

parts, il place l'entreprise sous le haut patronage de l'Académie des Sciences, et au mois d'avril 1887, cinquante-six astronomes des deux mondes et des deux hémisphères, réunis en Congrès à l'Observatoire de Paris, consacraient l'initiative prise par l'Amiral.

» Son entrain et ses réceptions cordiales eurent l'influence la plus favorable sur la marche des travaux du Congrès et des deux autres qui ont suivi en 1889 et 1891.

» Dans les deux dernières années, il prenait un grand intérêt au développement d'un nouveau service de Spectroscopie qu'il s'était empressé d'établir dès que l'occasion s'en était présentée; il en prépara l'organisation de tout son pouvoir et réussit à obtenir du Ministère un crédit spécial. Les résultats déjà obtenus, d'un haut intérêt, sont ainsi dus à une heureuse inspiration de sa part.

» L'amiral Mouchez est mort à un âge où l'on pouvait encore attendre beaucoup de lui; mais il a eu du moins, avant de disparaître, le bonheur de voir que la Carte du Ciel était en bonne voie d'exécution, et que le succès du grand dessein qu'il avait conçu était désormais assuré. Son nom restera attaché à cette œuvre qui est encore un témoignage de sa vaillance entreprenante. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la série de Laplace.*

Note de M. H. POINCARÉ.

« On sait que Dirichlet a le premier démontré d'une façon rigoureuse le résultat énoncé par Laplace qu'une fonction arbitraire des coordonnées d'un point sur une sphère peut être développée en une série de fonctions sphériques. Il n'a pas défini les conditions auxquelles doit satisfaire cette fonction arbitraire avec autant de précision que dans son Mémoire sur la série de Fourier; aussi ne faudrait-il pas croire que sa démonstration s'applique à des cas aussi étendus et qu'il ne faut pas faire des hypothèses plus restrictives. A un moment de sa démonstration, en effet, il procède à une intégration par parties, ce qui l'oblige à différentier la fonction qu'il appelle  $\theta(\psi)$ .

» Cependant sa démonstration s'applique sans difficulté au cas suivant qui est le plus important : supposons que la surface de la sphère soit partagée en un certain nombre de régions

$$R_1, R_2, \dots, R_r$$

et que chacune de ces régions soit limitée par un polygone curviligne formé d'un nombre fini d'arcs de courbes analytiques; supposons que dans chacune de ces régions la fonction arbitraire  $V$  à développer soit analytique, mais qu'elle éprouve des discontinuités quelconques, quoique en restant finie, quand on passe d'une région à l'autre. Elle peut même être étendue à des cas plus généraux sur lesquels je reviendrai plus loin, mais que je laisse de côté pour le moment.

» Je ferai la même hypothèse; car le but de cette Note n'est pas de généraliser la démonstration de Dirichlet, mais de la présenter sous une forme nouvelle qui me paraît plus simple.

» Soit donc une sphère  $S$  de centre  $O$  et de rayon  $1$ ; passons aux coordonnées polaires en posant

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

» Soit sur cette sphère un élément de surface  $d\omega'$  ayant pour centre de gravité un point  $M'$  dont les coordonnées rectangulaires sont  $x', y', z'$  et les coordonnées polaires  $r', \theta'$  et  $\varphi'$ .

» Soit à l'intérieur de la sphère un point  $M$  dont les coordonnées rectangulaires sont  $x, y, z$  et les coordonnées polaires  $r, \theta$  et  $\varphi$ .

» Soit  $V$  la fonction à développer qui deviendra  $V'$  quand on y changera  $\theta$  et  $\varphi$  en  $\theta'$  et  $\varphi'$ .

» Soit  $\rho$  la distance  $MM'$  et  $\gamma$  l'angle  $MOM'$  de sorte que

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'), \\ \rho^2 &= 1 - 2r \cos \gamma + r^2. \end{aligned}$$

» Introduisons la fonction

$$W = \int \frac{V'(1-r^2) d\omega'}{4\pi \rho^2},$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments  $d\omega'$  de la sphère.

» On sait que cette fonction satisfait à l'équation de Laplace, qu'elle tend vers  $V$  quand  $r$  tend vers  $1$ ; que quand le module de  $r$  est plus petit que  $1$  elle est développable en série convergente sous la forme

$$(1) \quad W = \sum X_n r^n.$$

» Il s'agit de savoir si cette série converge encore pour  $r = 1$  et si elle représente alors  $V$ .

» Je vais regarder  $\theta$  et  $\varphi$  comme des constantes et  $r$  comme une variable

à laquelle je donnerai des valeurs réelles ou imaginaires. Si  $\theta$  et  $\varphi$  sont des constantes, la droite OM est fixe; j'appelle  $\beta$  l'angle du plan MOM' avec un plan fixe passant par OM. Alors V' peut être regardé comme fonction de  $\gamma$  et de  $\beta$ , et l'on a

$$d\omega' = \sin\gamma d\gamma d\beta.$$

» Posons

$$F(\gamma) = \int_0^{2\pi} V' d\beta;$$

d'où

$$4\pi W = \int_0^\pi F(\gamma) (1-r^2) \frac{\sin\gamma}{\rho^3} d\gamma.$$

» On voit d'abord que  $F(\gamma)$  est une fonction continue; il n'y a d'exception que si le contour de l'une des régions R comprend un arc du petit cercle  $\gamma = \gamma_0$ . Dans ce cas  $F(\gamma)$  est discontinue pour  $\gamma = \gamma_0$ . De plus  $F(\gamma)$  a une dérivée finie, sauf pour les valeurs singulières  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ , qui sont telles que le petit cercle  $\gamma = \gamma_i$  est tangent au contour de l'une des régions R. Pour ces valeurs singulières, qui d'après nos hypothèses sont en nombre fini, la dérivée  $F'(\gamma)$  est infinie, généralement d'ordre  $\frac{1}{2}$ , d'ordre  $\frac{p-1}{p}$  si le contact est d'ordre  $p-1$ .

