La précision du sismographe, proportionnelle à la distance focale des lentilles B, B_1, peut être augmentée à volonté avec cette distance qu'il sera toujours facile de prendre entre 10^m et 20^m, par exemple.

Remarques. — Ce sismographe donne la variation de la verticale par rapport au sol sur lequel il est établi; mais il ne donnerait les variations de cette ligne par rapport à l'axe du monde que si le sol local était immobile relativement à cet axe, au lieu d'être soumis à des oscillations lentes ou brusques constatées, presque partout, par les géologues.

Cette dernière espèce de variations peut être observée en rapportant la verticale aux étoiles, au moyen de notre lunette horizontale, à deux objectifs, et en dépouillant des effets de l'aberration, de la précession et de la nutation les distances zénithales méridiennes trouvées pour ces étoiles.

SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS,

PAR H. POINCARÉ.

J'ai publié dans le tome XIII des *Acta mathematica* un Mémoire où j'obtiens quelques résultats relatifs à un cas particulier du problème des trois corps et à divers problèmes de Dynamique; je crois qu'il ne sera pas inutile de reproduire ici sans démonstration quelques-uns de ces résultats pour les lecteurs du *Bulletin astronomique* qui n'auraient pas le temps de lire *in extenso* le Mémoire original, qui est assez volumineux.

Je ne parlerai ici que de ce cas particulier du problème des trois corps que je viens de mentionner et qui est le suivant.

Supposons trois masses A, B et C *se mouvant dans un même plan*. Je suppose que la masse A soit très grande, la masse B très petite, la masse C *infiniment* petite et incapable, par conséquent, de troubler les deux autres. Alors A et B se mouvront suivant les lois de Képler. Je suppose de plus que *les excentricités de* A *et de* B *sont nulles,* de telle sorte que ces deux masses A et B décrivent des circonférences concentriques, et je me propose d'étudier le mouvement de C sous l'attraction de A et de B dans le plan de ces deux circonférences. Tel serait le cas du Soleil, de Jupiter et d'une petite planète, si l'on négligeait l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Tous les résultats que je vais énoncer se rapportent à ce cas particulier. Depuis j'ai cherché à les étendre au cas général du problème des trois corps; tel a été le principal objet des leçons que j'ai professées à la Sorbonne de novembre 1889 à mars 1890 et qui seront publiées prochainement chez MM. Gauthier-Villars et fils; mais je ne m'occuperai pas pour le moment de cette extension.

Voici d'abord les notations que je compte employer.

Je définirai la position du point C par ses éléments osculateurs. Je désignerai par a, e et n le grand axe, l'excentricité et le moyen mouvement, par y_2 l'anomalie moyenne et par g la longitude du périhélie.

Je désignerai par 1 la masse de A et par μ celle de B; μ sera donc une quantité très petite. Je choisirai les unités et l'origine du temps de façon que la constante de Gauss soit égale à 1; que le moyen mouvement de B soit égal à 1, et la longitude de B égale à t.

Je poserai

$$x_1 = \sqrt{a(1-e^2)}, \qquad x_2 = \sqrt{a}, \qquad y_1 = g - t.$$

F sera la fonction perturbatrice augmentée de $x_1 + \frac{1}{2x_2^2}$; les équations prendront alors la forme symétrique

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}. \end{aligned} \right.$$

La fonction F sera susceptible d'être développée suivant les puissances de μ, et nous écrirons

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots;$$

on aura d'ailleurs

$$F_0 = x_1 + \frac{1}{2x_2^2}.$$

Enfin F sera fonction de x_1, x_2, y_1 et y_2 seulement et sera périodique de période 2π par rapport à y_1 et y_2.

Les équations (1) admettent, comme intégrale,

$$F = C;$$

cette intégrale, connue sous le nom d'intégrale de Jacobi, peut être obtenue en combinant celle des forces vives avec celle des aires.

On peut aussi la regarder comme l'intégrale des forces vives dans le mouvement relatif du point C par rapport à deux axes mobiles tournant d'un mouvement uniforme; à savoir la droite AB et une perpendiculaire à AB menée par le centre de gravité du système supposé fixe.

C'est pourquoi je conserverai à la constante C le nom de *constante des forces vives*.

Solutions périodiques.

