NOTICE SUR HALPHEN;

PAR M. H. POINCARÉ.

I.

Halphen naquit à Rouen en 1844; il entra à l'École Polytechnique à l'âge de 18 ans, en 1862, et il en sortit à la fin de sa seconde année d'études avec le grade de sous-lieutenant d'artillerie. Son étonnant talent d'algébriste avait déjà été remarqué à l'École par ses maîtres et par ses camarades; cependant ce fut seulement en 1869 qu'il publia son premier travail original, qui, sans donner toute sa mesure, pouvait déjà faire concevoir les plus grandes espérances. Peu de mois après il était en possession des principaux résultats de son Mémoire sur les courbes gauches algébriques, l'une de ses productions les plus dignes d'admiration. La plupart de ces résultats ne furent publiés que bien des années plus tard. Les terribles événements de l'année 1870 l'empêchèrent sans doute de terminer la rédaction définitive et ce beau travail, résumé dans quelques Notes succinctes des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* resta longtemps ignoré de presque tous les savants.

Au commencement de la guerre, Halphen, récemment nommé lieutenant en premier, se trouvait à Besançon et il s'occupa de l'armement de cette place. Sans doute il maudissait la mauvaise fortune qui, en l'attachant à ces utiles travaux, l'éloignait des champs de bataille; il ne prévoyait guère tous les avantages qu'il lui devrait : ignorer les longues tristesses de la captivité, combattre pour son pays jusqu'au dernier jour, assister aux rares épisodes de cette campagne dont un Français puisse se souvenir sans douleur! A peine remis d'une chute de cheval, où il s'était brisé la clavicule, il partit pour Mézières et y arriva peu de jours avant la catastrophe de Sedan. Il put heureusement quitter cette place avant l'investissement et rejoignit l'armée du Nord.

On sait les héroïques efforts de cette petite armée, si vite improvisée, ses alternatives de succès et de revers, et l'écrasement final de Saint-Quentin.

Halphen, bientôt nommé capitaine, prit part à la bataille de Pont-Noyelles, où sa brillante conduite lui valut la croix de la Légion d'honneur, à celle de Bapaume et à celle de Saint-Quentin. Les services qu'il rendit dans cette dernière affaire attirèrent l'attention du général Faidherbe qui les rappelle dans son rapport :

« La batterie Halphen, dit-il, avait pris une excellente position à la gauche de Francilly et y a combattu d'une manière remarquable pendant toute la journée. »

Le jeune capitaine pouvait être légitimement fier d'un tel éloge venant d'un tel chef.

« Halphen, dit à ce sujet M. Hermite, Faidherbe, après tant d'autres, ont été fidèles à la double mission de l'École Polytechnique et ont continué ses glorieuses traditions. N'y a-t-il pas effectivement, dans les habitudes de l'intelligence, dans cette nature particulière que crée l'enseignement de notre grande École, une liaison normale, une concordance avec les qualités du soldat? Une rigoureuse discipline de l'esprit prépare aux devoirs militaires, et l'on ne peut douter que les études mathématiques contribuent à former cette faculté d'abstraction indispensable au chef pour se faire une représentation intérieure, une image de l'action par laquelle il se dirige, en oubliant le danger, dans le tumulte et l'obscurité du combat. »

Ces paroles de M. Hermite méritent d'être méditées, et je ne puis qu'y souscrire, pourvu que l'on n'oublie pas que c'est avant tout l'énergie morale qui fait le capitaine comme elle fait le soldat.

Quand la guerre étrangère fut terminée, Halphen prit part à la lutte contre la Commune et au second siège de Paris. Ses services avaient été trop appréciés pour que la Commission des grades ne lui maintînt pas le troisième galon qu'il avait si bien mérité.

Il n'allait pas tarder d'ailleurs à être appelé sur un autre théâtre, où ses qualités scientifiques devaient briller d'un si vif éclat. En 1873, il fut nommé répétiteur à l'École Polytechnique, et pendant treize ans il appartint tout entier à la Science.

Ses travaux, que nous analyserons plus loin, l'avaient placé déjà au premier rang parmi les géomètres contemporains, quand un double succès académique vint attirer sur son nom l'attention du monde savant.

L'Académie de Berlin avait mis au concours l'étude des courbes gauches algébriques; il s'était déjà occupé de ce sujet en 1869 : j'ai dit par suite de quelles circonstances ses travaux étaient restés à peu près ignorés. Il compléta sa rédaction et ajouta à son œuvre plusieurs Chapitres importants. L'Académie partagea le prix entre Halphen et le célèbre géomètre allemand M. Nöther.

Presque en même temps, il remportait dans son pays même un autre succès non moins éclatant. L'Académie des Sciences de Paris lui décernait, en 1881, le grand prix des Sciences mathématiques pour son important Ouvrage sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrales.

Son élection à l'Institut ne pouvait tarder et, en effet, en mars 1886, à sa première candidature, il fut élu par 49 voix sur 51 votants. Cette unanimité presque complète, qu'il est si rare d'obtenir, montre quelle estime le mérite d'Halphen inspirait à tous les savants français.

Bien qu'éloigné depuis longtemps du service militaire actif, il en avait conservé le goût et il désirait s'y retremper pendant quelques années. Il demanda donc à quitter l'École Polytechnique et il fut envoyé à Versailles, au 11^e^ régiment d'artillerie, avec le grade de chef d'escadron.

Il fit cependant une année encore les examens d'entrée, dont il était chargé depuis 1884.

Malgré le zèle avec lequel il s'acquittait de ses devoirs militaires, il ne fut perdu ni pour l'Académie, dont il continua, malgré l'éloignement, à suivre assidument les séances, ni surtout pour la Science.

C'est à cette époque, en effet, qu'il rédigea son Livre sur les fonctions elliptiques, dont je parlerai longuement plus loin.

Il menait cette vie si bien remplie, depuis trois ans déjà, quand la mort, hâtée peut-être par tant de fatigues, vint le frapper, presque subitement, le 23 mai 1889.

De longs jours lui semblaient encore promis. Les géomètres attendaient de lui des travaux aussi nombreux et aussi remarquables que ceux qu'il avait déjà produits. Sans doute après avoir achevé son grand monument, son *Traité des fonctions elliptiques,* il porterait son admirable pénétration dans de nouveaux domaines.

