rho_1^2 - \rho_0^2) + \frac{\rho_1^3 - \rho_0^3}{3}\right] - \alpha\rho^2 + 2\beta\rho - \gamma.$$

Pour que B soit minimum, il faut d'après les règles du calcul des variations que δB s'annule toutes les fois que J est nul et pour cela il faut que l'on ait:

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} + KH = 0,$$

K étant une constante qu'il reste à déterminer.

Voyons comment le problème pourra être traité.

Posons d'abord

$$\rho = \lambda + \sigma, \quad \lambda = \frac{\rho_1 + \rho_0}{2}, \quad \rho_1 = \lambda + \sigma_0, \quad \rho_0 = \lambda - \sigma_0,$$

nos équations deviendront:

$$\frac{d^2 V}{d\sigma^2} + KH = 0,$$

$$H = V\left[2\sigma^2\sigma_0 + \frac{2\sigma_0^3}{3}\right] - \alpha'\sigma^2 + 2\beta'\sigma - \gamma',$$

où:

$$\alpha' = \int V d\sigma, \quad \beta' = \int V\sigma d\sigma, \quad \gamma' = \int V\sigma^2 d\sigma,$$

les intégrales étant prises entre les limites $-\sigma_0$ et $+\sigma_0$.

Posons maintenant $\sigma = \sigma_0 t$,

$$\alpha'' = \int_{-1}^{+1} V dt, \quad \beta'' = \int_{-1}^{+1} V t dt, \quad \gamma'' = \int_{-1}^{+1} V t^2 dt. \tag{13}$$

L'équation devient:

$$\frac{1}{K'}\frac{d^2 V}{dt^2} + 2V\left[t^2 + \frac{1}{3}\right] - \alpha'' t^2 + 2\beta'' t - \gamma'' = 0. \qquad K' = K\sigma_0^5$$

L'équation (14) contient encore quatre indéterminées, α'', β'', γ'' et K'. Si nous l'intégrons nous trouverons:

$$V = \alpha'' V_1 + \beta'' V_2 + \gamma'' V_3 + \delta'' V_4 + \varepsilon'' V_5,$$

V_1, V_2, V_3, V_4 et V_5 étant des fonctions entièrement connues de t et de K' pendant que δ'' et ε'' sont deux constantes d'intégration.

Pour achever de connaître V il nous restera à déterminer les six constantes α'', β'', γ'', δ'', ε'' et K'. Pour cela nous avons six équations; à savoir, les trois équations (13), l'équation $A = 1$ et les deux relations

$$\frac{dV}{d\rho} = 0 \text{ pour } \rho = \rho_0, \quad \frac{dV}{d\rho} = 0 \text{ pour } \rho = \rho_1.$$

Ces six équations ne suffisent pas toutefois pour déterminer complètement ces six constantes et en particulier K'. On trouve pour K' une infinité de valeurs positives. Nous prendrons la plus petite de ces valeurs que j'appellerai K_0.

Je n'ai pas besoin pour mon objet de calculer effectivement K_0; il me suffit de faire observer que c'est une *constante numérique.*

Il vient alors:

$$K = \frac{K_0}{\sigma_0^5} = \frac{4K_0}{(\rho_1 - \rho_0)^5}.$$

Il nous reste à chercher le minimum de $\frac{B}{A}$ correspondant à cette valeur de K.

Nous trouvons:

$$B = \left[\frac{dV}{d\rho}\, V\right]_{\rho_0}^{\rho_1} - \int \frac{d^2 V}{d\rho^2}\, V d\rho = -\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d^2 V}{d\rho^2}\, V d\rho = K \int V H d\rho,$$

ou

$$B = K \int d\rho\, V \left[V \int (\rho - \rho')^2\, d\rho' - \int V' (\rho - \rho')^2\, d\rho' \right]$$

$$= K \int\int V (V - V')(\rho - \rho')^2\, d\rho d\rho'.$$

Or l'intégrale du second membre ne doit pas changer quand on permute ρ et ρ'; on a donc aussi

$$B = -K \int\int V' (V - V')(\rho - \rho')^2\, d\rho d\rho',$$

d'où

$$B = \frac{K}{2} \int\int (V - V')^2 (\rho - \rho')^2\, d\rho d\rho' = \frac{K}{2} A.$$

Ainsi le minimum de $\frac{B}{A}$ est égal à

$$\frac{K}{2} = \frac{2K_0}{(\rho_1 - \rho_0)^5}.$$

Pour une fonction V quelconque on aura donc:

$$\frac{B}{A} > \frac{2K_0}{(\rho_1 - \rho\ )^5}. \tag{15}$$

Soit λ la plus grande distance de deux points de la surface du corps solide envisagé on aura

$$\frac{B}{A} > \frac{2K_0}{\lambda^5}.$$

Il est à remarquer que si je n'avais pas voulu indiquer sommairement la manière de calculer la constante numérique K_0, j'aurais pu arriver à la formule (15) en quelques lignes par de simples considérations d'homogénéité.

Il suit de là que l'expression (11) est toujours plus grande que

$$\frac{6K_0 W}{\pi \lambda^5}.$$

Par conséquent *pour un solide convexe quelconque on a*:

$$k_2 > \frac{6K_0 W}{\pi \lambda^5},$$

K_0 désignant une constante numérique, W le volume du corps, et λ la plus grande distance de deux points de la surface du corps.

Cela posé passons à un solide quelconque ; on peut le décomposer en $n-1$ solides partiels convexes. On calculera pour chacun de ces solides le rapport $\frac{W}{\lambda^5}$; imaginons que pour tous ces solides $\frac{W}{\lambda^5}$ soit plus grand que α ; on aura pour le solide total

$$k_n > \frac{6K_0}{\pi}\alpha.$$

Or nous pouvons prendre n assez grand et choisir nos $n-1$ solides partiels de telle sorte que la quantité que nous venons d'appeler α soit aussi grande que l'on veut.

Donc k_n sera également aussi grand que l'on voudra.

Donc *pour un solide quelconque k_n croît indéfiniment avec n.*

Nous avons démontré ce théorème dans le cas où $h=0$; cela doit suffire ; car k_n est croissant avec h ; le théorème peut donc être regardé comme démontré pour toutes les valeurs positives de h.

Je ne veux pas quitter ce sujet sans avoir indiqué un moyen de calculer une limite supérieure de k_n.

Posons $$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_n F_n,$$

$F_1, F_2, \ldots, F_n$ étant des fonctions données et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des coefficients indéterminés.

Les deux intégrales :

$$B = h\int F^2 d\omega + \int\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right] d\tau, \quad A = \int F^2 d\tau,$$

seront des formes quadratiques dépendant des n paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Formons la forme quadratique :

$$B - \lambda A$$

où λ est un nouveau coefficient indéterminé.

Ecrivons que le discriminant de la forme $B - \lambda A$ est nul ; nous obtiendrons une équation algébrique d'ordre n en λ ; il est aisé d'établir que cette équation a toutes ces racines réelles (parce que les deux formes B et A sont définies positives ; il suffirait d'ailleurs que l'une d'elles le fût. Mais de ce que les deux formes sont toutes deux définies positives, il résulte que les racines sont non-seulement réelles, mais positives).

Soient $$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

ces n racines rangées par ordre de grandeur croissante; je dis qu'on aura:

$$\lambda_1 > k_1,\ \lambda_2 > k_2,\ \lambda_3 > k_3, \ldots\ldots, \lambda_n > k_n.$$

En effet la plus petite valeur que puisse prendre le rapport $\frac{B}{A}$ quand on fait varier les α doit être plus grande que k_1. Or cette plus petite valeur est λ_1; on a donc

$$\lambda_1 > k_1.$$

En vertu de la théorie des formes quadratiques, la forme A peut être décomposée en n carrés et s'écrire:

$$A = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots\ldots + \beta_n^2,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n$ étant des fonctions linéaires de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$.

De plus cette décomposition peut être faite de telle sorte que

$$B = \lambda_1\beta_1^2 + \lambda_2\beta_2^2 + \ldots\ldots + \lambda_n\beta_n^2.$$

Introduisons maintenant les conditions:

$$\int FU_1 d\tau = \int FU_2 d\tau = \ldots\ldots = \int FU_p d\tau = 0. \tag{16}$$

Le minimum de $\frac{B}{A}$, en tenant compte des conditions (16), devra être plus grand que k_{p+1}.

Cherchons ce minimum. Les conditions (16) sont linéaires par rapport aux β de sorte qu'on peut les écrire:

$$\begin{array}{l} \mu_{11}\beta_1 + \mu_{12}\beta_2 + \ldots\ldots + \mu_{1n}\beta_n = 0, \\ \mu_{21}\beta_1 + \mu_{22}\beta_2 + \ldots\ldots + \mu_{2n}\beta_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu_{p1}\beta_1 + \mu_{p2}\beta_2 + \ldots\ldots + \mu_{pn}\beta_n = 0. \end{array} \tag{16 bis}$$

Soit λ le minimum cherché du rapport $\frac{B}{A}$. On voit par des calculs qu'il est inutile de reproduire ici que ce minimum qui nous est donné par l'équation suivante, dont je vais expliquer la signification:

$$\Sigma H^2 \Pi(\lambda - \lambda_i) = 0. \tag{17}$$

$\Pi(\lambda - \lambda_i)$ sera le produit de $n - p$ binômes tels que $\lambda - \lambda_i$. Supprimons dans les équations (16 bis) tous les β_i qui ont même indice que les λ_i qui entrent dans le produit $\Pi(\lambda - \lambda_i)$; nous appellerons H le déterminant des équations linéaires ainsi obtenues. Enfin la sommation indiquée par le signe Σ est étendue à toutes les combinaisons des n quantités λ_i prises $n - p$ à $n - p$.