Les premiers résultats sur lesquels je veux appeler l'attention sont relatifs à certaines solutions particulières remarquables des équations (1). Je citerai d'abord les solutions de la forme suivante, que j'appellerai solutions périodiques,

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad y_1 = n_1 t + \varphi_3(t), \qquad y_2 = n_2 t + \varphi_4(t).$$

Les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 sont des fonctions périodiques de période T et sont, par conséquent, développables suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. De plus, $n_1 T$ et $n_2 T$ sont des multiples de 2π.

Je distingue les solutions périodiques du premier genre, pour lesquelles les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 sont développables suivant les puissances de μ.

A chaque système de valeurs de n_1 et de n_2, commensurables entre eux, correspondent au moins deux solutions périodiques du premier genre.

J'enseigne à former les coefficients des séries φ qui sont absolument convergentes.

Solutions périodiques du deuxième genre.

Il existe également des solutions périodiques pour lesquelles les séries φ ne sont pas développables suivant les puissances de μ et que j'appellerai *solutions du deuxième genre*. Voici sous quelle forme elles se présentent d'ordinaire :

Soit

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad y_1 = n_1 t + \varphi_3(t), \qquad y_2 = n_2 t + \varphi_4(t)$$

une solution périodique du premier genre, c'est-à-dire développable suivant les puissances de μ; soit T la période. Soit

$$x_1 = \psi_1^0(t), \qquad x_2 = \psi_2^0(t), \qquad y_1 = n_1 t + \psi_3^0(t), \qquad y_2 = n_2 t + \psi_4^0(t)$$

ce que devient cette solution quand on y donne à μ une certaine valeur μ_0. Alors les fonctions ψ_i^0 sont développables suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$.

Il existera dans certains cas une solution périodique de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \psi_1^0(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{1}{2}}\psi_1^{(1)}(t) + (\mu-\mu_0)\psi_1^{(2)}(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{3}{2}}\psi_1^{(3)}(t) + \ldots,\\
x_2 &= \psi_2^0(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{1}{2}}\psi_2^{(1)}(t) + (\mu-\mu_0)\psi_2^{(2)}(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{3}{2}}\psi_2^{(3)}(t) + \ldots,\\
y_1 &= n_1 t + \psi_3^0(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{1}{2}}\psi_3^{(1)}(t) + (\mu-\mu_0)\psi_3^{(2)}(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{3}{2}}\psi_3^{(3)}(t) + \ldots,\\
y_2 &= n_2 t + \psi_4^0(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{1}{2}}\psi_4^{(1)}(t) + (\mu-\mu_0)\psi_4^{(2)}(t) + (\mu-\mu_0)^{\frac{3}{2}}\psi_4^{(3)}(t) + \ldots.
\end{aligned}$$

Les fonctions $\psi_i^{(1)}(t)$, $\psi_i^{(2)}(t)$, $\psi_i^{(3)}(t)$ sont périodiques par rapport à t; mais la période n'est pas égale à T comme pour les fonctions $\psi_i^0(t)$, mais à kT, k étant un nombre entier. Par conséquent, x_1, x_2, $y_1 - n_1 t$ et $y_2 - n_2 t$ sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu - \mu_0}$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{kT}$.

Pour $\mu > \mu_0$, on a deux solutions périodiques du deuxième genre réelles et distinctes; pour $\mu = \mu_0$, elles se confondent entre elles et avec la solution du premier genre

$$x_i = \psi_i^0(t), \qquad y_i = n_i t + \psi_{i+2}^0(t);$$

pour $\mu < \mu_0$, elles deviennent imaginaires.

Dans certains cas le contraire peut avoir lieu, et il peut arriver que les deux solutions soient réelles pour $\mu < \mu_0$ et imaginaires pour $\mu > \mu_0$.

Exposants caractéristiques.

Les solutions périodiques semblent d'abord sans aucun intérêt pour la pratique. La probabilité pour que les circonstances initiales du mouvement soient précisément celles qui correspondent à une pareille solution est évidemment nulle. Mais il peut très bien arriver qu'elles en diffèrent fort peu ; la solution périodique pourra jouer alors le rôle de première approximation d' « orbite intermédiaire ». Il peut donc y avoir intérêt à étudier les solutions qui diffèrent peu d'une solution périodique. Voici comment on opérera :

Soit

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t), \qquad (i = 1, 2)$$

une solution périodique quelconque.