Comment cet espoir a-t-il été déçu? Comment ce savant officier, dont le corps paraissait aussi vigoureux que l'esprit, nous a-t-il été si promptement enlevé?

Le travail acharné auquel il dut se livrer pour terminer les deux premiers volumes de sa *Théorie des fonctions elliptiques,* dans les quelques heures que lui laissait le service du régiment, ce grand effort intellectuel, joint aux fatigues physiques de sa vie militaire, ont-ils donc excédé ses forces? Je ne sais.

Au mois d'avril 1889, il manqua plusieurs séances de l'Académie; des bruits alarmants, auxquels on refusait de croire, commençaient à circuler; puis, un jour, les avis des médecins ne permirent plus à ses Confrères de conserver le moindre doute. Le lendemain, cette grande intelligence s'éteignait.

Sa mort fut un deuil pour la Science française, mais elle ne fut pas ressentie moins vivement au delà des frontières. Que de lettres j'ai reçues, où des savants étrangers me disaient la sympathie qu'on éprouvait chez eux pour la perte cruelle et irréparable dont la France était frappée!

Je voyais ainsi que, devant un talent aussi éminent, les petites jalousies nationales se taisaient et que les admirables qualités d'Halphen, si françaises pourtant, étaient aussi appréciées à l'étranger qu'en France.

II.

Sa franchise et sa loyauté le faisaient estimer de tout le monde.

Sa bienveillance n'était pas banale, mais elle le faisait aimer de ceux qui avaient su la mériter. Aussi ses amis étaient fiers de son amitié, et, sûrs de pouvoir compter sur lui, lui étaient très attachés.

Sa critique était redoutée, parce que son jugement n'hésitait jamais et que sa raillerie était spirituelle et mordante. Je ne crois pas pourtant qu'elle lui ait fait d'ennemis; car on le savait indulgent pour les personnes et uniquement inspiré par le souci de la Science.

Il se faisait, de ce que doit être un savant et de ce que doit être l'Académie, l'idéal le plus élevé. C'est pourquoi il semblait quelquefois si sévère pour les œuvres médiocres; c'est pourquoi, aussi, ses votes n'étaient jamais dictés par des considérations mondaines ou personnelles.

Bien des personnes ont pu croire que, comme tous les juges qui se trompent rarement, il persévérait volontiers dans ses erreurs. Je dois avouer que je l'ai cru longtemps moi-même, jusqu'à ce qu'un exemple frappant m'ait détrompé.

Ces mêmes qualités faisaient de lui pour l'École Polytechnique un examinateur précieux. Dans cette tâche délicate, bien des écueils sont à éviter; il faut dans le peu de temps dont on dispose, découvrir la véritable valeur des candidats sous le vernis uniforme dû à l'art des préparateurs. Cela ne suffit pas encore; il faut faire accepter son arrêt par le public qui assiste aux examens et qui n'a pas toujours l'habitude de distinguer la réalité de l'apparence; pour cela ce n'est pas assez de deviner la vérité, il faut forcer le candidat à la faire éclater par ses réponses.

Il faut, en un mot, un jugement prompt et droit, éclairé et sûr de lui-même, qui n'est donné qu'à de rares privilégiés et qu'Halphen possédait au plus haut degré.

III.

Avant d'analyser en détail les différents Mémoires d'Halphen, je voudrais définir en quelques mots le caractère essentiel de son talent; mais, pour cela, je ne puis mieux faire que de répéter ce qu'a dit M. Picard dans sa Notice nécrologique (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 489).

Les Mathématiciens se partagent entre deux tendances opposées.

Tandis que les uns, uniquement curieux d'étendre toujours plus loin les frontières de la Science, s'empressent, pour courir à de nouvelles conquêtes, de laisser là un problème dès qu'ils sont sûrs de pouvoir le résoudre, les autres se préoccupent d'en trouver effectivement la solution et ne l'abandonnent jamais sans en avoir tiré toutes les conséquences. Les premiers ressemblent aux voyageurs qui croient connaître un pays pour l'avoir traversé à la vapeur, les autres veulent le parcourir pas à pas et n'en laisser aucune partie inexplorée.

Esprit pénétrant autant que juste, Halphen pouvait choisir entre ces deux voies opposées. Il a préféré la seconde, et c'est ce qui donne à son œuvre son remarquable caractère d'absolue perfection. Tout ce qu'il a touché est maintenant achevé et il n'y a plus à y revenir.

Les géomètres qui ne l'ont pas lu, s'il y en avait, pourraient seuls regretter ce choix. « Le général, diraient-ils sans doute, est seul digne de nos efforts. Les équations de la division de l'argument sont résolubles par radicaux. Voilà un résultat simple, général, élégant et, par conséquent, intéressant. Sans doute nous serions bien embarrassés s'il nous fallait en résoudre une seule. Mais qu'importe? Appliquerions-nous jamais la formule si nous étions parvenus à la construire effectivement? Qui s'est jamais servi de celle de Cardan? »

Ce serait là une critique bien superficielle.

On ne parvient au général que par le particulier; cela est vrai même dans les sciences exactes; car, si elles procèdent dans la démonstration du général au particulier, elles doivent dans l'invention suivre la marche inverse, comme les sciences d'observation elles-mêmes.

Il arrive quelquefois que dans cette marche on croit pouvoir brûler des étapes, mais on ne tarde pas à s'apercevoir que la profondeur fait défaut à ces connaissances trop rapidement acquises.

Quand on croit posséder le moyen de résoudre une vaste catégorie de problèmes, ce n'est donc pas retourner en arrière que de traiter en détail un cas particulier. Cette étude nous fera seule connaître la valeur de la méthode générale et nous permettra d'en dégager les éléments essentiels et d'y découvrir ce qui peut servir de germe à une généralisation ultérieure.

Si les mathématiciens s'abandonnaient tous à la première tendance, la Science ne tarderait pas à s'encombrer d'une foule de méthodes pratiquement inapplicables et les savants s'habitueraient trop vite à se contenter à bon marché. Ceux qui sont au courant de l'état actuel des Mathématiques ne jugeront peut-être pas que cette crainte soit sans fondement.

