COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 13 AVRIL 1891,

PRÉSIDENCE DE M. DUCHARTRE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles*. Note de M. H. Poincaré.

« La question de l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré n'a pas attiré l'attention des géomètres autant qu'elle le méritait. La voie a été ouverte, il y a vingt ans, par un admirable travail de M. Darboux; mais les analystes ont été fort longtemps sans s'y engager, et ce n'est que tout récemment que le problème a été repris par MM. Painlevé et Autonne, dans deux Mémoires que l'Académie vient de récompenser. L'importance du sujet me décide à publier quelques résultats qui s'y rapportent, bien qu'ils soient fort incomplets.

» J'écrirai l'équation différentielle sous la forme suivante

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} \end{vmatrix} = 0,$$

L, M, N étant trois polynômes entiers, homogènes et de degré m en x, y et z. Le nombre m s'appellera la *dimension* de l'équation.

» Si l'intégrale générale est algébrique, elle s'écrira

$$f + \mathrm{C}\varphi = 0,$$

C étant une constante arbitraire, et f et φ étant deux polynômes homogènes d'ordre p en x, y et z. J'appellerai *remarquables* les valeurs de C pour lesquelles le polynôme $f + \mathrm{C}\varphi$ n'est pas irréductible. Si l'intégrale générale algébrique a été mise sous sa forme la plus simple, ce que nous supposerons, le nombre des valeurs remarquables est fini.

» Le problème de l'intégration algébrique des équations différentielles serait résolu si l'on avait, dans tous les cas, une limite supérieure du nombre p.

» Les points singuliers de l'équation différentielle sont donnés par les équations

$$\frac{\mathrm{L}}{x} = \frac{\mathrm{M}}{y} = \frac{\mathrm{N}}{n}.$$

Ils sont au nombre de $m^2 + m + 1$; *nous les supposerons tous distincts*.

» Soient alors x_0, y_0, z_0 un de ces points singuliers; dans le voisinage de ce point, l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{X}_1^{-1}\mathrm{X}_2^{\mathrm{S}} = \text{const.},$$

S étant une constante, et X_1 et X_2 étant deux séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{x}{x_0} - \frac{z}{z_0}$, $\frac{y}{y_0} - \frac{z}{z_0}$ et s'annulant au point singulier.

» Il y a quelques cas d'exception; s'ils se présentaient, on serait certain que l'équation n'est pas intégrable algébriquement; on en serait certain également si, pour un des points singuliers, l'exposant S n'était pas réel et commensurable.

» Supposons donc que S soit réel et commensurable; nous appellerons *nœuds* les points pour lesquels cet exposant est positif, *cols* ceux pour lesquels il est négatif.

» Nous poserons $S = \frac{\mu}{\nu}$ pour les nœuds, $S = -\frac{\mu}{\nu}$ pour les cols, μ et ν étant deux entiers premiers entre eux.

» J'envisage un nœud et je suppose que la courbe

$$f + C\varphi = 0$$

ait en ce nœud λ branches distinctes; ce nœud sera d'ailleurs, en général, un point singulier pour chacune de ces branches.

» Je démontre que l'on a

$$p^2 = \mathrm{S}\,\lambda^2 \mu\nu, \qquad (m+2)p = \mathrm{S}\,\lambda(\mu + \nu),$$

les sommations du second membre devant être étendues à tous les nœuds.

» M. Painlevé a posé le problème suivant : *Reconnaître si l'intégrale générale de l'équation différentielle est une courbe algébrique de genre donné*, et il a énoncé un certain nombre de remarquables propositions qui peuvent aider à trouver la solution, au moins dans certains cas particuliers.

» Je trouve, en appelant q le genre,

$$q = 1 + \mathrm{S}\,\frac{\lambda}{2}\left[(\mu + \nu)\frac{m-1}{m+2} - 1\right];$$

cette formule contient la solution du problème de M. Painlevé toutes les fois que $m > 4$.

» Considérons une valeur remarquable de C et supposons que $f + C\varphi$ ne se réduise pas à une puissance d'un polynôme irréductible; je démontre que la courbe $f + C\varphi = 0$ va alors passer par un col.

» Je montre encore que le nombre total des valeurs remarquables ne peut dépasser le nombre des cols de plus de deux unités.

» Voici quelques autres résultats :

» Si tous les nœuds ont pour exposant $S = +1$, le nombre de ces nœuds est au moins égal à $\frac{(m+2)^2}{4}$.

» Si $S = +1$ pour tous les nœuds et que $S = -1$ pour tous les cols, le nombre des nœuds est précisément égal à $\frac{(m+2)^2}{4}$.

» Si, pour tous les cols, on a $S = -1$, on a la formule

$$\alpha_1\alpha_2(m+2) = p(\alpha_1 + \alpha_2),$$

α_1 et α_2 étant deux entiers premiers entre eux.

» Cette formule limite le nombre p et, par conséquent, résout complètement le problème dans ce cas particulier.

» Le principe qui m'a conduit à ce résultat est peut-être susceptible d'être étendu à des cas plus généraux; j'espère que plus d'un chercheur s'y efforcera dès que mes démonstrations seront publiées. »

PHYSIQUE. — *Description du manomètre à air libre de* 300 *mètres établi à la tour Eiffel;* par M. L. CAILLETET.

« On sait que la mesure des pressions des gaz ou des liquides ne peut être pratiquement obtenue, d'une façon précise et avec une approximation constante, qu'à l'aide de manomètres à air libre; c'est pour cette raison que, dans des expériences antérieures, j'avais installé, d'abord sur le flanc d'un coteau, puis plus tard, dans le puits artésien de la Butte-aux-Cailles, un manomètre à air libre de grande dimension. Cette disposition a été reproduite depuis par divers physiciens; mais les difficultés de manœuvre et d'observation d'un instrument installé dans ces conditions en limitent l'emploi et laissent subsister des incertitudes sur la précision des résultats.

» La construction de la tour Eiffel offrait des conditions exceptionnellement avantageuses pour l'installation d'un manomètre à air libre de 300^m, dont tous les organes, liés d'une façon invariable à la tour elle-même, fussent rendus accessibles à l'observateur sur toute son étendue.

» La pression de 400 atmosphères, que mesure un pareil manomètre ne pouvant être maintenue dans un tube de verre, on a dû recourir à un tube d'acier doux, de $4^{mm},5$ de diamètre intérieur, relié par sa base à un récipient de mercure. En comprimant à l'aide d'une pompe, d'après le dispositif bien connu, de l'eau sur le mercure, on peut l'élever graduellement jusqu'au sommet de la tour.

» L'opacité du tube d'acier s'opposant à la lecture directe du niveau du mercure, on a disposé de 3^m en 3^m, sur le trajet de ce tube, des robinets à vis conique, dont chacun communique avec un tube de verre vertical, d'un peu plus de 3^m de hauteur.

» Lorsqu'on ouvre un de ces robinets, on met l'intérieur du tube d'acier en communication avec le tube de verre dans lequel peut alors pénétrer le mercure. La position du niveau est donnée par une échelle graduée placée derrière ce tube. On a adopté pour la confection de ces échelles le bois verni, de préférence aux métaux. On sait, en effet, que le bois n'éprouve