On voit qu'en substituant dans l'équation (17) successivement

$$-\infty,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ldots,\ \lambda_n,\ +\infty$$

on obtient au moins p changements de signe. Par conséquent la plus petite racine de l'équation (17) sera au plus égale à λ_{p+1}. On a donc:

$$\lambda_{p+1} > k_{p+1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Je termine ce paragraphe en donnant une nouvelle manière de calculer une limite supérieure de k_2 pour $h = 0$.

Soient f, g, h trois fonctions quelconques assujetties à la condition suivante:

A la surface du corps on aura:

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0, \tag{18}$$

α, β, γ désignant les trois cosinus directeurs de la normale à cette surface.

De plus nous assujettirons nos trois fonctions à la condition

$$A = \int (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau = 1. \tag{19}$$

L'intégrale

$$B = \int \left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dz}\right)^2\right] d\tau$$

aura évidemment un minimum. Cherchons ce minimum. Posons:

$$\theta = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}.$$

Nous trouverons, par le calcul des variations:

$$\alpha\delta f + \beta\delta g + \gamma\delta h = 0 \qquad \text{(à la surface du corps)} \tag{18 bis}$$

et

$$\frac{1}{2}\,\delta A = \int (f\delta f + g\delta g + h\delta h)\, d\tau = 0,$$

$$\frac{1}{2}\,\delta B = \int \theta \left(\frac{d\delta f}{dx} + \frac{d\delta g}{dy} + \frac{d\delta h}{dz}\right) d\tau = 0.$$

L'intégration par parties donne:

$$\frac{1}{2}\,\delta B = \int \theta\,(\alpha\delta f + \beta\delta g + \gamma\delta h)\, d\omega - \int \left(\frac{d\theta}{dx}\,\delta f + \frac{d\theta}{dy}\,\delta g + \frac{d\theta}{dz}\,\delta h\right) d\tau,$$

ou en vertu (18 bis)

$$\frac{1}{2}\,\delta B = -\int \left(\frac{d\theta}{dx}\,\delta f + \frac{d\theta}{dy}\,\delta g + \frac{d\theta}{dz}\,\delta h\right) d\tau = 0.$$

Pour que δB soit nul toutes les fois que δA est nul, il faut donc que l'on ait:

$$kf + \frac{d\theta}{dx} = 0, \quad kg + \frac{d\theta}{dy} = 0, \quad kh + \frac{d\theta}{dz} = 0, \tag{20}$$

k étant une constante qu'il reste à déterminer.

Des équations (20) on tire par différentiation et addition:

$$\Delta\theta + k\theta = 0$$

et l'équation (18) devient:

$$\frac{d\theta}{dn} = 0.$$

Cela montre que θ est l'une des fonctions U que nous avons définies plus haut; ce ne peut être que U_2; on a $k = k_2$, et pour $\theta = U_2$ on trouve:

$$\frac{B}{A} = \frac{\int \theta^2 d\tau}{\int (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau} = \frac{k_2^2 \int U_2^2 d\tau}{\int \left[\left(\frac{dU_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU_2}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU_2}{dz}\right)^2\right] d\tau} = k_2.$$

Pour des fonctions f, g, h quelconques on aura donc

$$\frac{B}{A} > k_2,$$

d'où la règle suivante.

On prend trois fonctions quelconques f, g, h assujetties à la condition (18). $\left(\text{La condition (19) devient inutile dès qu'on considère le rapport } \frac{B}{A}\right)$. Le rapport

$$\frac{\int \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}\right)^2 d\tau}{\int (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau}$$

est plus grand que k_2.

§3.—*Lois du Refroidissement.*

Soit V la température d'un point du corps solide; V sera une fonction de x, y, z et de t. Cette température devra satisfaire aux deux équations suivantes:

A l'intérieur du corps: (1) $\frac{dV}{dt} = a^2 \Delta V.$

A la surface du corps: (2) $\frac{dV}{dn} + hV = 0.$

La température est donnée arbitrairement à l'époque initiale $t = 0$. Il peut donc se faire qu'à cette époque $t = 0$, l'équation (2) ne soit pas satisfaite; mais elle devra l'être pour toute époque postérieure $t > 0$. C'est là une première anomalie qui vaut la peine d'être remarquée.

En voici une seconde: V ne peut pas en général être développée suivant les puissances croissantes de t. Supposons en effet que cela soit possible; qu'arrivera-t-il? Soit V_0 la valeur de V pour $t = 0$. On aura pour $t = 0$:

$$\frac{dV}{dt} = a^2 \Delta V_0, \quad \frac{d^2 V}{dt^2} = a^2 \Delta \frac{dV}{dt} = a^4 \Delta\Delta V_0$$

ou

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = a^4 \Delta^2 V_0$$

en convenant de poser:

$$\Delta^n V = \Delta(\Delta^{n-1} V).$$

On aura ainsi en général:

$$\frac{d^n V}{dt^n} = a^{2n} \Delta^n V_0;$$

de sorte que si le développement était possible, il viendrait:

$$V = V_0 + a^2 t \Delta V_0 + \frac{a^4 t^2}{1.2} \Delta^2 V_0 + \frac{a^6 t^3}{1.2.3} \Delta^3 V_0 + \ldots.$$

Il résulterait de là que la température en un point donné et à un instant donné ne dépendrait plus que de la valeur de V_0 et de ses dérivées en ce point. *La forme du corps solide n'interviendrait en aucune façon.* Cela est absurde.

Pour mieux faire comprendre ces anomalies, nous allons envisager un cas particulier. Imaginons que le solide devienne un mur indéfini compris entre les deux plans

$$x = \pm \pi.$$

Supposons que les deux plans $x = \pm \pi$ qui limitent le mur soient imperméables à la chaleur ce qui revient à supposer $h = 0$.

Supposons de plus qu'à l'époque $t = 0$; la température initiale V_0 ne dépende que de x et ne change pas quand on change x en $-x$.

Ces propriétés subsisteront évidemment à une époque quelconque. V sera fonction de x et de t seulement et ne changera pas quand on changera x en $-x$.

Dans ces conditions on peut poser:

$$V = \Sigma \phi_m(t) \cos mx.$$

Nous aurons alors
$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} = -\Sigma m^2 \phi_m(t) \cos mx,$$
$$\frac{dV}{dt} = \Sigma \phi'_m(t) \cos mx.$$

Si dans l'équation
$$\frac{dV}{dt} = a^2 \Delta V$$

nous faisons $a^2 = 1$ pour simplifier il vient:
$$\phi'_m(t) + m^2 \phi_m(t) = 0$$

d'où
$$\phi_m(t) = A_m e^{-m^2 t}$$

et enfin
$$V = \Sigma A_m e^{-m^2 t} \cos mx.$$

Donnons-nous la température V_0 à l'instant initial $t = 0$. V_0 pourra toujours être développée par la série de Fourier sous la forme:
$$V_0 = \Sigma A_m \cos mx.$$

La série du 2^d membre $\Sigma A_m \cos mx$ est toujours convergente, mais la convergence peut n'être pas absolue.

En vertu d'un théorème d'Abel, si l'on prend
$$V = \Sigma A_m e^{-m^2 t} \cos mx \tag{3}$$

on aura quand t tendra vers 0
$$\lim V = V_0.$$

L'équation (3) nous fournit donc la solution du problème.

Il semble que la condition $h = 0$ n'ait joué aucun rôle dans ce calcul; ce n'est là qu'une apparence à la quelle il ne faut pas se tromper.

Nous pouvons, il est vrai, dans tous les cas possibles, développer V par la série de Fourier, et écrire:
$$V = \Sigma \phi_m(t) \cos mx.$$

Mais pour que nous ayons le droit d'en conclure
$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\Sigma m^2 \phi_m(t) \cos mx$$

il faut que la série (et d'ailleurs il suffit)
$$\Sigma m^2 \phi_m(t) \cos mx$$

soit convergente.

Pour cela il suffit que l'on puisse trouver un nombre K tel que

$$|m^2\phi_m(t)| < \frac{K}{m^2}$$

ou

$$|\phi_m(t)| < \frac{K}{m^4}. \tag{4}$$

D'après un théorème que j'ai démontré dans le Tome III du Bulletin Astronomique (Sur un moyen d'augmenter la convergence des séries trigonométriques) la condition (4) équivaut à la suivante; la fonction représentée par la série

$$f(x) = \Sigma\phi_m \cos mx$$

devra être continue ainsi que ses trois premières dérivées. Or cette fonction est égale à V entre les limites $-\pi$ et $+\pi$; si on est en dehors de ces limites on a:

$$f(x) = V(x + 2p\pi),$$

p étant un entier positif ou négatif choisi de telle sorte que $x + 2p\pi$ soit compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Comme V est continue ainsi que toutes ses dérivées, il ne peut y avoir de discontinuité qu'aux deux limites $x = \pm\pi$. Si donc nous désignons pour un instant par V', V'', etc. les dérivées successives de V par rapport à x, on devra avoir:

$$V(\pi) = V(-\pi), \tag{5}$$
$$V'(\pi) = V'(-\pi), \tag{6}$$
$$V''(\pi) = V''(-\pi), \tag{7}$$
$$V'''(\pi) = V'''(-\pi). \tag{8}$$

La fonction V étant paire les conditions (5) et (7) sont remplies d'elles-mêmes. D'autre part V' et V''' sont des fonctions impaires de sorte qu'on doit avoir:

$$V'(\pi) = -V'(-\pi), \quad V'''(\pi) = -V'''(-\pi)$$

et que les conditions (6) et (8) peuvent s'écrire:

$$V'(\pi) = V'''(\pi) = 0,$$

c'est-à-dire que pour $x = \pi$ on devra avoir:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d^3V}{dx^3} = 0. \tag{9}$$

Si $h = 0$, on doit avoir pour $x = \pi$:

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{dx} = 0.$$

Cette condition ayant lieu, quel que soit t on aura:

$$\frac{d^2 V}{dtdx} = \frac{d^3 V}{dx^3} = 0.$$

Les conditions (9) sont donc remplies, et notre calcul est légitime, *mais seulement dans le cas de* $h = 0$.

