l'autre perpendiculaire au plan de réflexion. On fera disparaître ces deux écarts à l'aide de petites cales en papier introduites entre le prisme et son barillet, ou mieux au moyen de vis permettant de déplacer le barillet portant le prisme par rapport à sa monture. Les observations ont prouvé que le réglage effectué suivant ce procédé, par M. Gautier, était très satisfaisant au point de vue pratique. L'appareil ainsi rectifié peut être employé aux mesures de distances, sans qu'il soit nécessaire de procéder à la détermination astronomique des constantes. »

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la loi électrodynamique de Weber.* Note de M. **H. Poincaré.**

« A la fin de son immortel Ouvrage (2e édition, t. II, Chap. XXIII, art. 858), Maxwell étudie la loi électrodynamique de Weber et cherche à en tirer les lois connues de l'induction. Son analyse contient une suite de graves erreurs qu'il importe de rectifier, bien que le résultat final soit exact *en ce qui concerne les courants fermés*.

» Le résultat est, au contraire, inexact en ce qui concerne les courants non fermés, et l'on me permettra de terminer par quelques réflexions au sujet de l'application de la loi de Weber à ce cas à peu près inaccessible à l'expérience.

» Maxwell calcule la dérivée seconde $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ qui entre dans la formule de Weber, et il arrive au résultat suivant qui est l'équation qu'il appelle (27) :

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = {} & v^2 \frac{d^2 r}{ds^2} + 2vv' \frac{d^2 r}{ds\,ds'} + v'^2 \frac{d^2 r}{ds'^2} \\ & + \frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds} + \frac{dv'}{dt}\frac{dr}{ds'} + v\frac{dv}{ds}\frac{dr}{ds} + v'\frac{dv'}{ds'}\frac{dr}{ds'} + \frac{d^2 r}{dt^2}. \end{aligned}\right.$$

» Cette équation est inexacte; il faudrait, pour la rectifier, ajouter au second membre les deux termes suivants :

$$2v\frac{d^2 r}{ds\,dt} + 2v'\frac{d^2 r}{ds'\,dt}.$$

» Lorsqu'on tient compte des actions des deux électricités de nom contraire, tous les termes se détruisent, sauf ceux en v et en $\frac{dv}{dt}$; les seuls termes de $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ dont nous ayons à tenir compte sont les deux suivants :

$$\frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds}+2v\frac{d^2 r}{ds\,dt}.$$

» Maxwell ne tient compte que du premier de ces deux termes. Il trouve alors pour l'expression de la force électromotrice due à l'induction de l'élément ds sur l'élément ds'

$$\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\right)ds\,ds'; \tag{30}$$

il devrait trouver

$$\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\right)ds\,ds'+2\frac{i}{r}\frac{d^2 r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}ds\,ds'.$$

» Il commet ensuite une seconde erreur qui, dans le cas des courants fermés, a pour effet de compenser la première.

» Intégrant, dit-il, cette expression par rapport à s et à s', on obtient pour la force électromotrice dans le second circuit

$$\int\int\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\right)ds\,ds'=\frac{d}{dt}i\int\int\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{1}{r}ds\,ds'=-\frac{d(\mathrm{M}i)}{dt}. \tag{31}$$

» Cette égalité ne serait juste que si $\frac{dr}{ds}$ et $\frac{dr}{ds'}$ étaient indépendants du temps, ce qui n'a pas lieu.

» Maxwell aurait dû trouver pour la force électromotrice totale

$$\int\int\left[\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\right)+\frac{2i}{r}\frac{d^2 r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}\right]ds\,ds'=-\frac{d(\mathrm{M}i)}{dt}+\mathrm{J}i,$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{J}=\int\int\left(\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}-\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{ds'\,dt}\frac{dr}{ds}\right)ds\,ds'.$$

» Dans le cas des courants fermés, l'intégration par parties donne

$$\int\int\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}ds\,ds'=-\int\int\log r\,\frac{d^3 r}{dt\,ds\,ds'}ds\,ds'$$

et de même

$$\int\int\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{ds'\,dt}\frac{dr}{ds}ds\,ds'=-\int\int\log r\,\frac{d^3 r}{dt\,ds\,ds'}ds\,ds'.$$

» On a donc $J = 0$, et la force électromotrice est bien égale, comme l'indique Maxwell, à $-\frac{d(Mi)}{dt}$.

» Voyons ce qui se passe dans le cas des courants non fermés. Posons encore

$$M = -\int\int \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{1}{r}\,ds\,ds';$$

le travail de l'action électrodynamique mutuelle des deux circuits est égal à $ii'\,dM$, c'est-à-dire à l'accroissement du *potentiel* électrodynamique Mii', accroissement calculé comme si les intensités étaient constantes.

» On peut s'étonner de voir que le travail de l'attraction électrodynamique de deux courants *non fermés* soit égal à l'accroissement d'un certain potentiel. On sait, en effet, qu'il n'en est pas ainsi avec la loi d'Ampère, et la loi de Weber conduit précisément, pour l'attraction de deux éléments de courants, à la formule même d'Ampère.