Il peut sembler superflu de rien ajouter; qu'on me permette cependant de me placer à un autre point de vue et d'expliquer pourquoi ce genre de recherches, quand même il devrait être inutile, ne serait pas pour cela sans intérêt.

Le savant digne de ce nom, le géomètre surtout, éprouve en face de son œuvre la même impression que l'artiste; sa jouissance est aussi grande et de même nature. Si je n'écrivais pas pour un public amoureux de la Science, je n'oserais pas m'exprimer ainsi; je redouterais l'incrédulité des profanes. Mais ici je puis dire toute ma pensée. Si nous travaillons, c'est moins pour obtenir ces résultats positifs, auxquels le vulgaire nous croit uniquement attachés, que pour ressentir cette émotion esthétique et la communiquer à ceux qui sont capables de l'éprouver.

Cette émotion, les œuvres inspirées par les deux tendances opposées peuvent également nous la procurer. Si nous aimons à gravir les cimes d'où nous découvrons de larges horizons, notre admiration est-elle moindre devant les ouvrages accomplis de la statuaire grecque? C'est à ces chefsd'œuvre que font penser les Mémoires d'Halphen, où il semble qu'on ne pourrait changer un seul mot sans en détruire l'harmonie.

Avouerai-je que je l'ai souvent envié? Je n'ai jamais terminé un travail sans regretter la façon dont je l'avais rédigé ou le plan que j'avais adopté. Voilà une impression qu'Halphen n'a jamais connue.

Mais à quoi bon insister? ce plaidoyer est bien inutile. Je vais analyser les ouvrages d'Halphen et le lecteur verra à quel point, en étant complet et parfait, on peut rester original et pénétrant; il verra que ce puissant génie a accru le domaine de l'Analyse, non seulement en profondeur, mais encore en étendue.

La netteté de son esprit avait fait de lui non seulement un géomètre de premier ordre, mais un écrivain d'un réel mérite. Aussi pouvait-il être goûté de ceux mêmes qui sont restés étrangers aux progrès des Sciences mathématiques. Tout le monde ne le sait pas, mais ses Confrères de l'Institut, qui ont entendu ses remarquables Rapports, ne peuvent l'ignorer.

Les Notices scientifiques que publient les candidats à l'Académie ne sont d'ordinaire que de sèches nomenclatures, et les Académiciens ne les lisent que par devoir. Celle d'Halphen, je ne crains pas de le dire, est écrite avec autant d'esprit que de logique, et sa lecture a été un plaisir même pour les savants adonnés à des études très différentes.

IV.

Une conique est définie par cinq conditions. Si donc on considère le système des coniques assujetties à quatre conditions seulement, leur équation générale ne contiendra plus qu'un seul paramètre arbitraire. Il importe de savoir combien un pareil système contient de coniques qui satisfassent à une cinquième condition.

La solution proposée par M. l'Amiral de Jonquières est simple, mais incomplète. Soit μ le nombre des coniques du système qui passent par un point donné, soit α un nombre dépendant seulement de la cinquième condition imposée; le nombre des coniques du système qui satisferont à cette condition sera égal à $\alpha\mu$. La loi de M. de Jonquières est vrai dans certains cas, mais l'examen le plus superficiel montre qu'elle comporte des exceptions; c'est ainsi que le nombre des coniques du système qui touchent une droite donnée n'est pas proportionnel à μ.

Quand cette loi est-elle en défaut et qu'arrive-t-il alors? Tel est le problème que Chasles s'était posé, et voici le résultat simple qu'il croyait pouvoir énoncer. Soit ν le nombre des coniques du système qui touchent une droite donnée; soit β un second nombre analogue à α; le nombre des coniques satisfaisant à la cinquième condition sera $\alpha\mu + \beta\nu$; Chasles appelait μ et ν les *caractéristiques* du système et il donnait le moyen de calculer combien de coniques satisfont à cinq conditions données *quelconques*.

Malheureusement ce résultat n'était nullement démontré : il avait seulement été *observé* sur un grand nombre d'exemples, et si on le croyait général c'était par une induction qui aurait pu paraître légitime dans toute autre science qu'en Géométrie. Longtemps les géomètres cherchèrent vainement une démonstration; leur impuissance ne peut nous étonner puisque nous savons que le résultat de Chasles était faux; et, d'un autre côté, la raison qui le met quelquefois en défaut n'était pas facile à apercevoir.

Enfin, en 1873, deux géomètres annoncèrent presque simultanément qu'ils avaient démontré le théorème de Chasles. L'un était Clebsch, l'un des savants les plus justement célèbres de l'Allemagne, l'autre était Halphen lui-même. Le théorème était inexact pourtant. N'y a-t-il pas là de quoi scandaliser un peu ceux qui croyaient les mathématiciens infaillibles?

Comment peut-on se tromper dans ces sciences dont la méthode semble exclure l'erreur? On admettrait à la rigueur des fautes de calcul, mais non des fautes de raisonnement. Cependant la plupart des grands géomètres en ont commis; il est vrai que, le plus souvent, ils ont été les premiers à s'en apercevoir. Je ne citerai qu'Abel qui avait résolu les équations du cinquième degré avant de démontrer qu'elles sont insolubles.

Ici la difficulté était bien moins de résoudre le problème que de le bien poser. On croyait avoir complètement défini tous les termes dont on se servait; il n'en était rien pourtant. Quand doit-on dire qu'une conique satisfait à une condition donnée et, par exemple, qu'elle touche une droite donnée? Une conique infiniment aplatie se réduit en coordonnées ponctuelles à deux droites confondues, en coordonnées tangentielles à deux points distincts, qui ne sont autre chose que ses deux sommets.

Au point de vue ponctuel, une pareille conique touche une droite quelconque, puisqu'elle la rencontre en deux points confondus; au point de vue tangentiel, elle ne touche que les droites qui passent par ses sommets.

Proposons-nous donc de chercher combien, parmi les coniques inscrites à un quadrilatère, il y en a qui touchent une droite donnée.

Si l'on appliquait la formule de M. de Jonquières, on trouverait $\alpha = 2$, $\mu = 2$ et il devrait y en avoir quatre.

Au point de vue tangentiel, il n'y en a qu'une et M. de Jonquières a tort.