Cela posé considérons la série

$$V_0 = \Sigma A_m \cos mx.$$

En général la série: $\Sigma m^2 A_m \cos mx$

ne sera pas convergente de sorte qu'on ne pourra pas écrire:

$$\Delta V_0 = \frac{d^2 V_0}{dx^2} = -\Sigma m^2 A_m \cos mx.$$

Il en résulte qu'on n'aura pas en général:

$$\lim \Delta V = \Delta V_0 \qquad \text{quand } t \text{ tend vers } 0$$

et qu'on n'aura pas non plus:

$$\lim \frac{dV}{dt} = \Delta V_0 \qquad \text{quand } t \text{ tend vers } 0.$$

C'est ce qui explique pourquoi le développement suivant les puissances de t est généralement impossible.

Revenons maintenant au cas général:

On a pour $t > 0$ $$\frac{dV}{dn} + hV = 0,$$

ou en différentiant par rapport à t:

$$\frac{d^2 V}{dtdn} + h\frac{dV}{dt} = 0$$

ou: $$\frac{d\Delta V}{dn} + h\Delta V = 0.$$

En différentiant p fois on trouverait de même

$$\frac{d\Delta^p V}{dn} + h\Delta^p V = 0.$$

Pour que le développement suivant les puissances de t soit possible, il faut évidemment que l'on ait:

$$\frac{dV_0}{dn} + hV_0 = 0, \quad \frac{d\Delta^p V_0}{dn} + h\Delta^p V_0 = 0. \quad (p = 1, 2, \ldots, \text{ad inf.})$$

Ces conditions, en nombre infini, sont nécessaires ; j'ignore si elles sont suffisantes quoique cela puisse sembler probable. Je n'insiste d'ailleurs sur tous ces points que pour mieux montrer avec quelles précautions il faut toucher aux équations aux dérivées partielles.

Passons maintenant à l'exposé des lois générales du refroidissement.

Considérons d'abord l'intégrale suivante :

$$A = \int V^2 d\tau .$$

Je dis que cette intégrale ira toujours en diminuant ; nous trouvons en effet :

$$\frac{dA}{dt} = 2\int V \frac{dV}{dt} d\tau = 2a^2 \int V \Delta V d\tau .$$

Il vient ensuite :

$$\int V \Delta V d\tau = \int V \frac{dV}{dn} d\omega - \int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] d\tau$$

ou en vertu de l'équation (2)

$$\int V \Delta V d\tau = -h \int V^2 d\omega - \int \Sigma \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau = -B < 0$$

et par conséquent : $\frac{dA}{dt} = -2a^2 B < 0 .$ C. Q. F. D.

Je dis maintenant que si h n'est pas nul, $\int V^2 d\tau$ tend vers 0 quand t croît indéfiniment. On a en effet $\frac{B}{A} > k_1$

d'où $\frac{dA}{A dt} < -2a^2 k_1 ,$

ou en appelant A_0 la valeur de A pour $t = t_0$,

$$A < A_0 e^{-2a\, k_1 t} .$$

Si h n'est pas nul, k_1 n'est pas nul non plus, et l'on a :

$$\lim A = 0 \qquad \text{pour } t = \infty \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Je dis maintenant que le rapport $\frac{B}{A}$ va constamment en diminuant :

Il vient en effet : $\frac{d}{dt}\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{A dB - B dA}{A^2 dt}$

de sorte qu'il s'agit de démontrer l'inégalité suivante:

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} < 0.$$

Nous devons donc d'abord calculer $\frac{dB}{dt}$, il viendra:

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{d}{dt}\int V\Delta V d\tau = -\int \frac{dV}{dt}\Delta V d\tau - \int V\frac{d\Delta V}{dt}d\tau.$$

L'équation (1) nous permet donc d'écrire:

$$\frac{1dB}{a^2dt} = -\int(\Delta V)^2 d\tau - \int V\Delta^2 V d\tau.$$

Or si V et U sont deux fonctions satisfaisant à la surface du corps à l'équation (2) le théorème de Green nous apprend que

$$\int(V\Delta U - U\Delta V)\,d\tau = 0.$$

Mais V et ΔV satisfont à l'équation (2). On a donc

$$\int V\Delta^2 V d\tau = \int(\Delta V)^2 d\tau$$

et par conséquent:

$$\frac{dB}{dt} = -2a^2\int(\Delta V)^2 d\tau$$

ce qui montre déjà que B est décroissant.

Nous pouvons écrire (en appelant $d\tau'$ un élément de volume du corps autre que $d\tau$ et désignant par V' la valeur de V au centre de l'élément $d\tau'$)

$$\frac{dA}{dt} = 2a^2\int V'\Delta V' d\tau'; \quad \frac{dB}{dt} = -2a^2\int(\Delta V')^2 d\tau'$$

et par conséquent:

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} = -2a^2\left[\int V^2 d\tau\int(\Delta V')^2 d\tau' - \int V\Delta V d\tau\int V'\Delta V' d\tau'\right]$$

ou

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} = -2a^2\int\int[(V\Delta V')^2 - VV'\Delta V\Delta V']\,d\tau\,d\tau'.$$

Comme rien ne distingue $d\tau$ de $d\tau'$, nous pouvons écrire également:

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} = -2a^2\int\int[(V'\Delta V)^2 - VV'\Delta V\Delta V']\,d\tau\,d\tau',$$

d'où ajoutant les deux valeurs de $A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt}$ et divisant par 2,

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} = -a^2\int\int[V'\Delta V - V\Delta V']^2\,d\tau\,d\tau'$$

d'où

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} < 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous avons vu plus haut que l'on a:

$$A < A_0 e^{-2a^2k_1t}$$

cette inégalité peut dans certains cas être remplacée par une autre. Supposons que l'on ait:

$$\int VU_1 d\tau = \int VU_2 d\tau = \ldots\ldots = \int VU_{n-1} d\tau = 0$$

nous aurons d'après définition même des quantités k_n et U_n:

$$\frac{B}{A} > k_n,$$

il viendra donc:

$$\frac{dA}{dt} = -2a^2B < 2a^2k_nA$$

et

$$A < A_0 e^{-2a^2k_nt}.$$

Etudions maintenant les variations de l'intégrale:

$$J_n = \int VU_n d\tau.$$

Il vient:

$$\frac{dJ_n}{dt} = a^2\int U_n\Delta V d\tau.$$

Le théorème de Green donne:

$$\int\left(U_n\frac{dV}{dn} - V\frac{dU_n}{dn}\right)d\omega = \int(U_n\Delta V - V\Delta U_n)\,d\tau.$$

En vertu des égalités

$$\frac{dV}{dn} + hV = \frac{dU_n}{dn} + hU_n = 0$$

le premier membre est nul; on a donc:

$$\int U_n\Delta V d\tau = \int V\Delta U_n d\tau = -k_n\int VU_n d\tau = -k_nJ_n$$

d'où

$$\frac{dJ_n}{dt} = -a^2k_nJ_n$$

et

$$J_n = J_n^0 e^{-a^2k_nt},$$

J_n^0 représentant la valeur de l'intégrale J_n pour $t = 0$.

Etudions encore les variations de l'intégrale

$$H = \int V_1 V_2 d\tau$$

où V_1 représente la température à l'instant t et V_2 la température à l'instant $h - t$. Il vient:

$$\frac{dH}{dt} = a^2 \int (V_2 \Delta V_1 - V_1 \Delta V_2)\, d\tau$$

or en vertu du théorème de Green et des équations

$$\frac{dV_1}{dn} + hV_1 = \frac{dV_2}{dn} + hV_2 = 0$$

le second membre est nul. Donc H est une constante qui ne dépend que de h.

Si nous faisons

$$t = h - t = \frac{h}{2}$$

il vient:

$$V_1 = V_2$$

et

$$H = \int V_1^2 d\tau > 0.$$

Si donc V_1 et V_2 représentent les températures à deux instants quelconques, l'intégrale

$$\int V_1 V_2 d\tau$$

sera toujours positive.

Nous avons vu plus haut que l'intégrale

$$\int V^2 d\tau$$

considérée comme fonction du temps va toujours en décroissant.

Donc H qui si l'on fait $t = \frac{h}{2}$ se réduit à

$$\int V_1^2 d\tau$$

sera une fonction décroissante de h.

Or nous trouvons:

$$\frac{dH}{dh} = a^2 \int V_1 \Delta V_2 d\tau < 0.$$

Nous trouvons de même

$$\int V_2 \Delta V_1 d\tau = \int V_1 \Delta V_2 d\tau < 0.$$

Si donc V_1 et V_2 représentent les températures à deux instants quelconques, l'intégrale

$$\int V_1 \Delta V_2 d\tau$$

sera toujours négative.

Arrivons maintenant au problème principal; étant donnée la température au temps $t = 0$, trouver la température à un instant quelconque.

Soit V_0 la température à l'instant $t = 0$.

La solution classique consisterait en ceci:

Développer V_0 en une série de la forme suivante:

$$V_0 = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_n U_n + \ldots,$$

les A étant des constantes.