» La contradiction n'est qu'apparente : la loi de Weber ne conduit à la formule d'Ampère qu'à la condition de supposer uniformes les vitesses de l'électricité à travers les conducteurs. Dans un courant non fermé, il ne peut pas en être ainsi. Considérons, en effet, une molécule électrique parcourant un fil non fermé AMB ; elle part du point A où elle est au repos, acquiert une certaine vitesse et arrive à l'autre extrémité B, où elle s'arrête, sa vitesse ayant décru jusqu'à zéro. Dans le voisinage des points A et B, cette molécule possède donc une accélération dont il faut tenir compte, puisque cette accélération entre dans la formule de Weber. Il résulte de là que les éléments du courant voisins des extrémités A et B n'obéiront pas à la loi d'Ampère. C'est ce qui explique pourquoi, dans la théorie de Weber, il ne suffit pas, pour obtenir l'action de courants non fermés, de composer entre elles les actions élémentaires calculées par la formule d'Ampère.

» Revenons à l'induction; d'après les idées habituellement reçues, la force électromotrice d'induction du premier circuit sur le second devrait être égale à $-\frac{d(Mi)}{dt}$. C'est à cette valeur que le calcul erroné dont j'ai parlé plus haut conduit Maxwell, et cette valeur est d'ailleurs conforme au principe de la conservation de l'énergie.

» Mais, en rectifiant ce calcul comme je l'ai fait plus haut, on trouve une valeur différente qui est

$$-\frac{d(Mi)}{dt} + Ji.$$

» *Dans le cas des courants non fermés, le terme correctif* J *n'est pas nul.*

» Et cependant, Maxwell dit quelques lignes plus haut (art. 856) :

» Weber's law is also consistent with the principle of conservation of energy in so far that a potential exists, and this is all that is required for the application of the principle by Helmholtz and Thomson. Hence we may assert, even before making any calculations on the subject, that Weber's law will explain the induction of electric currents.

» Ainsi, avant tout calcul, Maxwell se croyait certain de trouver la valeur $-\frac{d(\mathrm{M}i)}{dt}$.

» Que devons-nous donc conclure? *Il est inexact que le principe de la conservation de l'énergie suffise pour faire prévoir les lois de l'induction.* C'est d'ailleurs ce que savent déjà ceux qui ont lu les critiques profondes et spirituelles de M. Bertrand, dans sa *Théorie mathématique de l'Électricité :*

» On peut, dit M. Bertrand, page 212, remarquer avec grande raison que les deux courants qui s'attirent deviennent solidaires; il est impossible de considérer l'un d'eux comme formant un système isolé.

» J'ajouterai que, si on le faisait, on serait conduit à des contradictions comme celle que M. Bertrand signale au commencement de la page 217.

» Cherchons donc à tenir compte de toutes les circonstances du problème, en *admettant*, bien entendu, bien des choses, comme, par exemple, les lois de Joule, de Ohm et de Faraday.

» *Admettons* que l'induction du premier circuit sur le second comprend deux termes, l'un proportionnel à i et dépendant du déplacement relatif des deux circuits, l'autre proportionnel à $\frac{di}{dt}$ et dépendant de la variation de l'intensité.

» La force électromotrice due à l'induction du premier circuit sur le second pourra alors s'écrire

$$-\mathrm{B}\frac{di}{dt} - \mathrm{C}i.$$

» La force électromotrice due à l'induction du second circuit sur le premier s'écrira

$$-\mathrm{B}'\frac{di'}{dt} - \mathrm{C}'i'.$$

» Voici alors ce qu'on peut tirer du principe de la conservation de l'énergie

$$(a) \qquad B = B', \qquad C + C' = \frac{dM}{dt} + \frac{dB}{dt}.$$

» Il est *naturel d'admettre* que, si un courant égal à i se déplace pour aller d'une position H dans une position voisine H', la force électromotrice due à ce déplacement sera égale à celle que produiraient la disparition d'un courant égal à i en H et la naissance d'un courant égal à i en H', disparition et naissance qui seraient dues non à des déplacements de circuits, mais à des variations d'intensité.

» Si l'on adopte cette hypothèse, *qui ne s'impose pas d'une manière absolue,* on aura

$$(b) \qquad C = \frac{dB}{dt}, \qquad C' = \frac{dB'}{dt},$$

et il viendra

$$(c) \qquad B = B' = M, \qquad C = C' = \frac{dM}{dt}.$$

» C'est ce que l'on suppose d'ordinaire; c'est ce qui arrive certainement pour les courants fermés; c'est le résultat auquel conduit le calcul erroné de Maxwell pour les courants non fermés.

» Mais si l'on rectifie ce calcul, on trouve

$$(d) \qquad B = B' = M, \qquad C = \frac{dM}{dt} - J, \qquad C' = \frac{dM}{dt} + J.$$

» Ces valeurs sont conformes, comme les valeurs (c), aux équations (a) déduites du principe de la conservation de l'énergie; mais on voit que, si l'on adopte la théorie de Weber, il faut renoncer, pour les courants non fermés, aux hypothèses exprimées par les équations (b), quelque naturelles qu'elles puissent paraître.

» Si l'on renonce à ces hypothèses, le principe de la conservation de l'énergie devient insuffisant pour déterminer les coefficients d'induction.

» Je suis heureux d'avoir appuyé d'un argument nouveau les judicieuses critiques de M. Bertrand. »