Au point de vue ponctuel, on retrouve cette même conique, et l'on doit compter en plus les trois coniques aplaties qui sont inscrites dans le quadrilatère. Cela fait en tout quatre, et M. de Jonquières a raison.

La présence de deux sortes de coniques dégénérées, les coniques aplaties qui sont singulières au point de vue ponctuel, et les systèmes de deux droites qui sont des coniques singulières au point de vue tangentiel, créait une première difficulté, mais ce n'était pas la seule.

Il existe, en outre, des coniques doublement singulières qui se réduisent à deux droites confondues au point de vue ponctuel et à deux points confondus au point de vue tangentiel. Halphen comprit le rôle important qu'elles devaient jouer. Dès lors, sa première erreur était reconnue et il touchait à la solution.

Ce n'était pas tout encore cependant.

Par quatre points on peut mener deux coniques tangentes à une droite donnée. Cela n'est plus vrai si cette droite passe par un des quatre points; ces deux coniques se confondent alors en une seule. Il est donc permis de prévoir que les formules auxquelles on sera conduit ne s'appliqueront pas dans tous les cas. Elles ne seront légitimes, disait-on depuis longtemps, que si les cinq conditions imposées sont *indépendantes.* Mais que doit-on entendre par ce mot? Dans chaque cas particulier, répondait-on, vous le comprendrez sans peine. Cela était vrai, mais ce n'était pas une définition. On ne pouvait rien faire avant de l'avoir trouvée. Halphen devait donc, avant d'aller plus loin, vaincre encore cette difficulté, et, quand il en eut triomphé, le problème était résolu.

La solution ne présente plus l'élégante simplicité qu'avaient rêvée MM. de Jonquières et Chasles; mais elle est désormais complète, aucun cas d'exception n'y peut plus échapper.

Halphen, ayant ainsi résolu définitivement cette question, qui arrêtait depuis si longtemps les plus habiles géomètres, ne l'a pas quittée sans l'avoir complètement épuisée. Un autre se fût sans doute borné à dire : la formule de Chasles est fausse et il n'existe aucune formule simple qui puisse la remplacer. Mais il n'était pas homme à se contenter de cette conclusion négative. Il eut l'ingénieuse idée d'introduire une notation symbolique particulière qui lui permit de condenser, en quelques lignes, des résultats qui, par leur complication, semblaient rebelles à toute formule analytique. L'ordre et l'élégance succédèrent ainsi de nouveau à une rebutante confusion.

Ces théorèmes s'étendent sans peine à une courbe quelconque plane ou gauche ou à une surface; Halphen n'avait plus qu'à parcourir sans effort la voie qu'il avait débarrassée de tout obstacle.

V.

Une autre question de pure Géométrie, qui retint longtemps Halphen, est l'étude des points singuliers des courbes algébriques. Elle est analogue à la précédente, bien que cette analogie n'apparaisse pas au premier coup d'œil. Un système de coniques satisfaisant à quatre conditions a une équation générale qui contient un paramètre arbitraire; quand on fait varier ce paramètre, les six coefficients de cette conique varieront à leur tour, et si l'on considère ces six coefficients comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à cinq dimensions, ce point décrira une certaine courbe. D'autre part, la cinquième condition imposée à la conique s'exprime par une équation entre ces six coefficients; elle représente alors une certaine surface dans l'espace à cinq dimensions. Le problème dit des *caractéristiques* de Chasles, qu'Halphen venait de résoudre, se ramène à l'étude des particularités que présente l'intersection de cette courbe et de cette surface, et la difficulté de ce problème est due à la présence de certaines singularités spéciales de cette courbe et de cette surface.

Le problème des points singuliers, qui occupa longtemps Halphen, n'est pas moins important pour l'Analyse que pour la Géométrie. D'une part, en effet, il touche aux travaux classiques de Puiseux, sur les fonctions algébriques, c'est-à dire à la théorie générale des fonctions. D'autre part, il se rattache aux transformations birationnelles des courbes algébriques, et, par conséquent, aux propriétés fondamentales des transcendantes abéliennes.

C'est à ce point de vue que se plaça bientôt Halphen. Étant donnée une courbe algébrique présentant des singularités quelconques, la transformer en une autre courbe n'ayant que des points multiples à tangentes séparées. C'était là, en même temps, résoudre un problème indispensable pour la théorie des fonctions abéliennes et compléter l'étude des points singuliers qui se trouvaient ainsi résolus en singularités ordinaires. Ce problème, sans doute, comporte une infinité de solutions. Mais on peut en distinguer quelques-unes qui sont particulièrement remarquables par leur élégance, leur simplicité, leur caractère géométrique.

Telles sont celles qu'a découvertes Halphen; il montre en premier lieu qu'une courbe plane quelconque peut être considérée comme la perspective d'une courbe gauche admettant un point singulier unique à tangentes séparées.

Une autre solution, plus intéressante encore, consiste à appliquer à une courbe donnée un nombre quelconque de fois une même transformation. Si cette transformation est convenablement choisie, on voit les singularités se simplifier à chacune des opérations successives, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des singularités ordinaires.

On peut, par exemple, envisager les développées successives de la courbe.

L'étude de cette transformation a conduit Halphen à un théorème aussi remarquable que caché : à partir d'un certain rang, les degrés et les classes des développées successives d'une courbe algébrique forment deux progressions arithmétiques de même raison.

VI.

Le chef-d'œuvre d'Halphen est, aux yeux de beaucoup de géomètres, son Mémoire sur les courbes gauches algébriques, couronné en 1881 par l'Académie de Berlin. Cette théorie contraste d'une étonnante façon avec celle des courbes planes algébriques. Pour ces dernières, un seul nombre, le degré, suffit pour une classification complète. Si l'on suppose qu'il n'y a pas de point singulier, ce nombre nous fait connaître toutes les particularités de la courbe étudiée; on peut en déduire, par des formules simples, la classe et le genre et, s'il existe des singularités, on sait comment chacune d'elles modifie ces formules.