On aura ensuite à un instant quelconque:

$$V = A_1 e^{-a^2 k_1 t} U_1 + A_2 e^{-a^2 k_2 t} U_2 + \ldots + A_n e^{-a^2 k_n t} U_n + \ldots$$

Cette solution est subordonnée à la possibilité du développement, et c'est cette possibilité que nous ne sommes pas encore en mesure de démontrer d'une manière générale.

Voici toutefois ce que nous pouvons dire.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des coefficients quelconques; posons:

$$V_0 = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_n U_n + R_0$$

et proposons-nous de déterminer les coefficients A de telle façon que l'erreur moyenne commise soit minimum.

Nous prendrons, à l'exemple de M. Tchebicheff, pour mesure de l'erreur moyenne commise l'intégrale suivante:

$$S_0 = \int R_0^2 d\tau.$$

Cherchons donc le minimum de l'intégrale

$$\int (V_0 - A_1 U_1 - A_2 U_2 - \ldots - A_n U_n)^2 d\tau.$$

Cette intégrale sera minimum quand on aura:

$$\int U_p (V_0 - A_p U_p) d\tau = 0$$

ou (puisque nous avons par définition

$$\int U_p^2 d\tau = 1, \quad \int V_0 U_p d\tau = J_p^0)$$

quand on aura: $$A_p = J_p^0.$$

Nous sommes donc conduits à écrire:

$$V_0 = J_1^0 U_1 + J_2^0 U_2 + \ldots + J_n^0 U_n + R_0.$$

Il résulte de là que l'erreur moyenne commise S_0 va en diminuant quand n augmente, mais non que cette erreur moyenne tende vers 0 quand n croît au delà de toute limite. D'ailleurs S_0 pourrait tendre vers 0 sans que R_0 tendît vers 0.

Remplaçons toutefois V_0 par sa valeur approchée

$$\sum_{p=1}^{p=n} J_p^0 U_p.$$

Nous en déduirons $$V = \sum_{p=1}^{p=n} J_p^0 e^{-a^2 k_p t} U_p = \sum J_p U_p,$$

nous rappelons que nous avons posé

$$\int V U_p d\tau = J_p = J_p^0 e^{-a^2 k_p t}.$$

Posons donc: $$V = J_1 U_1 + J_2 U_2 + \ldots + J_n U_n + R,$$

et prenons pour mesure de l'erreur moyenne commise:

$$S = \int R^2 d\tau,$$

je me propose de démontrer que l'on peut prendre n assez grand pour que l'erreur moyenne S commise sur la température à un instant donné soit aussi petite qu'on le veut.

En effet R satisfait aux équations

$$\frac{dR}{dt} = a^2 \Delta R, \quad \frac{dR}{dn} + hR = 0.$$

Si donc la température initiale était R_0, la température à un instant ultérieur serait représentée par R.

De plus on a, comme il est aisé de le vérifier:

$$\int RU_1 d\tau = \int RU_2 d\tau = \ldots\ldots = \int RU_n d\tau = 0.$$

Donc d'après un lemme que nous avons démontré plus haut, on aura:

$$S < S_0 e^{-a^2 k_{n+1} t}.$$

Or quand n croît au delà de toute limite, S_0 décroît (sans que nous sachions s'il tend vers 0), k_{n+1} croît au delà de toute limite et l'exponentielle $e^{-a^2 k_{n+1} t}$ tend vers 0. Donc S tend vers 0. C. Q. F. D.

Nous avons donc démontré que l'erreur moyenne S tend vers 0, mais non que R tend vers 0. Cela peut toutefois nous suffire pour le moment. En effet comment pourrait-il arriver que S tendît vers 0 sans qu'il en fût de même de R? Il faudrait pour cela que la valeur de R subît des oscillations d'autant plus rapides que n serait plus grand, de telle façon que pour n très grand, R prendrait en des points très rapprochés des valeurs très différentes. Aucun physicien ne doutera que si un pareil état de choses existait à l'instant initial, il ne saurait subsister. C'est ce qui m'engage à me contenter pour le moment des considérations qui précèdent.

Je terminerai ce paragraphe par la remarque suivante:

Si V_0 est partout positif, V sera aussi positif pour toutes les valeurs de t et pour tous les points du corps. Or quand t croît indéfiniment, le rapport:

$$\frac{V}{J_1 U_1}$$

tend vers l'unité.

Donc U_1 doit être une fonction qui est positive en tous les points du corps.

L'égalité

$$\int U_1 U_n d\tau = 0 \qquad (n > 1)$$

montre que la fonction U_1 est la seule des fonctions U_n qui jouisse de cette propriété.

§4.—*Propriétés des Fonctions U_n.*

Reprenons la fonction U_n définie par les équations:

$$\Delta U_n + k_n U_n = 0, \quad \frac{dU_n}{dn} + hU_n = 0, \quad \int U_n^2 d\tau = 1.$$

Ou en supprimant les indices qui nous sont inutiles pour le moment:

$$\Delta U + kU = 0, \quad \frac{dU}{dn} + hU = 0, \quad \int U^2 d\tau = 1.$$

Soit T une fonction satisfaisant comme U à l'équation:

$$\Delta T + kT = 0.$$

Si T est finie et continue ainsi que ses dérivées à l'intérieur du corps, on aura

$$\int \left(U \frac{dT}{dn} - T \frac{dU}{dn} \right) d\omega = 0$$

ou

$$\int U \left(\frac{dT}{dn} + hT \right) d\omega = 0,$$

les intégrales étant étendues à la surface du corps.

Supposons maintenant que la fonction T ne soit plus finie à l'intérieur du corps qu'elle devienne infinie au point (x_0, y_0, z_0) situé à l'intérieur du corps; mais de telle façon que la différence $T - \frac{1}{r}$ (où r désigne la distance des deux points x, y, z et x_0, y_0, z_0) reste finie ainsi que ses dérivées.

On aura alors: $$\int \left(U \frac{dT}{dn} - T \frac{dU}{dn} \right) d\omega = -4\pi U^0,$$

U^0 désignant la valeur de U au point x_0, y_0, z_0. C'est ce que j'ai déjà exposé à propos de la Diffraction dans ma Théorie Mathématique de la Lumière.

In vient donc: $$\int U \left(\frac{dT}{dn} + hT \right) d\omega = -4\pi U^0.$$

Soit maintenant: $$\alpha = \sqrt{k}$$

et $$T = \frac{e^{i\alpha r}}{r},$$

r désignant encore la distance du point mobile x, y, z au point fixe x_0, y_0, z_0.

On aura alors: $$\int U \left(\frac{dT}{dn} + hT \right) d\omega = 0 \text{ ou } -4\pi U^0,$$

selon que le point x_0, y_0, z_0 est extérieur ou intérieur au corps.

On a d'ailleurs dans ce cas:

$$\frac{dT}{dn} = \cos\psi \frac{e^{i\alpha r}}{r} \left(i\alpha - \frac{1}{r} \right),$$

ψ étant l'angle de la normale à la surface du corps au point x, y, z avec la droite qui joint ce point au point fixe x_0, y_0, z_0.

Nous poserons pour abréger

$$H = \frac{dT}{dn} + hT$$

et nous regarderons H soit comme fonction de r et de

$$r \cos \psi = \xi$$

soit comme fonction de x, y, z et de x_0, y_0, z_0.

On aura alors :

$$r \cos \psi = \lambda (x_0 - x) + \mu (y_0 - y) + \nu (z_0 - z),$$

λ, μ, ν désignant les trois cosinus directeurs de la normale à la surface du corps. On en déduit :

$$\frac{dH}{dx_0} = \frac{dH}{dr} \frac{x_0 - x}{r} + \frac{dH}{d\xi} \lambda.$$

On a ensuite si le point x_0, y_0, z_0 est intérieur au corps :

$$U_0 = \frac{-1}{4\pi} \int H U d\omega, \quad \frac{dU_0}{dx_0} = \frac{-1}{4\pi} \int \frac{dH}{dx_0} U d\omega.$$

Cela va nous permettre de trouver une limite supérieure de U_0 et de ses dérivées.

Soit en effet A la plus grande valeur que puisse prendre $|U|$ à la surface du corps, on aura évidemment :

$$|U_0| < \frac{A}{4\pi} \int |H| d\omega, \quad \left| \frac{dU_0}{dx_0} \right| < \frac{A}{4\pi} \int \left| \frac{dH}{dx_0} \right| d\omega.$$

Les deux intégrales qui entrent dans ces deux inégalités

$$\int |H| d\omega \text{ et } \int \left| \frac{dH}{dx_0} \right| d\omega$$

se calculent aisément quand on connaît la forme de la surface du corps et le nombre positif k. Elles ne dépendent que de x_0, y_0, z_0.

Quant au coefficient A, nous n'avons jusqu'à présent aucun moyen de le déterminér.

Commençons par étudier les variations de la première intégrale $\int |H| d\omega$.

Cette intégrale est évidemment finie tant que le point x_0, y_0, z_0 reste intérieur au corps. On a en effet :

$$|H| < \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{h}{r}$$

de sorte qu'il viendra:

$$\int |H| d\omega < S\left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{h}{\rho}\right),$$

S désignant la surface totale du corps et ρ la plus courte distance du point x_0, y_0, z_0 à cette surface. Je dis maintenant que notre intégrale tendra encore vers une limite finie quand le point x_0, y_0, z_0 se rapprochera indéfiniment de cette surface.

