COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU MARDI 7 JUIN 1892.

PRÉSIDENCE DE M. D'ABBADIE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur l'application de la méthode de M. Lindstedt au problème des trois corps.* Note de M. **H. Poincaré.**

« Dans une Communication que j'ai eu l'honneur de faire à l'Académie, il y a quelques années (*Comptes rendus*, t. CVIII, p. 21), j'ai exposé la méthode de M. Lindstedt sous une forme nouvelle, fondée sur les principes des *Vorlesungen über Dynamik*.

» Le but de la présente Note est de montrer d'abord que cette méthode peut être appliquée à l'étude des variations séculaires des éléments des planètes, mais qu'elle ne peut, sans modification, s'étendre au problème des trois corps, et quelles sont les modifications à faire pour que cela devienne possible.

» Voici les notations que j'adopterai ; je rapporterai la première pla-

nète au Soleil, et la seconde au centre de gravité du système formé par le Soleil et la première planète. Je désigne par μ, β et β' trois coefficients dépendant des masses : le premier très petit, les deux autres finis.

» J'appelle a le demi grand axe de la première planète, $\sin\varphi$ l'excentricité, i l'inclinaison, λ la longitude moyenne, θ la longitude du nœud, ϖ celle du périhélie, et je pose $\Lambda = \beta\sqrt{a}$;

$$\xi = 2\sqrt{\Lambda}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varpi, \qquad \eta = -2\sqrt{\Lambda}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\varpi,$$

$$p = 2\sqrt{\Lambda\cos\varphi}\sin\frac{i}{2}\cos\theta, \qquad q = -2\sqrt{\Lambda\cos\varphi}\sin\frac{i}{2}\sin\theta.$$

» Je désignerai les éléments correspondants de la seconde planète par les mêmes lettres accentuées, de sorte que nos douze variables seront les suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} \Lambda, & \Lambda', & \xi, & \xi', & p, & p', \\ \lambda, & \lambda', & \eta, & \eta', & q, & q'. \end{cases}$$

» J'appelle μF l'énergie totale du système. F sera développable suivant les puissances de μ, de sorte que j'écrirai

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots.$$

F_0 ne dépendra que de Λ et Λ', F_1, F_2, ... seront développables suivant les puissances des variables ξ, η, p et q et suivant les cosinus et sinus des multiples de λ et de λ'. Je désigne par R la valeur moyenne de F_1 considérée comme fonction périodique de λ et λ'.

» Si alors je désigne par x_i une quelconque des variables de la première ligne du tableau (1), et par y_i la variable correspondante de la deuxième ligne, les équations du mouvement pourront s'écrire

$$(2) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

» Les fondateurs de la Mécanique céleste ont été conduits à envisager les équations suivantes

$$(3) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \mu\frac{dR}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\mu\frac{dR}{dx_i}.$$

» Dans ces équations, nous ne désignons par x_i et y_i que les variables des quatre dernières colonnes du tableau (1). R ne dépend ni de λ, ni de λ' et nous regardons momentanément Λ et Λ' comme des constantes.

L'importance des équations (3) provient de ce qu'elles nous font connaître les plus considérables des variations que peuvent subir ξ, η, p, q, ..., de ce qu'elles peuvent, en d'autres termes, nous fournir une première approximation pour le calcul des variations séculaires de ces quantités.

» Pour rendre la méthode de la Communication citée applicable aux équations (3), il faut profiter de la petitesse des quantités ξ, η, ...; soit ε un coefficient très petit et posons

$$\xi = \varepsilon\xi_1, \qquad \eta = \varepsilon\eta_1, \qquad p = \varepsilon p_1, \qquad q = \varepsilon q_1, \qquad \xi' = \varepsilon\xi'_1, \qquad \ldots.$$

R devient développable suivant les puissances croissantes de ε^2 et nous pouvons écrire

$$R = R_0 + \varepsilon^2 R_2 + \varepsilon^4 R_4 + \ldots$$

et poser

$$R' = \frac{\mu}{\varepsilon^2}(R - R_0) = \mu R_2 + \varepsilon^2 \mu R_4 + \ldots.$$

» Prenons ensuite de nouvelles variables ρ_i, ω_i ($i = 1, 2, 3, 4$) définies de la façon suivante : ξ, η, p, q, ... sont des fonctions linéaires convenablement choisies des $\sqrt{\rho_i}\cos\omega_i$ et des $\sqrt{\rho_i}\sin\omega_i$; le choix doit être fait de telle façon que R_2 ne dépende plus que des ρ_i et non des ω_i. Les équations (3) deviennent alors

$$(3\ bis) \qquad \frac{d\rho_i}{dt} = \frac{dR'}{d\omega_i}, \qquad \frac{d\omega_i}{dt} = -\frac{dR'}{d\rho_i},$$

et la méthode de la Communication citée leur est directement applicable, puisque R' est développable suivant les puissances de ε^2 et que R_2 ne dépend pas des ω_i. D'où cette conséquence : les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons calculées par les équations (3) peuvent se mettre sous la forme d'une somme de termes périodiques. Lagrange et Laplace avaient démontré ce résultat en négligeant les cubes des excentricités ; Le Verrier et Cellérier en en négligeant les cinquièmes puissances. On voit qu'il est vrai, quelque loin que l'on pousse l'approximation.