Les courbes gauches algébriques ne jouissent pas des mêmes propriétés; il ne suffit pas, pour les définir, de se donner un nombre unique; on ne peut pas non plus faire jouer à un système d'entiers le même rôle qu'au degré dans les courbes planes. Il ne peut être question d'écrire l'équation générale des courbes gauches du $n^{\text{ième}}$ degré; cette expression n'a même aucun sens.

La théorie des courbes planes ressemble, si l'on veut me permettre cette comparaison, à ces cités modernes où les rues se coupent à angles droits et où le voyageur trouve tout de suite son chemin; l'autre théorie fait penser aux villes anciennes dont le plan est dépourvu de symétrie, et dont les voies se croisent de la façon la plus capricieuse.

Pour se reconnaître dans un pareil dédale, le tact n'était pas moins nécessaire que la pénétration. Nous ne devons pas nous étonner dès lors qu'Halphen y ait si bien réussi.

Le genre n'est plus ici lié au degré par une relation algébrique, mais il satisfait à certaines inégalités, les unes presque évidentes, les autres très cachées et qu'une sagacité supérieure pouvait seule découvrir. Il en est de même de plusieurs autres nombres importants, par exemple du degré de la surface d'ordre minimum qui passe par la courbe.

Ces généralités remplissent les premiers Chapitres; les derniers sont consacrés à l'étude de diverses courbes particulières, par exemple de celles qui sont tracées sur les quadriques.

Le problème était donc résolu; mais, comme la solution n'était susceptible d'aucune expression analytique, elle aurait pu échapper au lecteur superficiel. Il fallait d'ailleurs éprouver la méthode, ce qu'Halphen n'a jamais manqué de faire. C'est pour cette raison qu'il termine son Mémoire par la classification complète des courbes des vingt premiers degrés et des courbes de degré 120.

Quelques-unes des circonstances que les travaux d'Halphen ont mises en lumière sont bien curieuses et inattendues. Il n'existe pas toujours des courbes gauches sans point singulier de degré d et de genre g. Si le degré d est donné, le genre g reste compris entre certaines limites. Il fallait d'abord déterminer le maximum et le minimum de g, et ce n'était pas chose aisée. Mais un fait que rien ne permettait de prévoir et qui ne se présente que pour les courbes de degré élevé, c'est que le nombre g ne peut pas prendre toutes les valeurs comprises entre ce maximum et ce minimum; la série des genres présente des lacunes qui semblent d'abord distribuées sans aucune loi.

VII.

Tels sont les services qu'a rendus Halphen à la Géométrie des courbes et des surfaces algébriques. Pour en apprécier l'importance, il convient de considérer dans leur ensemble tous ces travaux géométriques. Ils sont, en effet, étroitement liés les uns aux autres, malgré l'apparence contraire, et ils ont été inspirés par une pensée unique, ainsi que le comprendra aisément tout lecteur un peu attentif.

Tous se rattachent à la « Géométrie énumérative », à cette branche de la science dont l'intérêt est considérable, qui doit ses premiers progrès à Chasles et qui a été cultivée après lui par les savants de tous les pays. Cette Géométrie a pour but de déterminer le nombre des points, des droites, des courbes ou des surfaces qui satisfont à certaines conditions données.

Une figure quelconque d'espèce donnée est toujours définie par un certain nombre de paramètres, et les conditions qu'on lui impose peuvent toujours se traduire par des relations algébriques entre ces paramètres. Tous ces problèmes se ramènent donc à la détermination du nombre des solutions communes à plusieurs équations algébriques. Ce nombre est égal au produit des degrés de ces équations ; telle est la règle simple, et, si je puis m'exprimer ainsi, la règle brute qui semble répondre à toutes ces questions.

Si l'on s'en contentait, la Géométrie énumérative tiendrait en quelques lignes, mais elle perdrait en même temps son intérêt. Le plus souvent, toutes les solutions communes à un système d'équations ne conviennent pas au problème proposé; quelques-unes d'entre elles doivent être rejetées pour des raisons diverses.

Nous avons vu, par exemple, à propos de la théorie des caractéristiques, qu'on est conduit, dans certains cas, à laisser de côté certaines coniques dégénérescentes qu'on croirait d'abord devoir accepter comme solutions du problème.

Une courbe gauche est définie par deux équations que l'on peut choisir de diverses manières, et ces deux équations représentent deux surfaces; dans le Mémoire d'Halphen, les deux surfaces sont un cône et un monoïde, qui admettent comme intersection, non seulement la courbe gauche envisagée, mais encore plusieurs droites. Dans toutes les questions relatives aux courbes gauches, les solutions apparentes dues à la présence de ces droites doivent évidemment être rejetées.

Ce qu'il y a à faire, et ce qui exige autant de discernement et de sagacité que de dextérité analytique, c'est donc de distinguer les diverses espèces de solutions, de les énumérer séparément et surtout de reconnaître celles qui doivent être conservées.

Tout cela, dira-t-on, est une affaire de convention. Encore faut-il énoncer clairement cette convention, et l'analyse que j'ai donnée plus haut des travaux d'Halphen nous a montré que ce n'était pas toujours chose aisée.

On ne l'a malheureusement pas toujours fait; une convention semblait naturelle, parce que l'on considérait les choses d'un certain biais; on l'admettait sans l'énoncer explicitement. D'autres chercheurs se plaçaient ensuite à un point de vue différent et oubliaient cette convention tacite; de là des contradictions tantôt apparentes, tantôt réelles.

En général, disait-on volontiers, il arrive ceci ou cela; on oubliait que, sans une convention spéciale, le mot *en général* n'a aucun sens.

On a même quelquefois admis sans preuve suffisante que deux ou plusieurs équations étaient distinctes, simplement parce que l'on n'avait aucune raison de croire le contraire.

La Science glissait sur une pente dangereuse; la Géométrie énumérative devait payer ses succès faciles du début par d'éclatantes déconvenues; c'est là ce qui explique que dans la théorie des caractéristiques la même erreur ait été commise par Clebsch et Halphen, ainsi que je l'ai raconté plus haut. Encore ai-je oublié de citer deux autres savants qui, quelques années après, ont cru de leur côté démontrer le théorème inexact de Chasles.

Il appartenait à Halphen de rendre à cette branche de la Science la rigueur absolue sans laquelle les Mathématiques ne sont rien. Désormais les savants qui sauront comprendre les leçons d'un tel maître ne seront plus exposés à de semblables méprises.