Posons en effet:

$$H = \frac{h}{r} - \frac{\cos\psi}{r^2} + H_1.$$

H_1 sera une fonction qui ne deviendra pas infinie même quand r s'annulera. Nous trouvons en effet:

$$H_1 = \frac{\cos\psi}{r^2}\left[i\alpha r e^{i\alpha r} - e^{i\alpha r} + 1\right] + \frac{h}{r}\left(e^{i\alpha r} - 1\right),$$

$$\left|\frac{e^{i\alpha r} - 1}{r}\right| = \frac{2\left|\sin\frac{\alpha r}{2}\right|}{r} < \alpha; \quad \left|\frac{i\alpha r e^{i\alpha r} - e^{i\alpha r} + 1}{r^2}\right| < 4\alpha^2$$

et enfin:

$$|H_1| < h\alpha + 4\alpha^2,$$

d'où:

$$\int |H| d\omega < h\alpha S + 4\alpha^2 S + h\int \frac{d\omega}{r} + \int \frac{d\omega}{r^2}|\cos\psi|.$$

Il est aisé de voir que quand le point x_0, y_0, z_0 se rapproche indéfiniment de la surface du corps, les intégrales $\int \frac{d\omega\,|\cos\psi|}{r^2}$ et l'intégrale $\int \frac{d\omega}{r}$ tendent vers des limites finies.

Si d'abord le corps est convexe, de telle façon qu'une droite ne puisse couper sa surface en plus de deux points; $\cos\psi$ est positif et l'on a:

$$\int \frac{|\cos\psi|}{r^2} d\omega = \int \frac{\cos\psi}{r^2} d\omega = 4\pi.$$

Si le corps n'est pas convexe, et qu'une droite puisse rencontrer sa surface en n points on aura:

$$\int \frac{|\cos\psi|}{r^2} d\omega < 4(n-1)\pi$$

car l'intégrale s'obtient en décrivant du point x_0, y_0, z_0 comme centre une sphère de rayon 1 et en faisant la perspective de la surface du corps sur la surface de cette sphère, le centre de la dite sphère étant pris comme centre de la perspective. Un point de la sphère sera alors au plus la perspective de $n-1$ points de la

surface du corps ; de sorte que la somme *arithmétique* des aires des perspectives des divers éléments de cette surface sera au plus égale à $n-1$ fois la surface de la sphère. Or cette somme arithmétique est précisément l'intégrale, $\int \frac{|\cos\psi|}{r^2}\, d\omega$. La somme algébrique serait l'intégrale $\int \frac{\cos\psi}{r^2}\, d\omega$.

Ainsi $\int \frac{|\cos\psi|}{r^2}\, d\omega$ tend vers une limite finie ; il reste à démontrer qu'il en est de même de

$$\int \frac{d\omega}{r}.$$

Or cette intégrale représente le potentiel d'une couche uniforme de matière répandue à la surface du corps, et l'on sait que ce potentiel est fini.

Si nous passons maintenant à l'inégalité :

$$\frac{dU_0}{dx_0} < A \int \left| \frac{dH}{dx_0} \right| d\omega,$$

elle nous permet de démontrer qu'à l'intérieur du corps les dérivées premières (et on le démontrerait de la même façon pour les dérivées d'ordre supérieure) de la fonction U_0 restent finies ; mais elle ne nous permet pas de voir si ces dérivées tendent vers une limite finie quand le point x_0, y_0, z_0 se rapproche indéfiniment de la surface du corps.

Nous allons maintenant chercher à obtenir une limite supérieure du coefficient A.

Pour cela il nous faut démontrer que U est une fonction continue.

Cela est évident pour les points situés à l'intérieur du corps puisque nous venons de voir qu'en ces points on peut trouver une limite supérieure des dérivées de U.

Il reste à démontrer que U est encore une fonction continue sur la surface du corps, et pour cela il nous faut une expression de U_0 quand le point x_0, y_0, z_0 est sur cette surface.

Nous avons trouvé plus haut

$$\int UH d\omega = 0 \text{ ou } -4\pi U_0$$

selon que le point x_0, y_0, z_0 est extérieur ou intérieur du corps.

En vertu des mêmes principes, on aura

$$\int UHd\omega = -2\pi U_0$$

si le point x_0, y_0, z_0 est sur la surface même du corps.

Si x_0', y_0', z_0' est un autre point situé également sur la surface du corps et si H' et U_0' sont deux fonctions formées avec le point x_0', y_0', z_0' comme H et U_0 le sont avec le point x_0, y_0, z_0; il viendra:

$$\int U(H-H')\,d\omega = 2\pi(U_0'-U_0)$$

d'où:

$$|U_0'-U_0| < A\int |H-H'|\,d\omega.$$

Il nous reste à établir que: $\int |H-H'|\,d\omega$

tend vers 0 quand le point x_0', y_0', z_0' se rapproche indéfiniment du point x_0, y_0, z_0.

Remarquons d'abord que nous pouvons poser:

$$H = \frac{h}{r} - \frac{\cos\psi}{r^2} + H_1,$$

$$H' = \frac{h}{r'} - \frac{\cos\psi'}{r'^2} + H_1',$$

H_1 a même signification que plus haut; H_1' est formé avec le point x_0', y_0', z_0' comme H_1 avec le point x_0, y_0, z_0; r' désigne la distance du point x_0', y_0', z_0' au point x, y, z et l'angle ψ' est défini avec le point x_0', y_0', z_0' comme l'angle ψ avec le point x_0, y_0, z_0.

On a donc:

$$\int |H-H'|\,d\omega < h\int \left|\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right| d\omega + \int \left|\frac{\cos\psi}{r^2}-\frac{\cos\psi'}{r'^2}\right| d\omega + \int |H_1-H_1'|\,d\omega.$$

Il suffit donc de démontrer que les trois intégrales

$$\int \left|\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right| d\omega,\quad \int \left|\frac{\cos\psi}{r^2}-\frac{\cos\psi'}{r'^2}\right| d\omega,\quad \int |H_1-H_1'|\,d\omega$$

tendent vers 0 quand les deux points se rapprochent indéfiniment. Cela est évident pour la troisième; car H_1 est une fonction continue et finie de x_0, y_0 et z_0.

Démontrons-le maintenant pour la première.

Décomposons la surface S du corps en deux régions σ et σ'; et supposons que les deux points x_0, y_0, z_0 et x_0', y_0', z_0' appartiennent à la région σ.

Je dis que je pourrai prendre ces deux points assez rapprochés pour que

$$\int_S \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| d\omega = \int_\sigma \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| d\omega + \int_{\sigma'} \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| d\omega < \varepsilon.$$

Tout d'abord nous savons que les deux intégrales

$$\int \frac{d\omega}{r}, \quad \int \frac{d\omega}{r'}$$

sont finies et déterminées. Il en résulte que nous pourrons prendre la région σ assez petite pour que :

$$\int_\sigma \frac{d\omega}{r} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int_\sigma \frac{d\omega}{r'} < \frac{\varepsilon}{3}$$

quelle que soit la position du point x_0', y_0', z_0' dans cette région σ d'où :

$$\int_\sigma \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| d\omega < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

La région σ doit désormais être regardée comme entièrement déterminée, mais nous pouvons encore faire varier dans cette région le point x_0', y_0', z_0'.

Si maintenant r' désigne la distance du point x_0', y_0', z_0' à un point x, y, z quelconque de la région σ' ; $\frac{1}{r'}$ sera une fonction finie et continue de x_0', y_0', z_0' et cette fonction tendra *uniformément* vers $\frac{1}{r}$ quand x_0', y_0', z_0' tendront vers x_0, y_0, z_0. Cela sera vrai tant que le point x, y, z restera sur la région σ', puisque les points x_0, y_0, z_0 et x_0', y_0', z_0' n'appartiennent pas à cette région.

On pourra donc prendre le point x_0', y_0', z_0' assez voisin du point x_0, y_0, z_0 pour que

$$\int_{\sigma'} \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| d\omega < \frac{\varepsilon}{3}$$

et par conséquent :

$$\int_S \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| d\omega < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On établirait de la même manière que

$$\lim \int \left| \frac{\cos\psi}{r^2} - \frac{\cos\psi'}{r'^2} \right| d\omega < 0.$$

On a donc :

$$\lim \int |H - H'| \, d\omega = 0 \qquad \lim |U_0 - U_0'| = 0$$

ce qui signifie que la fonction U est continue à la surface du corps.

Cette démonstration ne montre toutefois qu'une chose, c'est que U_0' tend vers U_0, quand le point x_0, y_0, z_0 appartient à la surface du corps et que le point x_0', y_0', z_0' s'en rapproche en restant lui-même sur la surface du corps. Elle ne nous apprend rien sur ce qui arrive quand le point x_0', y_0', z_0' est intérieur au corps et se rapproche de x_0, y_0, z_0 soit normalement, soit obliquement à la surface du corps. On pourrait observer toutefois que

$$\frac{dU}{dn} = -hU$$

étant fini, U_0' doit tendre vers U_0 quand la droite qui joint les deux points est normale à la surface et il serait aisé d'en conclure, par un petit raisonnement très simple, qu'il en est encore de même quand cette droite est oblique.

Mais cela ne saurait nous suffire, parce que nous avons besoin pour notre objet d'assigner une limite supérieure de $|U_0' - U_0|$.

Si comme nous le supposons le point x_0, y_0, z_0 est sur la surface du corps et le point x_0', y_0', z_0' à l'intérieur, on aura:

$$\int HUd\omega - 2\pi U_0 = -4\pi U_0,$$

$$\int H'Ud\omega = -4\pi U_0'$$

d'où

$$\int (H - H')\, Ud\omega - 2\pi U_0 = -4\pi(U_0 - U_0').$$

Nous avons donc:

$$-4\pi(U_0 - U_0') = h\int\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) Ud\omega$$
$$+\int (H_1 - H_1')\, Ud\omega + \int\left(\frac{\cos\psi'}{r'^2} - \frac{\cos\psi}{r^2}\right) Ud\omega - 2\pi U_0.$$

Il nous faut démontrer que les trois intégrales du 2^d membre tendent respectivement vers 0, 0 et $2\pi U_0$ quand le point x_0', y_0', z_0' se rapproche indéfiniment du point x_0, y_0, z_0.