» L'intégration des équations (3) mises sous la forme (3 *bis*) revient à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(4) \qquad R\left(\frac{dT}{d\omega_i}, \omega_i\right) = \text{const.}$$

» Je suppose que R ait été exprimé en fonction de ρ_i et de ω_i et que ρ_i

y ait été ensuite remplacé par la dérivée correspondante $\frac{dT}{d\omega_i}$ de la fonction inconnue T. La méthode de la Communication citée nous fournit une intégrale de l'équation (4) dépendant de quatre constantes arbitraires V_i. Si l'on pose alors

$$(5) \qquad \rho_i = \frac{dT}{d\omega_i}, \qquad v_i = \frac{dT}{dV_i},$$

on peut considérer les équations (5) comme définissant un changement de variables, les variables nouvelles étant les V_i et les v_i et les anciennes les ρ_i et les ω_i. Le théorème de Jacobi nous apprend alors qu'on obtiendra les intégrales des équations (3) en égalant les V_i et les $\frac{dv_i}{dt}$ à des constantes.

» Passons maintenant au problème des trois corps proprement dit, c'est-à-dire aux équations (2). Pour que la méthode de M. Lindstedt telle que je l'ai exposée fût applicable à ces équations, il faudrait que F_0 dépendît à la fois *de tous les* x_i; elle le serait encore sans modification sensible bien que F_0 ne dépende que de Λ et Λ' et non de tous les x_i, si F était périodique par rapport aux y_i et si R ne dépendait pas des y_i.

» Ces conditions ne sont pas remplies d'elles-mêmes, mais on peut arriver à y satisfaire par un changement de variables convenable.

» Reprenons les variables V_i et v_i définies par les équations (5). Soient ensuite λ_2 et λ'_2 deux variables nouvelles telles que

$$\lambda_2 = \lambda + \psi, \qquad \lambda'_2 = \lambda' + \psi',$$

ψ et ψ' étant deux fonctions convenablement choisies de Λ, Λ', V_i, v_i. Prenons alors pour variables nouvelles

$$(6) \qquad \begin{cases} \Lambda, & \Lambda', & V_i, \\ \lambda_2, & \lambda'_2, & v_i. \end{cases}$$

» Les équations conserveront la forme (2), à la condition que x_i désigne une variable quelconque de la première ligne du Tableau (6) et y_i la variable correspondante de la seconde ligne. F_0 ne dépend encore que de Λ et Λ', mais F est périodique par rapport aux y_i et R ne dépend pas des y_i. La méthode est donc applicable.

» Une difficulté subsiste encore cependant. Cette méthode nous permet de développer nos inconnues suivant les puissances de μ; mais les coefficients de ce développement contiennent des termes qui ont au dénomi-

nateur certaines puissances des excentricités; la méthode pourrait donc devenir illusoire si les excentricités étaient très petites, comparables par exemple aux masses ou à leurs racines carrées.

» L'origine de cette difficulté est la suivante. J'ai dit que F est développable suivant les puissances des ξ, η, p, q, ...; de plus F contient des termes du premier degré par rapport à ces variables. Si ces termes du premier degré n'existaient pas, on n'aurait pas à craindre de voir apparaître des puissances négatives des excentricités.

» J'ai donc été conduit à faire dans certains cas un changement de variables préalable. Mes variables nouvelles s'appelleront

$$(7) \qquad \begin{cases} \Lambda_1, & \Lambda'_1, & \xi_1, & \xi'_1, & p, & p', \\ \lambda_1, & \lambda'_1, & \eta_1, & \eta'_1, & q, & q', \end{cases}$$

et je choisirai ces variables de telle sorte :

» 1° Que les équations conservent la forme (2);

» 2° Que pour les solutions périodiques que j'appelle de la première sorte, et que j'ai étudiées dans mon Ouvrage intitulé les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, on ait

$$\xi_1 = \xi'_1 = \eta_1 = \eta'_1 = 0.$$

» Alors l'expression de F avec les variables (7) a la même forme qu'avec les variables (1), mais avec cette différence que F ne contient plus de termes du premier degré par rapport aux ξ_1, η_1, p, q, ... La difficulté a donc disparu.

» Inutile d'ajouter que, comme dans la méthode ordinaire de M. Lindstedt, les séries ne sont pas convergentes, mais seulement semi-convergentes au sens de Stirling, ce qui limite les conditions dans lesquelles on peut s'en servir. Je n'insisterai pas sur certains procédés de détail qui permettent d'éviter quelques-uns de ces changements de variables, ni sur les avantages que présente la méthode exposée dans cette Note sur celle que M. Lindstedt avait proposée, il y a longtemps déjà, pour un problème analogue, dans le tome XCVII des *Comptes rendus*. J'avais déjà, il y a quelques années, développé quelques-unes des considérations qui précèdent dans mon enseignement à la Sorbonne. »