Ce n'est pas tout. Dans ces sortes de questions, une formule générale comporte toujours des cas d'exception. On s'en consolait autrefois en les laissant de côté. Mais Halphen ne se contentait pas à si bon marché; il ne regardait pas un problème comme résolu tant que quelques cas particuliers restaient sans solution.

La difficulté le plus souvent ne fait ainsi que reculer ; quand on est venu à bout d'un cas d'exception, on trouve qu'il y a des cas plus exceptionnels encore qui échappent à la nouvelle formule. Il semble que la solution se retire à mesure que le chercheur croit avancer et qu'elle finira par lasser sa patience.

Halphen a eu souvent la persévérance et le bonheur de la poursuivre dans ses derniers retranchements et de l'y forcer. On doit lui savoir gré d'avoir su fréquemment conserver à la solution, bien que le problème, à cause de ces exceptions innombrables, parût s'y mal prêter, ce caractère de généralité sans lequel il n'y a pas d'élégance.

Parmi les problèmes de la Géométrie énumérative, il n'en est pas de plus compliqué que celui qui consiste à déterminer en combien de points une courbe algébrique de degré donné, ou une surface algébrique, satisfait à une équation différentielle donnée, ou à une équation donnée aux dérivées partielles. Les travaux d'Halphen sur ce sujet sont dignes d'attirer l'attention, non seulement à cause de l'importance et de la difficulté de la question résolue, mais surtout parce qu'il a été ainsi conduit à la découverte des invariants différentiels, qui devaient l'entraîner dans un domaine si différent et lui fournir tant d'occasions de servir la Science.

VIII.

Le procédé de la Science mathématique est toujours le même. Elle doit étudier des transformations de diverses natures, et pour cela elle doit rechercher ce qui demeure constant et inaltéré dans ces transformations. Partout elle a pour but l'étude des *groupes* et pour moyen la recherche des *invariants*. Cela n'apparaît pas dans tous les cas avec la même évidence, bien que cela soit toujours vrai. Si l'on voit du premier coup que la Géométrie projective n'est autre chose que la théorie des substitutions linéaires, on n'aperçoit pas aussi vite que la Géométrie élémentaire se ramène à celle des substitutions orthogonales.

Envisageons une courbe donnée, un point de cette courbe, les coordonnées de ce point et les dérivées des divers ordres de ces coordonnées. Il peut arriver qu'un certain groupe de transformations n'altère pas certaines fonctions de ces dérivées. Ces fonctions sont alors des invariants par rapport à ce groupe.

Considérons, par exemple, le groupe des changements orthogonaux de coordonnées; on a eu depuis longtemps l'idée, sans cependant prononcer le mot, d'étudier les invariants relatifs à ce groupe. C'est là le but de la Géométrie infinitésimale ordinaire et de la théorie de la courbure.

Halphen a étudié le groupe des substitutions linéaires, c'est-à-dire des changements projectifs de coordonnées; certaines fonctions de nos dérivées ne sont pas altérées par ces substitutions; Halphen leur donne le nom d'*invariants différentiels;* dans un Mémoire très important, il en fait la théorie complète et parvient à déterminer les plus simples et les plus remarquables d'entre eux. On peut dire que la théorie des invariants différentiels est à la théorie de la courbure ce que la Géométrie projective est à la Géométrie élémentaire.

Mais cette théorie allait recevoir une application bien inattendue. Peu de temps après, en effet, Laguerre introduisit l'importante notion des invariants des équations différentielles linéaires et construisit quelques-uns de ces invariants. Il ne remarqua pas leur analogie avec les invariants différentiels d'Halphen.

Halphen, pour qui cette étude était toute récente, l'aperçut immédiatement.

Si l'on considère une équation linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre définissant y en fonction de x; si l'on regarde les valeurs de n intégrales pour une valeur donnée de la variable x comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $n - 1$ dimensions, ce point décrira une courbe quand on fera varier x. Cette courbe ne changera pas quand on multipliera y par une fonction quelconque de x ou quand on changera de variable indépendante. Quand on remplacera les n intégrales considérées par n autres intégrales particulières quelconques, la courbe subira une transformation projective et ses invariants différentiels ne seront pas altérés. Il y a donc identité entre les invariants d'Halphen et ceux de Laguerre.

Cette seule remarque, jointe à ses travaux antérieurs, mettait Halphen en possession d'une théorie complète des invariants de Laguerre. Il ne l'avait pas encore publiée quand l'Académie des Sciences mit au concours le problème de l'intégration des équations linéaires. Halphen disposait pour cette étude d'un instrument puissant et précieux.

Les formes intégrables connues à cette époque étaient les équations à coefficients constants, quelques cas particuliers de l'équation de Gauss, certaines équations du second ordre à quatre points singuliers et les équations à coefficients doublement périodiques de M. Picard.

Il était évident que beaucoup d'autres équations pouvaient être ramenées à ces formes intégrables ; mais il n'était pas facile de reconnaître sur une équation donnée si cette réduction était possible et surtout de l'effectuer complètement. Il est aisé de voir que ce problème ne diffère pas en réalité de la recherche des invariants. Dans l'étude d'un groupe, on cherche toujours à réduire l'objet auquel s'appliquent les transformations de ce groupe à son expression la plus simple; si cet objet est une équation, par exemple, il est clair que les coefficients de l'équation réduite seront des invariants.

Le succès d'Halphen, armé comme il l'était, n'était donc pas douteux, mais il aurait pu être moins complet. Nous avons vu avec quelle ingéniosité il savait triompher des difficultés de détail que beaucoup d'autres négligent peut-être moins par dédain que par impuissance. Nous savons aussi qu'il ne s'arrêtait jamais sans avoir achevé son œuvre; aussi celle qu'il présentait au jugement de l'Académie et qui lui valut le Grand Prix des Sciences mathématiques, était-elle de tout point parfaite et digne de la haute récompense qu'elle a obtenue.

L'application de la théorie des invariants différentiels à l'intégration des équations linéaires nous réservait encore d'autres surprises. En égalant à zéro quelques-uns de ces invariants, dont la signification était bien connue, Halphen forma un grand nombre d'équations linéaires qui devenaient ainsi immédiatement intégrables, et dont le caractère aurait certainement échappé au chercheur s'il les avait abordées par une autre voie.