Or on a:

$$\left|\int (H_1 - H_1')\, Ud\omega\right| < A\int |H_1 - H_1'|\, d\omega$$

et on verrait comme plus haut que

$$\lim\int |H_1 - H_1'|\, d\omega = 0.$$

Il n'y aurait rien à changer à la démonstration que nous avons donnée dans le cas qui précède.

De même on a:

$$\left|\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)Ud\omega\right|<A\int\left|\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right|d\omega$$

et

$$\lim\int\left|\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right|d\omega=0.$$

Ici encore il n'y a rien à changer à la démonstration que nous avons donnée dans le cas précédent.

Il reste à établir que:

$$\lim\int\left(\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right)Ud\omega=2\pi U_0.$$

Décomposons la surface S du corps en deux régions σ et σ' et supposons encore que le point x_0, y_0, z_0 soit situé dans la région σ; il viendra:

$$\int\left(\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right)Ud\omega=\int_{\sigma'}\left(\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right)Ud\omega$$
$$+\int_{\sigma}\left(\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right)(U-U_0)\,d\omega+\int_{\sigma}\left(\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right)Ud\omega. \qquad (2)$$

Je dis que je puis prendre le point x_0', y_0', z_0' assez voisin de x_0, y_0, z_0 pour que la différence de $2\pi U_0$ et du premier membre de l'identité (2) soit plus petite en valeur absolue que ε.

En premier lieu, la fonction U étant continue à la surface du corps, nous pourrons prendre la région σ assez petite pour que sur cette région on ait:

$$|U-U_0|<\zeta,$$

ζ étant une quantité aussi petite que l'on veut. Il vient alors:

$$\left|\int_{\sigma}\left(\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right)(U-U_0)\,d\omega\right|<\zeta\int_{\sigma}\left|\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right|d\omega.$$

Or nous venons de trouver

$$\int\left|\frac{\cos\psi}{r^2}\right|d\omega<4(n-1)\pi,$$

n étant le nombre maximum des intersections d'une droite avec la surface du corps.

Il vient donc:

$$\left|\int_\sigma\left(\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right)(U-U)\,d\omega\right|<8\,(n-1)\,\pi\zeta<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Car, ζ étant aussi petit que je veux, je puis toujours prendre

$$\zeta<\frac{\varepsilon}{24\,(n-1)\,\pi}.$$

La région σ doit être regardée maintenant comme entièrement déterminée, mais je puis encore faire varier le point x_0', y_0', z_0'.

Nous voyons d'abord que le point x_0, y_0, z_0 ne faisant pas partie de la région σ', on a:

$$\lim\int_{\sigma'}\left|\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right|d\omega=0,$$

de sorte qu'on peut prendre le point x_0', y_0', z_0' assez voisin du point x_0, y_0, z_0 pour que:

$$\int_{\sigma'}\left|\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right|d\omega<\frac{\varepsilon}{3A}$$

et par conséquent pour que:

$$\left|\int_{\sigma'}\left(\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right)d\omega\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part l'intégrale

$$\int_\sigma\frac{\cos\psi'}{r'^2}\,d\omega$$

réprésente l'angle solide sous lequel on voit le contour de la région σ du point x_0', y_0', z_0', et l'intégrale

$$\int_\sigma\frac{\cos\psi}{r^2}\,d\omega$$

réprésente l'angle solide sous lequel on voit le même contour du point x_0, y_0, z_0. Il en résulte que:

$$\lim\int_\sigma\frac{\cos\psi'}{r'^2}\,d\omega=\int_\sigma\frac{\cos\psi}{r^2}\,d\omega+2\pi.$$

On peut donc prendre le point x_0', y_0', z_0' assez voisin de x_0, y_0, z_0 pour que

$$\left|\int_\sigma\left(\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right)d\omega\quad-2\pi\quad\right|<\frac{\varepsilon}{3A}$$

ou :
$$\left| \int_\sigma \left(\frac{\cos \psi'}{r'^2} - \frac{\cos \psi}{r^2} \right) U_0 d\omega - 2\pi U_0 \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il vient alors
$$\left| \int_S \left(\frac{\cos \psi'}{r'^2} - \frac{\cos \psi}{r^2} \right) U d\omega - 2\pi U_0 \right| < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Voici le résumé de cette longue discussion.

Soient x_0, y_0, z_0; x_0', y_0', z_0' deux points situés soit à l'intérieur du corps, soit à sa surface. Soient U_0 et U_0' les valeurs de U en ces deux points; on aura :

$$| U_0 - U_0' | < A\theta,$$

A étant la plus grande valeur de $| U |$ à la surface du corps; quant à θ ce sera une fonction de x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0' que l'on pourra déterminer complètement à l'aide des considérations qui précèdent quand on connaîtra la forme du corps. Ces considérations nous fournissent en effet une limite supérieure de $| U_0 - U_0' |$ puisqu'elles nous montrent comment on doit choisir les deux points x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0' pour que $| U_0 - U_0' |$ soit plus petit que ε.

Je n'attirerai l'attention que sur deux des propriétés de la fonction θ. Elle est essentiellement positive et elle tend uniformément vers 0 quand le point x_0', y_0', z_0' se rapproche indéfiniment du point x_0, y_0, z_0.

Regardons d'abord le point x_0, y_0, z_0 comme fixe et situé sur la surface du corps et faisons varier le point x_0', y_0', z_0'. Nous pourrons diviser le volume du corps en deux régions que nous appellerons R et R' et que nous définirons comme il suit :

Quand le point x_0', y_0', z_0' sera dans la région R on aura :

$$\theta < 1.$$

Quand ce point sera dans la région R' on aura :

$$\theta > 1.$$

La région R existe certainement et son volume ne peut être nul, puisque θ est très voisin de 0 quand le point x_0', y_0', z_0' est très voisin de x_0, y_0, z_0.

Si nous supposons en particulier que le point x_0, y_0, z_0 soit celui des points de la surface du corps où $| U |$ atteint sa valeur maximum A; on aura :

$$| U_0' | > A(1 - \theta)$$

tant que le point x_0', y_0', z_0' restera à l'intérieur de la région R.

Soit $d\tau'$ l'élément de volume du corps dont le centre de gravité est x_0', y_0', z_0'. On aura:

$$\int U_0'^2 d\tau' = 1,$$

l'intégrale étant étendue au corps tout entier; et par conséquent

$$\int_R U_0'^2 d\tau' < 1,$$

l'intégrale étant étendue seulement à la région R. On en déduit:

$$A^2 \int_R (1-\theta)^2 d\tau' < 1.$$

Cette inégalité est vraie pourvu que l'on ait choisi pour le point x_0, y_0, z_0 celui des points de la surface du corps pour lequel

$$|U| = A.$$

Malheureusement nous ne savons pas quel est celui des points de la surface pour lequel cela a lieu. Mais nous pouvons tourner la difficulté de la façon suivante. L'intégrale

$$\int_R (1-\theta)^2 d\tau'$$

peut être calculée dès que l'on connaît la forme du corps et le point x_0, y_0, z_0. C'est donc une fonction de x_0, y_0, z_0. Cette fonction ne peut jamais s'annuler. Elle aura donc un minimum M que l'on pourra déterminer dès qu'on connaîtra la forme du corps. Il vient ainsi

$$A^2 M < 1$$

d'où

$$A < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Ainsi nous pouvons déterminer une limite supérieure du coefficient A et par conséquent une limite supérieure des dérivées d'ordre quelconque de U en un point quelconque de l'intérieur du corps.

§5.—*Retour à l'Hypothèse moléculaire.*

Dans les raisonnements qui remplissent les trois paragraphes précédents, il y a un point faible que j'ai déjà signalé plus haut.

Après avoir montré qu'une certaine intégrale ne pouvait pas s'annuler, nous

en avons conclu que cette intégrale devait avoir un minimum, et nous avons déterminé la fonction U qui correspond à ce minimum par le calcul des variations. Or cette application n'eût été légitime que si nous avions démontré d'avance la continuité de cette fonction U. C'est d'ailleurs la même objection qui empêche de regarder comme rigoureuse la démonstration du principe de Dirichlet par Riemann.

Il est vrai que dans le § précédent, nous avons trouvé une limite supérieure de la dérivée de cette fonction U; mais, si l'on voulait s'en servir pour justifier l'emploi du calcul des variations, on commettrait une pétition de principe; tout au plus ce résultat peut-il mettre sur la voie dans la recherche d'une démonstration satisfaisante.

Il faudrait donc, pour obtenir une théorie analytiquement rigoureuse, employer des procédés analogues à ceux qui permettent d'établir le principe de Dirichlet et peut être des procédés plus compliqués encore.

Je ne l'ai pas fait; mais j'ai pensé qu'il était possible d'obtenir une démonstration rigoureuse au point de vue physique de la façon suivante. Au lieu de considérer l'équation différentielle de Fourier en elle-même, rappelons-nous quelle est sa signification physique et comment on l'a obtenue.

On considère un corps solide formé d'un très grand nombre de molécules. Soient

$$M_1, M_2, \ldots, M_n$$

ces molécules, n est un très grand nombre. Soient

$$V_1, V_2, \ldots, V_n$$

les températures de ces molécules.

La molécule M_i enverra à la molécule M_k une quantité de chaleur égale à

$$C_{ik}(V_i - V_k),$$

C_{ik} étant un coefficient indépendant des températures, ne dépendant que de la distance des deux molécules; ce coefficient est très petit dès que cette distance devient sensible.

En outre, cette molécule M_i rayonnera au dehors une quantité de chaleur égale à:

$$C_i V_i,$$

C_i étant un coefficient qui n'est sensible que pour les molécules superficielles.