Considérons une solution peu différente et posons

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t) + \eta_i.$$

Si les ξ_i et les η_i sont des quantités assez petites pour qu'on puisse en négliger les carrés, les équations deviendront

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum\nolimits_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dx_k} \xi_k + \sum\nolimits_k \frac{d^2 F}{dy_i\, dy_k} \eta_k \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum\nolimits_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dx_k} \xi_k - \sum\nolimits_k \frac{d^2 F}{dx_i\, dy_k} \eta_k \end{aligned} \right\} (i, k = 1, 2).$$

Dans les dérivées secondes de F qui figurent dans les équations (2), on doit remplacer x_i et y_i par $\varphi_i(t)$ et $n_i t + \varphi_{i+2}(t)$; les coefficients de ξ_k et de η_k dans les seconds membres de ces équations (2) sont donc des fonctions périodiques données de t.

L'intégrale générale des équations (2) s'écrit

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= A e^{\alpha t} S_i + B e^{-\alpha t} S'_i + (C + tD) S''_i + D S'''_i \\ \eta_i &= A e^{\alpha t} T_i + B e^{-\alpha t} T'_i + (C + tD) T''_i + D T'''_i \end{aligned} \right\} (i = 1, 2).$$

A, B, C, D sont quatre constantes d'intégration; α est une constante non arbitraire. S_i, S'_i, S''_i, S'''_i, T_i, T'_i, T''_i, T'''_i sont des fonctions périodiques de t développables suivant les sinus et les cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$.

La constante α et les coefficients de S_i, S'_i, T_i et T'_i sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, ceux de S''_i, S'''_i, T''_i et T'''_i suivant les puissances de μ. J'enseigne à former toutes ces séries qui sont absolument convergentes.

L'exposant α s'appelle exposant *caractéristique*. Il est réel ou purement imaginaire. Dans le premier cas, la solution périodique sera dite instable, dans le second cas elle sera dite stable. Cette dénomination se justifie aisément, bien qu'elle ne doive pas être prise dans un sens absolu, puisque nous avons négligé les carrés des ξ et des η.

Nous avons vu qu'il y aura au moins deux solutions périodiques du premier genre correspondant à chaque système de valeurs de n_1 et de n_2, commensurables entre elles. J'ajouterai qu'il y en aura toujours un nombre pair et précisément autant de stables que d'instables.

Solutions asymptotiques.

Soit

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t) \qquad (i = 1, 2)$$

une solution périodique quelconque *instable*. Il existe deux séries de solutions particulières remarquables que j'appellerai *solutions asymptotiques*.

Les solutions asymptotiques de la première série seront de la forme suivante :

$$(3)\begin{cases} x_i = \varphi_i(t) + A e^{-\alpha t}\theta_i^{(1)}(t) + A^2 e^{-2\alpha t}\theta_i^{(2)}(t) + A^3 e^{-3\alpha t}\theta_i^{(3)}(t) + \ldots, \\ y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t) + A e^{-\alpha t}{}_{i+2}^{(1)}(t) + A^2 e^{-2\alpha t}\theta_{i+2}^{(2)}(t) + \ldots, \\ \qquad\qquad i = 1, 2. \end{cases}$$

A est une constante arbitraire d'intégration, α est l'exposant caractéristique (que je suppose positif), les fonctions $\theta_i^{(1)}(t)$, $\theta_i^{(2)}(t)$, ... ($i = 1, 2, 3, 4$) sont périodiques de période T et développables par conséquent comme les $\varphi_i(t)$ par rapport aux sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Les coefficients du développement sont eux-mêmes des séries dont les termes sont rationnels en $\sqrt{\mu}$.

Inutile de faire remarquer que, si l'on reprend les notations du paragraphe précédent, on a

$$\theta_i^{(1)}(t) = S'_i, \qquad \theta_{i+2}^{(1)}(t) = T'_i.$$

Les séries (3) sont convergentes pour les valeurs de t suffisamment grandes. On voit que, quand t croît indéfiniment, les solutions représentées par les équations (3) se rapprochent asymptotiquement de la solution périodique.

Les solutions asymptotiques de la seconde série seront de la forme suivante :

$$(3\ bis)\quad \begin{cases} x_i = \varphi_i(t) + B e^{\alpha t} \omega_i^{(1)}(t) + B^2 e^{2\alpha t} \omega_i^{(2)}(t) + \ldots, \\ y_i = n_i t + \varphi_{i+2}(t) + B e^{\alpha t} \omega_{i+2}^{(1)}(t) + B^2 e^{2\alpha t} \omega_{i+2}^{(2)}(t) + \ldots. \end{cases}$$

B est une nouvelle constante d'intégration, α est encore l'exposant caractéristique; les fonctions ω sont de même forme que les fonctions θ qui entrent dans les équations (3). On obtient d'ailleurs les fonctions ω si dans les fonctions θ on change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$.