Certaines équations linéaires jouissent de cette propriété remarquable qu'il existe des relations algébriques non linéaires entre plusieurs solutions et leurs dérivées; rechercher ces équations et les intégrer ensuite lorsque cela est possible, c'était un problème où les invariants différentiels fournissaient des ressources précieuses, et qui par là devait tenter Halphen. Le succès ne pouvait lui échapper et il ne lui échappa pas, en effet.

Je ne puis quitter les équations différentielles sans mentionner celles qui se rattachent aux fonctions elliptiques, à la transformation, à la division de l'argument. Les travaux d'Halphen les ont rendues célèbres; mais j'aurai l'occasion de revenir sur ce sujet à propos du grand *Traité des fonctions elliptiques*.

Halphen a rendu à l'Analyse un autre service signalé. Au commencement du siècle, on avait conservé la fâcheuse habitude de se servir des développements sans se préoccuper de leur convergence. Abel, qui a pourtant l'un des premiers protesté contre ce détestable usage, ne s'en est pas toujours abstenu; dans un ouvrage de jeunesse, qu'à vrai dire il n'a pas voulu publier, Halphen a appliqué la série dite d'Abel dans des cas où elle est certainement divergente. Avertis par tant d'insuccès, les mathématiciens ont renoncé depuis longtemps à cette trompeuse pratique. Il en résulte que bien des développements qui pourraient encore être utiles, si on les employait à propos, sont tombés en désuétude. Il faut donc que les analystes les reprennent aujourd'hui pour reconnaître dans quelles conditions leur emploi peut être légitime. C'est ce qu'a fait Halphen pour la série d'Abel et pour quelques autres suites analogues. « Ce n'était là qu'un fragment détaché d'un travail fort long, dit l'auteur dans sa Notice, et que je n'ai pas encore achevé. »

Il ne devait jamais l'être; le savant géomètre en fut détourné d'abord par la rédaction de son *Traité des fonctions elliptiques,* et la mort ne lui permit pas d'y revenir.

Halphen s'est peu occupé de recherches arithmétiques pour lesquelles cependant il semblait né. Les travaux qu'il a publiés dans cette direction feraient regretter qu'il n'y ait pas consacré plus de temps, si nous ne savions d'autre part comment son temps a été employé. Je citerai seulement un Mémoire intitulé : *Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers,* où il retrouve, par une voie tout arithmétique, des résultats obtenus par la théorie des fonctions elliptiques, et surtout une Note *Sur l'approximation des sommes des fonctions numériques.*

IX.

Les dernières années d'Halphen ont été consacrées à une œuvre de fort longue haleine que la mort ne lui a malheureusement pas laissé achever : je veux parler de son *Traité des fonctions elliptiques* et de leurs applications. Le but de ce grand Ouvrage est nettement défini dans la préface ; les fonctions elliptiques n'ont pendant longtemps intéressé que les mathématiciens purs : les physiciens, les astronomes ne s'en servaient pas. Céla devait être, il faut d'abord qu'une théorie soit à peu près complètement achevée avant qu'elle puisse recevoir des applications, et toutes les parties de la Science doivent rester, pendant une première période, la propriété exclusive des théoriciens.

En ce qui concerne les fonctions elliptiques, cette première période a été longue et les savants qui, sans être analystes, ont besoin des sciences exactes, ont conservé longtemps pour ces transcendantes une crainte respectueuse.

Cela tient moins à la difficulté même de cette théorie qu'aux notations aussi compliquées que peu uniformes dont les géomètres l'avaient surchargée, et à ces innombrables formules rébarbatives que la mémoire refusait de retenir. Un traité d'ensemble où les notations, simplifiées autant que possible, seraient ramenées à l'unité, était devenu nécessaire ; le traité de Briot et Bouquet, déjà ancien, ne pouvait plus suffire ; il avait d'ailleurs été écrit plutôt pour les théoriciens que pour les hommes curieux des applications.

Tel est le caractère qu'Halphen a voulu donner à son livre et qui en fait l'originalité et l'intérêt.

Les notations employées sont celles de Weierstrass ; grâce à l'influence de cet illustre géomètre, les fonctions θ, sn, cn, dn, qui ont longtemps régné seules, sont aujourd'hui détrônées, au moins en Allemagne, par les fonctions $\wp(u)$ et $\sigma(u)$.

Le livre d'Halphen est le premier grand Ouvrage français où l'on ait attribué à ces transcendantes un rôle prépondérant. L'avantage des notations nouvelles, au point de vue des applications, est évident. La fonction $\wp(u)$, qui n'a qu'un seul infini double, est la plus simple des transcendantes doublement périodiques; elle est du second ordre, tandis que les fonctions de Jacobi étaient du quatrième ordre. La fonction σ est symétrique par rapport aux deux périodes; avec la fonction Θ, l'une de ces deux périodes jouissait, pour ainsi dire, d'une sorte de privilège qui pouvait sembler arbitraire. C'est surtout l'ancien module k qui me semble avantageusement remplacé par les invariants g_2 et g_3. Il encombrait toute la théorie de la transformation, en compliquait les formules, en masquait la simplicité.

Ce sont là des avantages théoriques, mais la supériorité pratique des notations nouvelles en découle directement. Quand on voulait appliquer les anciennes formules à une question quelconque de Mécanique ou de Physique, il fallait distinguer trois cas, suivant que le polynôme fondamental du quatrième degré avait o, 2 ou 4 racines réelles. Chacun d'eux exigeait une théorie spéciale. Aujourd'hui, une seule théorie suffit pour les trois cas; sans doute la discussion finale n'est pas évitée et elle ne peut pas l'être, mais elle est rejetée à la fin du calcul.

Je vois sans regret les fonctions sn, cn et dn reléguées au second plan; mais qu'il me soit permis de plaider un peu en faveur de la fonction Θ; la série si simple qui la représente met presque immédiatement en évidence ses propriétés essentielles, et cet avantage me semble compenser bien des inconvénients; je crois donc qu'elle ne tardera pas, après une disgrâce passagère, à reprendre son rang à côté de la fonction σ.

