

des lignes géodésiques et dont ces lignes seront des lignes asymptotiques.

» La composante de la rotation instantanée du cône (C) dans le plan osculateur de sa ligne géodésique sera tangente à cette ligne.

» Il suit de là et de ce qui précède que (S) roulera sur (S') suivant les lignes géodésiques de (C), (C'), et qu'on réalisera ainsi un engrenage sans frottement. »

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie de l'élasticité;*

par M. H. POINCARÉ.

« A l'occasion de ses intéressantes recherches sur l'élasticité qui lui ont permis de déterminer expérimentalement le rapport des deux coefficients de Lamé, notre éminent Confrère M. Cornu a attiré mon attention sur une question théorique au sujet de laquelle je désirerais présenter quelques observations.

» Soit un prisme rectangle élastique dont les six faces seront, si les axes de coordonnées sont convenablement choisis,

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c.$$

» Je suppose que les faces $z = \pm c$ soient soumises à des forces extérieures quelconques, mais que les quatre autres faces restent libres. Il s'agit d'étudier comment varie le rapport des deux rayons de courbure que prend une de ces quatre faces après sa déformation.

» J'adopterai les notations de Lamé, en désignant par N_1, N_2, N_3 les composantes normales des pressions qui s'exercent sur des éléments parallèles aux trois plans de coordonnées, et par T_1, T_2, T_3 les composantes tangentielles.

» On devra avoir alors en tous les points de la face $x = a$

$$N_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

et comme cela a lieu quels que soient y et z , on aura aussi

$$\frac{dN_1}{dy} = \frac{dT_2}{dy} = \frac{dT_3}{dy} = 0, \quad \frac{dN_1}{dz} = \frac{dT_2}{dz} = \frac{dT_3}{dz} = 0.$$

» La première des équations d'équilibre

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = 0$$

se réduit alors à

$$\frac{dN_1}{dx} = 0,$$

de sorte que les trois dérivées de N_1 sont nulles.

» De même sur la face $y = b$, on aura

$$\begin{aligned} N_2 = T_1 = T_3 = 0, \\ \frac{dN_2}{dx} = \frac{dN_2}{dy} = \frac{dN_2}{dz} = 0. \end{aligned}$$

» Cela posé, j'appelle ξ , η , ζ les trois composantes du déplacement de la molécule x , y , z ; λ et μ les deux coefficients de Lamé; θ la dilatation cubique

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

On aura

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{d\xi}{dx}, \quad T_1 = \mu \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dz} \right).$$

avec les équations qu'on en peut déduire par symétrie.

» La surface $x = a$ déformée prend une courbure très peu prononcée, et l'indicatrice de cette surface a évidemment pour équation

$$\frac{d^2\xi}{dy^2} y^2 + 2 \frac{d^2\xi}{dy dz} yz + \frac{d^2\xi}{dz^2} z^2 = 1.$$

» Si l'on suppose que l'on soit placé dans le plan $z = 0$ qui est un des plans de symétrie de la surface, si les mêmes forces sont appliquées aux deux bases du prisme, les axes de cette indicatrice sont parallèles aux axes de coordonnées et $\frac{d^2\xi}{dy dz}$ est nul. Le rapport des deux rayons de courbure principaux est alors égal au rapport des deux quantités $\frac{d^2\xi}{dy^2}$ et $\frac{d^2\xi}{dz^2}$.

» Or on a évidemment

$$\frac{d^2\xi}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dT_3}{dy} - \frac{d^2\eta}{dx dy} = - \frac{d^2\eta}{dx dy},$$

puisque $\frac{dT_3}{dy}$ est nul sur la base $x = a$.