Les séries (3 *bis*) convergent pour les valeurs de t *négatives* et suffisamment grandes. Quand t tend vers $-\infty$, les solutions qu'elles représentent se rapprochent asymptotiquement de la solution périodique.

Solutions doublement asymptotiques.

Il existe une infinité de solutions qui appartiennent à la fois aux deux séries et qui sont, par conséquent, représentées par les équations (3 *bis*) pour les valeurs de t négatives et très grandes, et par les équations (3) pour les valeurs de t positives et très grandes.

L'orbite, d'abord très peu différente de celle qui correspond à une solution périodique, s'en éloigne peu à peu, et après s'en être écartée beaucoup finit par s'en rapprocher asymptotiquement.

L'existence des solutions doublement asymptotiques est un point d'une démonstration très délicate et qui m'a donné beaucoup de peine. En effet, les séries (3 *bis*) ne convergent que pour les valeurs de t négatives et très grandes, les séries (3) pour les valeurs de t positives et très grandes. Il y a généralement un intervalle où aucune des deux séries ne converge.

Divergence des séries.

Les considérations qui précèdent peuvent permettre d'établir que les séries habituelles de la Mécanique céleste sont divergentes; ce n'est pas qu'elles ne puissent néanmoins être utilement employées; en effet, il peut arriver que les termes d'une série décroissent d'abord très rapidement pour croître ensuite indéfiniment, et par conséquent que cette série, quoique divergente, puisse servir à représenter une fonction avec une approximation très grande, mais non indéfinie. Tel est le cas de la série célèbre de Stirling et de quelques développements usités en Physique mathématique. Tel est aussi celui des séries de la Mécanique céleste, et l'approximation qu'elles fournissent est très suffisante pour les besoins de la pratique. Ce que je veux dire de leur divergence n'est donc pas une raison pour en proscrire l'usage.

Les séries de M. Lindstedt ne peuvent pas converger uniformément pour toutes les valeurs de la constante d'intégration qui y entre; on démontre, en effet, que, s'il en était ainsi, il n'y aurait pas de solutions asymptotiques.

Je prendrai comme second exemple certaines séries dérivées des séries (3) et (3 *bis*). La série (3) converge; mais nous avons vu que ses coefficients peuvent eux-mêmes se développer en séries convergentes dont les termes sont rationnels en $\sqrt{\mu}$; quand on a fait ce développement, la série (3) reste encore convergente.

Supposons maintenant que l'on développe ces fonctions rationnelles de $\sqrt{\mu}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, ce développement est possible pour chacune d'elles. Mais si l'on ordonne ensuite la série (3) suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$, la série ainsi obtenue devient divergente; on démontre, en effet, que si elle convergeait toute solution asymptotique serait doublement asymptotique, ce qui n'a pas lieu.

Le développement auquel on parvient de la sorte et qui, bien que divergent, peut rendre des services au même titre que ceux de M. Lindstedt, se met sous forme élégante si l'on élimine t et A entre les quatre équations (3) par les règles ordinaires du calcul. On trouve, en effet, que x_1 et x_2 s'expriment en séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{y_1}{2}$ et $\frac{y_2}{2}$.

Non-existence des intégrales uniformes.

Les équations (1) admettent une intégrale qui s'écrit

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C:$$

c'est l'intégrale des forces vives; le premier membre F est uniforme par rapport à x_1, x_2, y_1 et y_2, périodique de période 2π par rapport à y_1 et y_2, développable suivant les puissances de μ.

Je dis qu'il n'y a pas d'autre intégrale de la même forme; c'est-à-dire que les équations (1) ne peuvent admettre une intégrale

$$\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C$$

distincte de la première et où Φ soit périodique en y_1 et y_2, développable suivant les puissances de μ, et uniforme pour toutes les valeurs réelles de y_1 et y_2, pour les valeurs suffisamment petites de μ et pour les valeurs de x_1 et de x_2 comprises dans un certain domaine.

On démontre, en effet, que, s'il en était ainsi, les séries de M. Lindstedt convergeraient. Ce résultat est d'ailleurs susceptible d'être généralisé de diverses manières.