Si nous choisissons l'unité de chaleur de façon que chacune de nos molécules, que nous supposons toutes pareilles entre elles ait pour chaleur spécifique l'unité, nous pourrons écrire:

$$\frac{dV_i}{dt} + \sum_{k=1}^{k=n} C_{ik}(V_i - V_k) + C_i V_i = 0 \tag{1}$$

et nous aurons n équations pareilles en faisant $i = 1, 2, \ldots, n$.

C'est en transformant le système (1) que Fourier est arrivé aux équations qui nous ont occupés dans les §§ précédents. Pour cela il passe à la limite, de façon à passer des équations aux différences finies aux équations différentielles et en tenant compte de l'isotropie du corps. Mais si l'étude de ces équations différentielles nous conduit à une de ces difficultés qui tiennent à la considération de l'infini, nous ne devons pas oublier que cette difficulté est factice, puisque au point de vue purement physique, ces équations différentielles ne sont là que pour remplacer des équations aux différences finies qui en diffèrent très peu et pour lesquelles cette difficulté n'existe pas. Il y a donc intérêt à étudier le système (1) en lui-même.

Cette étude ne présente aucune difficulté puisqu'il s'agit d'un système d'équations linéaires à coefficients constants.

Posons donc: $$V_i = U_i e^{-\alpha t},$$

les U_i et α étant des constantes; les équations (1) deviendront:

$$\alpha U_i = \Sigma_k C_{ik}(U_i - U_k) + C_i U_i. \tag{2}$$

En éliminant les n constantes U_i entre ces n équations (2), on arrive à une équation de degré n en α que j'écrirai:

$$F(\alpha) = 0. \tag{3}$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines de l'équation (3); considérons une de ces racines que j'appelle α_p. Quand dans les équations (2) on fera $\alpha = \alpha_p$, ces équations deviendront compatibles et on en tirera:

$$U_1 = U_{p1},\ U_2 = U_{p2}, \ldots, U_n = U_{pn}.$$

L'intégrale générale des équations (1) sera alors:

$$\begin{aligned} V_1 &= A_1 e^{-\alpha_1 t} U_{11} + A_2 e^{-\alpha_2 t} U_{21} + \ldots + A_n e^{-\alpha_n t} U_{n1}, \\ V_2 &= A_1 e^{-\alpha_1 t} U_{12} + A_2 e^{-\alpha_2 t} U_{22} + \ldots + A_n e^{-\alpha_n t} U_{n2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n &= A_1 e^{-\alpha_1 t} U_{1n} + A_2 e^{-\alpha_2 t} U_{2n} + \ldots + A_n e^{-\alpha_n t} U_{nn}, \end{aligned}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant n constantes arbitraires d'intégration.

On voit déjà par là que la véritable solution est bien de la forme à laquelle nous avions été conduits dans les §§2 et 3. Mais la forme symétrique des équations (2) va nous en apprendre d'avantage. La quantité de chaleur envoyée par M_i à M_k doit être égale à celle que reçoit M_k de M_i, on a donc:

$$C_{ik} = + C_{ki}.$$

Envisageons donc la forme quadratique positive:

$$\Phi(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \Sigma C_{ik} (V_i - V_k)^2 + \Sigma C_i V_i^2$$

les équations (2) pourront s'écrire:

$$\alpha U_i = \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dU_i}. \qquad \text{(2 bis)}$$

Si nous regardons $U_1, U_2, \ldots, U_n$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions, l'équation

$$\Phi = 1$$

représente un ellipsoïde puisque la forme Φ est positive.

Comment devrait-on procéder pour trouver les axes de cet ellipsoïde. Il faudrait précisément résoudre les équations (2 bis), éliminer les U_i entre ces équations, ce qui donnerait l'équation (3).

Il résulte de là que l'équation (3) a toutes ses racines réelles et positives. Ce résultat est connue de tous sous cette forme pour les ellipsoïdes dans l'espace ordinaire à 3 dimensions. Il est vrai encore dans le cas qui nous occupe, comme nous l'apprend la théorie des formes quadratiques.

En effet la forme Φ peut être décomposée en une somme de n carrés et nous écrirons cette décomposition sous la forme suivante:

$$\Phi = \alpha_1 \phi_1^2 + \alpha_2 \phi_2^2 + \ldots + \alpha_n \phi_n^2$$

où:

$$\phi_p = U_{p1} U_1 + U_{p2} U_2 + \ldots + U_{pn} U_n,$$

U_{p1}, U_{p2}, etc. étant des constantes.

Soit maintenant:

$$\Theta = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2.$$

La théorie des formes quadratiques nous apprend que l'on peut choisir la décomposition de Φ de telle sorte que:

$$\Theta = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \ldots + \phi_n^2$$

ce qui entraîne les conditions:

$$U_{p1}^2 + U_{p2}^2 + \ldots + U_{pn}^2 = 1, \tag{4}$$

$$U_{p1}U_{q1} + U_{p2}U_{q2} + \ldots + U_{pn}U_{qn} = 0. \qquad (p \gtrless q) \tag{5}$$

Si donc on écrit les n équations simultanées:

$$\phi_p = 1, \quad \phi_q = 0 \qquad (p \gtrless q) \tag{6}$$

ces équations admettront pour solution:

$$U_1 = U_{p1}, \quad U_2 = U_{p2}, \ldots U_n = U_{pn}. \tag{7}$$

Or ces équations (6) entraînent les suivantes:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dU_i} = \alpha_p\phi_p\frac{d\phi_p}{dU_i} = \alpha_p\frac{d\phi_p}{dU_i}; \quad U_i = \frac{1}{2}\frac{d\Theta}{dU_i} = \phi_p\frac{d\phi_p}{dU_i} = \frac{d\phi_p}{dU_i}$$

d'où:

$$\frac{1}{2}\frac{d\phi}{dU_i} = \alpha_p U_i.$$

Nous retrouvons les équations (2 bis). Les valeurs (7) des U et la valeur α_p de α nous représentent donc une solution de ces équations (2 bis).

Quelle est maintenant la signification de ces nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Supposons que ces nombres qui sont tous réels et positifs soient rangés par ordre de grandeur croissante.

Il est clair que α_1 sera le minimum du rapport:

$$\frac{\Phi}{\Theta} = \frac{\alpha_1\phi_1^2 + \alpha_2\phi_2^2 + \ldots + \alpha_n\phi_n^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \ldots + \phi_n^2}.$$

Si maintenant on suppose que les n variables U ne soient plus arbitraires, mais soient liées par la relation

$$\phi_1 = 0 \tag{8}$$

on verra que α_2 sera le minimum du rapport:

$$\frac{\Phi}{\Theta} = \frac{\alpha_2\phi_2^2 + \ldots\ldots + \alpha_n\phi_n^2}{\phi_2^2 + \ldots\ldots + \phi_n^2}.$$

Si les U sont liées par les deux relations

$$\phi_1 = \phi_2 = 0, \tag{8 bis}$$

α_3 sera le minimum du rapport:

$$\frac{\Phi}{\Theta} = \frac{\alpha_3\phi_3^2 + \ldots\ldots + \alpha_n\phi_n^2}{\phi_3^2 + \ldots\ldots + \phi_n^2}$$

et ainsi de suite.

L'analogie avec l'analyse du §2 est évidente; il suffit pour retrouver cette analyse de passer à la limite comme l'a fait Fourier.

Les équations (1) sont analogues aux équations de Fourier:

$$\frac{dV}{dt} = a^2\Delta V, \quad \frac{dV}{dn} + hV = 0.$$

Les équations (2) et (2 bis) sont analogues aux équations qui définissent les fonctions U et qui s'écrivent:

$$\Delta U + kU = 0, \quad \frac{dU}{dn} + hU = 0.$$

Les nombres α sont analogues aux nombres k.

La forme Φ est analogue à l'intégrale que nous avons appelée B dans le §2 et la forme Θ à l'intégrale que nous avons appelée A.

L'équation (4) est analogue à l'équation:

$$\int U_n^2 d\tau = 1$$

et l'équation (5) (qui exprime que les axes de notre ellipsoïde sont rectangulaires) à l'équation:

$$\int U_n U_p d\tau = 0. \qquad (n \gtrless p)$$

Il est inutile de pousser plus loin cette comparaison, on comprend suffisamment la parfaite identité des raisonnements, bien que ceux-ci soient parfaitement rigoureux dans le cas du présent paragraphe, où l'infini n'intervient pas, et qu'ils soient au contraire sujets à de graves objections dans le cas du §2.

Ce n'est pas seulement dans l'étude du problème de Fourier qu'on est conduit à ces considérations; on obtiendrait des résultats tout à fait analogues en envisageant au même point de vue les autres problèmes de Physique Mathématique.

Dans tous ces problèmes on a à intégrer des équations linéaires aux dérivées partielles. Ces équations ont partout la même origine. Les lois du phénomène véritable sont exprimées par des équations linéaires aux différentielles ordinaires, où la seule variable indépendante est le temps et où les inconnues sont en très grand-nombre; chacune de ces inconnues en effet, représente la valeur d'une certaine quantité relative à l'une des molécules du corps. Le nombre de ces inconnues est donc kn, n étant le nombre des molécules du corps, et k le nombre des quantités relatives à chaque molécule. C'est par un véritable passage de la limite qu'on passe ensuite de l'hypothèse moléculaire à celle de la matière continue et des équations différentielles ordinaires aux équations aux dérivées partielles.

Si donc on revient momentanément à l'hypothèse moléculaire, on n'a plus affaire qu'à des équations linéaires ordinaires à coefficients constants, et la seule difficulté provient du très grand nombre de ces équations. Mais il y a plus; ces équations présenteront presque toujours la symétrie que nous avons observée dans les équations (1) et on sera encore conduit à envisager une forme quadratique et tout sera ramené à la décomposition de cette forme en carrés.