» D'autre part,

$$\mu \frac{d^2\eta}{dx dy} = \frac{dN_2}{dx} - \lambda \frac{d\theta}{dx}, \quad \theta = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3\lambda + 2\mu},$$

d'où

$$\mu \frac{d^2 \xi}{dy^2} = - \frac{dN_2}{dx} + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \left(\frac{dN_1}{dx} + \frac{dN_2}{dx} + \frac{dN_3}{dx} \right).$$

» On trouverait de même

$$\mu \frac{d^2 \xi}{dz^2} = - \frac{dN_3}{dx} + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \left(\frac{dN_1}{dx} + \frac{dN_2}{dx} + \frac{dN_3}{dx} \right).$$

» Comme $\frac{dN_1}{dx}$ est nul sur le plan $x = a$, il vient

$$\mu(3\lambda + 2\mu) \frac{d^2 \xi}{dy^2} = - 2(\lambda + \mu) \frac{dN_2}{dx} + \lambda \frac{dN_3}{dx},$$

$$\mu(3\lambda + 2\mu) \frac{d^2 \xi}{dz^2} = \lambda \frac{dN_2}{dx} - 2(\lambda + \mu) \frac{dN_3}{dx}.$$

» On sait que de Saint-Venant a étudié une solution particulière du problème de l'élasticité en supposant

$$N_2 = T_3 = N_1 = 0.$$

» Il en résulte que les termes en $\frac{dN_2}{dx}$ disparaissent et que le rapport des rayons de courbure est constant et égal à

$$\frac{-\lambda}{2\lambda + 2\mu}.$$

» Mais le point sur lequel je désire attirer l'attention, c'est que cette relation est encore vraie, non seulement pour la solution particulière de de Saint-Venant, mais pour la solution la plus générale du problème. Seulement elle ne l'est plus sur toute la face $x = a$, mais seulement sur l'arête $x = a, y = b$; nous avons vu, en effet, qu'en tous les points de la face $y = b$ on a

$$\frac{dN_2}{dx} = 0.$$

Il en résulte que, au point

$$z = 0, \quad x = a, \quad y = b,$$

c'est-à-dire au milieu d'une des arêtes, le rapport des deux courbes prises par l'une des faces est égal à

$$\frac{-\lambda}{2\lambda + 2\mu},$$

quelles que soient d'ailleurs les forces déformantes.

» C'est aux physiciens à voir s'ils peuvent tirer quelque parti de ces remarques. »

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Sur la perturbation magnétique du 13-14 février.*
Note de M. MASCART.

« Les enregistreurs des Observatoires de Nice, Toulouse, Clermont et Besançon ont reproduit également cette perturbation, avec toutes les circonstances constatées par les stations de Perpignan, Lyon, Nantes et Parc Saint-Maur; les détails du phénomène feront l'objet d'une étude ultérieure.

» D'autre part, l'aurore boréale correspondante, signalée d'abord aux États-Unis, a été également observée en Europe.

» Le 14 février, de 1^h à 1^h 10 du matin (t. m. de Paris), M. A. Forel voyait à Morges une très belle aurore boréale; l'employé du télégraphe de la ligne Morges-Rolle fut réveillé vers minuit 25^m par un appel spontané de la sonnerie.

» Le même jour, entre minuit et 1^h du matin, M. P. Lefebvre observait à Troyes

» ... une aurore boréale d'une assez grande intensité, puisque le phénomène était parfaitement visible malgré l'éclat de la pleine lune.

» Une lueur pourpre s'est d'abord montrée dans la direction du nord; à mesure qu'elle s'élevait, le centre s'est déplacé sensiblement de l'est à l'ouest. Au moment du plus grand éclat, des rayons verticaux plus brillants et plus blancs, se sont montrés à plusieurs reprises. Enfin le phénomène a disparu derrière des nuages, après avoir subi un nouveau déplacement en sens inverse du premier.

» M. de Roquigny-Adanson m'informe que l'aurore a été observée à Parc-de-Baleine par un garde-chasse :

» Le 14, à 1^h du matin, toute la région nord du ciel, où l'on distinguait des bandes horizontales de nuages, apparaissait teinte de sang. Par endroits, la teinte était d'un rouge noirâtre, d'un rouge *sang de bœuf*.

» D'après les points de repère indiqués par l'observateur, les lueurs dégradées, affaiblies, de l'aurore s'élevaient à 13° ou 14° au-dessus de l'horizon.

» L'aurore s'étendait à peu près du NW $\frac{1}{4}$ sur N au NE $\frac{1}{4}$ sur N, embrassant ainsi un arc d'environ 70°.

» Son intensité lumineuse, comparable à celle d'un vaste incendie au début de l'observation, diminua bientôt progressivement et les dernières lueurs s'évanouirent à 1^h 30^m du matin.