Le premier Volume est consacré tout entier à la théorie; dans les treize premiers Chapitres, elle est exposée complètement et sans faire appel à la théorie générale des fonctions; dans le quatorzième, l'auteur retrouve les mêmes résultats en s'appuyant sur les principes de l'Analyse moderne.

A-t-il voulu par là montrer, par un exemple éclatant, la puissance de cette Analyse qui conduit, en si peu de pages, à un but que l'on ne pouvait atteindre sans elle qu'à l'aide de tant de génie et au prix de tant d'efforts? Non, son but est tout différent et il l'explique lui-même dans sa Préface; ses premiers Chapitres n'ont pas été écrits pour les géomètres de profession; sans doute, ils trouveront beaucoup à y apprendre et ils se réjouiront d'y rencontrer le spectacle de nombreuses difficultés vaincues et d'une sorte de gageure gagnée. Mais cette première partie de ce grand Ouvrage est avant tout destinée aux savants qui veulent devenir capables d'appliquer ces transcendantes à la Mécanique et à la Physique, et qui ne sont pas au courant des travaux de Cauchy. Ils pourront y étudier la théorie des fonctions elliptiques, réduite à une sorte de Trigonométrie, un peu plus compliquée que celle que l'on enseigne aux élèves d'élémentaires, et n'auront besoin que de connaître la définition des intégrales réelles.

Halphen a-t-il réussi à rendre cette doctrine abordable à des mathématiciens aussi peu avancés? Je crois que oui, mais ce n'est pas à nous d'en juger.

Les divers développements en séries et en produits tiennent une grande place dans ce premier Volume; aucun, sans doute, n'est nouveau, mais ils sont tous reliés les uns aux autres d'une façon simple et exposés par des procédés élégants et ingénieux.

Je citerai surtout, page 405, la manière d'obtenir le développement de Θ en produit en partant du développement en série; elle est plus directe et moins artificielle que celle que nous devons à Jacobi.

Le second Volume a pour objet les principales applications des fonctions elliptiques.

L'auteur commence par les applications mécaniques, et il traite successivement de la rotation d'un corps solide soustrait à l'action de toute force et tournant autour d'un point fixe, de celle d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe, du mouvement d'un corps solide dans un liquide parfait indéfini en l'absence de force accélératrice, de la courbe élastique, de l'attraction de l'anneau elliptique de Gauss.

Viennent ensuite les applications géométriques aux lignes géodésiques des ellipsoïdes de révolution, auxquelles se rattachent divers problèmes pratiques de Géodésie, aux polygones de Poncelet, inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique, aux cubiques planes et enfin aux biquadratiques gauches.

Puis les applications au Calcul intégral, la quadrature des intégrales pseudo-elliptiques, l'intégration de l'équation d'Euler, l'étude approfondie de l'équation de Lamé, si intimement liée à tant de problèmes importants de Physique et d'Astronomie, et enfin l'intégration de plusieurs classes étendues d'équations différentielles linéaires.

Que l'on me pardonne cette longue énumération; j'ai voulu faire voir à quelle variété de sujets s'appliquent ces transcendantes remarquables et montrer, en même temps, qu'Halphen n'en avait négligé aucun. Chacun de ces chapitres peut être regardé comme un véritable Mémoire original. Tantôt l'auteur a tout à créer, tantôt il renouvelle la question par un mode nouveau d'exposition.

Quelques-uns de ces problèmes, en effet, étaient résolus, mais avec les anciennes notations et les anciennes méthodes, qui entraînent les inconvénients dont j'ai parlé plus haut. Dans le livre que nous analysons, ces inconvénients sont évités et il en résulte, dans les démonstrations, de grandes simplifications. La fatigue du lecteur est allégée par l'emploi d'une notation uniforme et rationnelle.

Le Chapitre XIV me paraît surtout digne de retenir l'attention. C'est là un de ces Ouvrages accomplis qui satisfont pleinement l'esprit et auxquels Halphen nous avait accoutumés. La question est des plus ardues, il s'agit de développer en fraction continue la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré. Ce problème se rattache, Jacobi l'avait remarqué, à la multiplication de l'argument, mais on n'obtient ainsi que les réduites successives; on ne sait rien sur la convergence. Les formules de Jacobi sont données sans démonstration; Halphen les a démontrées et considérablement simplifiées. Je louerais l'élégance de son exposition, si la lecture des Chapitres précédents ne nous avait trop habitués à cette qualité pour qu'elle puisse encore nous surprendre. J'aime mieux m'étendre sur la manière dont la question de la convergence est traitée. La théorie des fractions continues algébriques est une sorte de *terra incognita* où Laguerre seul avait pénétré; Halphen y est entré à son tour, et si la carte en est encore presque blanche, elle est traversée aujourd'hui par une sorte d'itinéraire semblable à ceux que de hardis pionniers ont tracés à travers les solitudes inconnues de l'Australie.

J'ajouterai que la théorie de ces développements en fractions continues est rattachée par l'auteur à celle des covariants et à celle des intégrales pseudo-elliptiques.

Le troisième Volume n'a pas paru; on pourrait presque dire qu'il n'en paraîtra rien. Il devait contenir la théorie de la transformation et les applications à l'Arithmétique. Quelques Chapitres sur la transformation ont été rédigés entièrement et ne tarderont sans doute pas à être imprimés; mais les résultats déjà acquis par Halphen et qui n'attendaient que leur forme définitive étaient bien autrement considérables.

L'étude de la multiplication complexe l'avait longtemps occupé et vivement passionné. La théorie, dont on se contente encore, lui semblait à certains égards un peu incomplète et barbare; les équations algébriques, auxquelles on est conduit, contiennent des facteurs parasites qui sont uniquement dus au mode de calcul employé, et qu'Halphen parvenait à faire disparaître dès les débuts du calcul. La résolution effective de ces équations par radicaux avait été également l'objet de ses efforts, et il l'avait obtenue dans le cas de nombres premiers déjà relativement grands, tels que 17 et 23. Toutes ces richesses sont perdues, et ses notes mêmes n'en contiennent aucune trace. Perte irréparable jusqu'à ce qu'il naisse un autre Halphen.

FIN DU LX^e CAHIER.