Je n'en donnerai qu'un exemple; j'envisagerai les équations de l'élasticité. Soient x, y, z les coordonnées d'une molécule quelconque, dans l'état d'équilibre lorsque les forces extérieures appliquées au corps sont nulles; soient $x+u$, $y+v$, $z+w$ les coordonnées de cette même molécule lorsque le corps élastique est déformé sous l'action de forces extérieures; soit Φ la fonction des forces relative aux forces élastiques; soient X, Y, Z les trois composantes de la force extérieure appliquée à la molécule considérée. Les équations d'équilibre s'écriront alors:

$$\frac{d\Phi}{du}=X,\quad \frac{d\Phi}{dv}=Y,\quad \frac{d\Phi}{dw}=Z. \tag{9}$$

Comme u, v, w sont très-petits, nous pouvons développer Φ suivant les puissances de ces quantités et négliger les puissances d'ordre supérieure à 2. Les termes du 1er degré doivent être nuls, puisque l'équilibre normal est atteint pour:

$$u=v=w=0.$$

Je puis supposer que le terme tout connu est également nul; puisque Φ n'est déterminé qu'à une constante près.

En résumé Φ sera une forme quadratique par rapport aux u, v, w, et cette forme sera positive parce que l'équilibre normal doit être stable.

Les équations (9) seront donc linéaires en u, v, w. Le nombre de ces équations est le même que celui des inconnues u, v, w; il est égal à n, si le nombre des molécules est $\frac{n}{3}$. Afin de reprendre les mêmes notations que tout à l'heure, nous appellerons les n variables, U_1, U_2, ..., U_n; alors si les trois coordonnées d'une molécule que nous appelions tout à l'heure u, v, w, s'appellent maintenant U_p, U_{p+1}, U_{p+2}, nous appellerons de même X_p, X_{p+1} et X_{p+2} les composantes de la force extérieure appliquée à cette molécule, composantes que nous appelions tout à l'heure X, Y, Z et les équations (9) deviendront:

$$\frac{d\Phi}{dU_p} = X_p. \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) \tag{9 bis}$$

Nous décomposerons la forme Φ en carrés comme nous l'avons fait tout à l'heure et nous retrouverons les formules:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \alpha_1\phi_1^2 + \alpha_2\phi_2^2 + \ldots + \alpha_n\phi_n^2,\\
\phi_p &= U_{p1}U_1 + U_{p2}U_2 + \ldots + U_{pn}U_n,\\
\Theta &= \phi_1^2 + \phi_2^2 + \ldots + \phi_n^2,\\
\Theta &= U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2.
\end{aligned}$$

Les équations (9 bis) deviennent alors:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k\phi_k U_{kp} = X_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) \tag{9 ter}$$

Multiplions la première de ces équations par U_{i1}, la seconde par U_{i2}, ..., la n^e par U_{in} et ajoutons. En tenant compte des équations (4) et (5) il viendra:

$$\alpha_i\phi_i = U_{i1}X_1 + U_{i2}X_2 + \ldots + U_{in}X_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

Multiplions maintenant la première des équations (10) par $\frac{U_{i\kappa}}{\alpha_1}$, la seconde par $\frac{U_{2\kappa}}{\alpha_2}$...., la n^e par $\frac{U_{n\kappa}}{\alpha_n}$; en vertu des équations d'orthogonalité (4) et (5) ou plutôt des équations

$$\begin{aligned}
U_{1p}^2 + U_{2p}^2 + \ldots + U_{np}^2 &= 1,\\
U_{1p}U_{1q} + U_{2p}U_{2q} + \ldots + U_{np}U_{nq} &= 0,
\end{aligned}$$

qui comme on le sait leur sont équivalentes; il viendra:

$$U_\kappa = \frac{U_{1\kappa}}{\alpha_1}\theta_1 + \frac{U_{2\kappa}}{\alpha_2}\theta_2 + \ldots + \frac{U_{n\kappa}}{\alpha_n}\theta_n$$

où l'on a posé pour abréger:

$$\theta_i = U_{i1}X_1 + U_{i2}X_2 + \ldots + U_{in}X_n.$$

Les équations (9) sont donc ainsi résolues.

Il est clair qu'une pareille solution ne peut être que théorique, comme l'était déjà la solution du problème de Fourier par l'intégration des équations (1). Le nombre immense des équations (1) comme celui des équations (9) s'opposerait absolument aux calculs. Mais cette solution purement théorique peut mettre sur la voie de la solution véritable.

Passons à la limite et abandonnons l'hypothèse moléculaire pour celle de la matière continue. Nos équations (1) ou (9) deviendront des équations aux dérivées partielles; nos formes quadratiques Φ et Θ deviendront des intégrales analogues à celles que nous avons appelées A et B dans le §2.

Notre procédé pourra s'appliquer sans autre changement; au lieu de décomposer les formes Φ et Θ en carrés, nous aurons à chercher les minima successifs de leur rapport ou plutôt ceux du rapport des intégrales A et B qui les remplacent. On passera ainsi d'une analyse analogue à celle de ce paragraphe à une analyse tout à fait semblable à celle du §2.

§6.—*Existence des Fonctions U_n.*

L'existence des fonctions U_n peut être maintenant regardée comme démontrée au moins au point de vue physique. La fonction U_1 sera une fonction qui devra prendre les valeurs

$$U_{11},\ U_{12},\ \ldots,\ U_{1n}$$

aux différents points occupés par les molécules

$$M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n.$$

La fonction U_2 devra prendre en ces mêmes points les valeurs

$$U_{21},\ U_{22},\ \ldots,\ U_{2n}$$

et ainsi de suite.

Nous savons de plus que les valeurs de la fonction U_1 par exemple devront satisfaire aux équations (2 bis) du § précédent que j'écrirai

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dU_i} = \alpha_1 U_i. \tag{1}$$

La fonction U_1 n'est définie ainsi, il est vrai que pour n points de l'espace, à savoir les n points occupés par nos n molécules; mais comme ces molécules sont très nombreuses et très rapprochées les unes des autres, on pourra calculer par interpolation la fonction U_1 pour tous les autres points intérieurs au corps.

On pourra à la vérité trouver ainsi deux valeurs différentes pour la fonction U_1 si l'on adopte deux règles d'interpolation différentes; mais les différences seront du même ordre de grandeur que la distance qui sépare deux molécules et par conséquent négligeables au point de vue physique.

La fonction U_1 ainsi définie satisfera approximativement aux équations de Fourier:

$$\Delta U_1 + k_1 U_1 = 0, \quad \frac{dU_1}{dn} + h U_1 = 0 \tag{2}$$

que l'on obtient en partant des équations (2 bis) et en passant à la limite. L'erreur commise en remplaçant les équatious (1) par les équations (2) sera du même ordre de grandeur que la distance qui sépare deux molécules.

Il y a à cela toutefois une condition, c'est que les dérivées de la fonction U_1 soient finies; on n'aurait plus le droit de passer des équations (1) aux équations (2) étaient du même ordre de grandeur que l'inverse de la distance qui sépare deux molécules.

Il nous resterait donc à établir que ces dérivées sont bien finies; c'est-à-dire:

1°. Que la différence $U_{1i} - U_{1k}$ est du même ordre de grandeur que la distance des molécules M_i et M_k.

2°. Plus généralement, soit M_α une molécule quelconque de coordonnées x, y, z, soient $M_\beta, M_\gamma, \ldots, M_\lambda$ un certain nombre de molécules très voisines de M_α et dont les coordonnées soient respectivement,

$$x + \xi_\beta,\ y + \eta_\beta,\ z + \zeta_\beta;\ x + \xi_\gamma,\ y + \eta_\gamma,\ z + \zeta_\gamma; \ldots;\ x + \xi_\lambda,\ y + \eta_\lambda,\ z + \zeta_\lambda.$$

Soit $P(\xi, \eta, \zeta)$ un polynôme quelconque de degré inférieur à m en ξ, η, ζ. Soient enfin $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ un certain nombre de coefficients relatifs aux diverses molécules $M_\alpha, M_\beta, \ldots, M_\lambda$; et supposons que ces coefficients satisfassent à la condition suivante:

$$\alpha P(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha) + \beta P(\xi_\beta, \eta_\beta, \zeta_\beta) + \gamma P(\xi_\gamma, \eta_\gamma, \zeta_\gamma) + \ldots + \lambda P(\xi_\lambda, \eta_\lambda, \zeta_\lambda) = 0$$

et cela quel que soit le polynôme P pourvu que son degré soit inférieur à m (j'écris par symétrie $P(\xi_a, \eta_a, \zeta_a)$ au lieu de $P(0,0,0)$).

Si ces conditions sont remplies, nous aurions à établir que:

$$\alpha U_{1\alpha} + \beta U_{1\beta} + \ldots . + \lambda U_{1\lambda}$$

est du même ordre de grandeur que les puissances m^{es} des quantités ξ, η, ζ.

Cela ne serait sans doute pas impossible; je n'aurais en effet pour établir ces divers points qu'à traduire dans le langage de l'hypothèse moléculaire l'analyse du §4.

C'est ce que je me réserve de faire dans un mémoire ultérieur qui pourra être regardé comme la suite de celui-ci.

Je pourrai dire alors que les conclusions des §§2, 3 et 4 sont démontrées d'une façon rigoureuse au point de vue physique. Peut être même est-il permis d'espérer que, par une sorte de passage à la limite, on pourra fonder sur ces principes une démonstration rigoureuse même au point de vue analytique.

PARIS, le 19 Mars, 1889.