Formes des orbites.

On peut se proposer de dessiner les orbites correspondant aux diverses solutions particulières dont je viens de parler, et j'ai l'intention de revenir sur ce point dans un autre article. Pour cela, le mieux est de considérer deux axes mobiles, à savoir : la droite AB et une perpendiculaire à AB menée par le centre de gravité du système, et de chercher à dessiner la trajectoire relative du corps C par rapport à ces axes mobiles.

Dans le cas des solutions périodiques, cette orbite relative est une courbe fermée; dans le cas des solutions asymptotiques, c'est une courbe en spirale se rapprochant asymptotiquement d'une courbe fermée. Il convient d'ajouter que les diverses spires se recoupent mutuellement.

Considérons une orbite fermée correspondant à une solution périodique et les deux séries d'orbites asymptotiques afférentes à cette même solution. Par un point M du plan passeront, en général, une ou plusieurs orbites asymptotiques de la première série, ainsi qu'une ou plusieurs orbites de la deuxième série. Soit T_1 une orbite de la première série passant par M; soit β l'angle sous lequel elle coupe une orbite T_2 de la deuxième série passant par M. Si β est nul, les deux orbites se confondent en une seule et deviennent ainsi doublement asymptotiques; il y a une infinité de points pour lesquels il en est ainsi.

Mais, en général, β n'est pas nul; cependant, si la masse μ est regardée comme un infiniment petit du premier ordre, on démontre que, parmi les angles β (sous lesquels T_1 coupe les diverses orbites asymptotiques de la deuxième série qui passent par M), il y en a un qui est infiniment petit d'ordre infini; je veux dire qu'il est du même ordre de grandeur que l'exponentielle $e^{-\frac{a}{\sqrt{\mu}}}$, a étant une constante positive.

Il est encore un autre point sur lequel je désire attirer l'attention.

Les séries (3) ne changent pas, si j'y change A en $Ae^{\alpha+T}$ et t en $t+T$; si donc on change A en $Ae^{\alpha T}$, l'orbite asymptotique correspondante ne change pas; la seule différence est que le mobile C passe en un même point de cette orbite à des époques différentes.

Ainsi les valeurs suivantes de la constante d'intégration

$$A,\ Ae^{\pm\alpha T},\ Ae^{\pm 2\alpha T},\ Ae^{\pm 3\alpha T},\ \ldots$$

correspondent à une seule et même orbite asymptotique.

Il est donc toujours permis, s'il ne s'agit que de définir cette orbite, de choisir la constante A entre 1 et $e^{\alpha T}$.

Cela posé, considérons n orbites doublement asymptotiques quelconques; pour des valeurs suffisamment grandes de t, les équations de ces orbites pourront se mettre sous la forme (3). A ces n orbites correspondront n valeurs de la constante A que j'appelle

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

et que je puis toujours supposer comprises entre 1 et $e^{\alpha T}$.

Pour des valeurs de t négatives et très grandes, les équations de ces mêmes orbites (en changeant au besoin l'origine du temps) pourront se mettre sous la forme (3 *bis*). A ces n orbites correspondront alors n valeurs de la constante B que j'appellerai

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

et que je pourrai toujours supposer comprises entre 1 et $e^{\alpha T}$.

Et bien, ce qu'il importe de remarquer et ce qui met bien en évidence la complication du problème des trois corps, c'est que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont rangés par ordre de grandeur croissante, les constantes, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ seront, en général, rangées dans un ordre tout différent.

Invariants intégraux.

Une notion nouvelle, celle des invariants intégraux, m'a été très utile pour démontrer les résultats qui précèdent. Je me bornerai ici à énoncer quelques propositions saillantes relatives à cette théorie.

Considérons le problème des trois corps; pour définir la situation du système, nous nous donnerons dix-huit variables : ce seront d'abord les trois coordonnées x_1, x_2, x_3 du premier corps, les projections y_1, y_2, y_3 de la quantité de mouvement de ce premier corps sur les trois axes. Ensuite $x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6$ seront les quantités analogues pour le deuxième corps, $x_7, x_8, x_9, y_7, y_8, y_9$ les quantités analogues pour le troisième corps.

Nous envisagerons alors neuf points dans un plan que j'appellerai $M_1, M_2, \ldots, M_9$ et dont les coordonnées seront respectivement $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_9, y_9)$. Cela posé, considérons une solution des équations différentielles du mouvement dépendant de deux constantes arbitraires α et β. Alors les x_i et les y_i seront des fonctions du temps de t, de α et de β. Soit μ le point dont les coordonnées sont α et β; si le point μ reste intérieur à une certaine aire σ, les points M_1, M_2, ..., M_9 resteront intérieurs à certaines aires S_1, S_2, ..., S_9. Ces neuf aires se déformeront et se déplaceront, puisque les coordonnées du point M_i dépendent non-seulement de α et β, mais encore du temps t; mais *la somme algébrique de ces neuf aires demeurera constante.* Il est à peine utile de faire observer que certaines de ces aires pourront avoir des parties positives et des parties négatives; c'est ainsi que, au point de vue analytique, l'aire totale de la lemniscate est nulle parce qu'une des boucles doit être regardée comme positive et l'autre comme négative.

Supposons maintenant que l'on envisage une solution ne contenant plus qu'une seule constante arbitraire α. Si cette constante α varie depuis α_0 jusqu'à α_1, les neuf points M_1, M_2, ..., M_9 vont décrire certains arcs λ_1, λ_2, ..., λ_9 qui se déplaceront et se déformeront avec le temps, puisque les coordonnées de M_i dépendent non seulement de α, mais encore de t. Soit U_i l'intégrale

$$\int (2x_i\,dy_i + y_i\,dx_i)$$

prise le long de l'arc λ_i. U_i sera une fonction du temps puisque l'arc λ_i se déplace. Soit c_0 la valeur de la constante des forces vives correspondant à $\alpha = \alpha_0$, et c_1 la valeur de la constante correspondant à $\alpha = \alpha_1$, on aura

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_9 + 3(c_1 - c_0)t = K,$$

K étant une constante indépendante du temps.

Stabilité.

Revenons au cas particulier dont nous nous sommes occupé presque exclusivement dans ce travail. Dans ce cas, MM. Hill et Bohlin ont démontré que le rayon vecteur CA ne peut croître au delà de toute limite; mais il reste pour établir complètement la stabilité un dernier point à démontrer. Il faut faire voir que les trois corps se retrouveront une infinité de fois aussi près qu'on voudra de leur position initiale.

L'existence même des solutions asymptotiques montre suffisamment qu'il existe une infinité de solutions particulières qui ne satisfont pas à cette condition. Mais, d'autre part, j'ai démontré, par la méthode des invariants intégraux, qu'il y en a aussi une infinité qui y satisfont. On peut donc, à ce point de vue, dire qu'il y a une infinité de solutions particulières instables, et une infinité de solutions particulières stables.

Mais il y a plus, on peut dire que les premières sont l'exception et que les secondes sont la règle, au même titre que les nombres rationnels sont l'exception et que les nombres incommensurables sont la règle. Je démontre, en effet, que la probabilité pour que les circonstances initiales du mouvement soient celles qui correspondent à une solution instable, que cette probabilité, dis-je, est nulle. Ce mot n'a par lui-même aucun sens : j'en donne dans mon Mémoire une définition précise que je ne crois pas utile de reproduire ici; mais je dois ajouter que le même résultat subsisterait, quelle que soit la définition adoptée, pourvu qu'il n'entre dans cette définittion que des fonctions continues.

NOTE SUR LA COMÈTE 1873 VII;

PAR MM. SCHULHOF ET BOSSERT.

Dans sa recherche sur l'identité des comètes 1873 VII et 1818 I, M. Schulhof a démontré que, sur dix hypothèses de la durée de révolution qui sont *a priori* possibles, sept doivent être absolument écartées, et il ne reste plus à examiner que les hypothèses $R = 5^{ans},58$, $R = 10^{ans},61$ et $R = 55^{ans},82$, cette dernière étant la plus probable. M. Schulhof a même regardé la durée de révolution $R = 5^{ans},58$ comme jouissant de peu de probabilités, attendu qu'elle laisserait subsister, après le calcul des perturbations entre 1873 et 1818, une erreur inadmissible dans le mouvement diurne de l'Æ en 1818, estimé par Pons d'environ $+7^m$ (*Bulletin astronomique,* t. III, p. 180, et t. VI, p. 117). Mais, comme l'estimation de Pons pourrait être sensiblement erronée et que, dans le cas de la réalité d'une période de $5^{ans},6$, la comète serait revenue vers la fin de 1890 dans des circonstances assez favorables,