» L'intégration par parties nous donne

$$(2) \quad 4\pi W = -F(\gamma) \frac{1-r^2}{r} \frac{1}{\rho} + \int F'(\gamma) \frac{1-r^2}{r} \frac{d\gamma}{\rho}.$$

» Il s'agit de savoir ce que devient cette expression quand le module de  $r$  tendant vers l'unité,  $r$  tend vers  $e^{i\psi}$ ; on trouve alors

$$\rho = e^{\frac{i\psi}{2}} \sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}.$$

» Le signe du radical est toujours parfaitement défini, puisqu'on sait qu'on doit faire tendre le module de  $r$  vers l'unité par valeurs plus petites que 1.

» On voit alors que  $W$  reste fini quand  $\pm\psi$  n'est pas égal à l'une des valeurs singulières  $\gamma_i$  qui rendent  $F'(\gamma)$  infini. Si  $\psi = \pm\gamma_i$ ,  $W$  devient infini, en général logarithmiquement, d'ordre  $\frac{p-2}{2\rho}$  si le cercle  $\gamma = \gamma_i$  a un contact d'ordre  $p-1$  avec le contour d'une des régions R, d'ordre  $\frac{1}{2}$  si la fonction  $F(\gamma)$  est discontinue.

» Dans tous les cas, et c'est là le point essentiel, l'intégrale

$$\int |W| d\psi$$

reste finie.

» D'autre part, si  $\psi$  est compris entre  $\psi_0$  et  $\psi_1$ , et que dans cet intervalle ne se trouve aucune des valeurs singulières  $\pm \gamma_i$ , si  $r = |r|e^{i\psi}$  et que  $|r|$  tende vers l'unité, la fonction  $W$  tendra *uniformément* vers sa limite, ce qui prouve que l'intégrale

$$(3) \quad \int W r^{\pm n} dr$$

prise le long du cercle de rayon  $r$  est la limite vers laquelle tend cette même intégrale prise le long d'un cercle de rayon  $r < 1$ , lorsque  $r$  tend vers 1, et, par conséquent, en vertu du théorème de Cauchy, que ces deux intégrales sont égales.

» Cela posé, il s'agit de savoir si la fonction  $W$  peut être représentée pour  $\rho = e^{i\psi}$ , c'est-à-dire, sur le cercle de rayon 1, par la série de Fourier. Il est clair qu'il en est ainsi, car l'intégrale de Dirichlet

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{W \sin \frac{2n+1}{2}(\psi-\alpha)}{\sin \frac{\psi-\alpha}{2}} d\psi$$

conserve sa propriété caractéristique, qui est de tendre vers la valeur de  $W$  pour  $\psi = \alpha$  quand  $n$  croît indéfiniment. Ainsi  $W$  est développable par la série de Fourier, et les coefficients sont les mêmes que ceux de la série (1), puisqu'ils sont les uns et les autres exprimés à l'aide de l'intégrale (3).

» On a donc pour  $r = e^{i\psi}$

$$W = \sum X_n e^{ni\psi},$$

et pour  $r = 1$

$$V = \sum X_n.$$

C. Q. F. D.

» Bien que présentée sous une forme notablement plus simple, cette démonstration ne diffère pas essentiellement de celle de Dirichlet; elle s'applique donc, comme celle-ci, à des cas fort étendus.

» Pour qu'elle ne soit pas en défaut, il suffit que l'intégrale

$$\int |W| d\psi$$

reste finie et que les parties réelle et imaginaire de  $W$  soient la différence de deux fonctions n'ayant qu'un nombre fini de maxima et de minima.

» Il suffira pour cela, par exemple, que la fonction  $V$  ait ses dérivées des deux premiers ordres finies dans chacune des régions  $R$ ; il n'est donc pas nécessaire qu'elle reste analytique.

» La démonstration de Bonnet est valable dans les mêmes conditions. »

CHIMIE MINÉRALE. — *Préparation au four électrique d'un carbure de calcium cristallisé; propriétés de ce nouveau corps.* Note de M. HENRI MOISSAN.

« L'étude des carbures métalliques est peu avancée. On sait depuis longtemps que certains métaux en fusion peuvent dissoudre des quantités variables de carbone. Mais la classe des carbures ne renferme guère que des composés formés le plus souvent par dissolution d'un carbure défini dans un grand excès de métal. Si l'on n'arrive pas à préparer dans nos fourneaux de laboratoire des carbures cristallisés, cela tient à ce que la température n'est pas assez élevée. Le four électrique permettant d'atteindre une limite voisine de  $3500^{\circ}$  nous mettait à même d'aborder cette étude dans de meilleures conditions.

» *Carbure de calcium.* — Wœhler <sup>(1)</sup> avait démontré que, par l'action du carbone sur l'alliage de zinc et de calcium, on obtenait un mélange de différents composés fournissant, en présence de l'eau à la température ordinaire, un dégagement de gaz acétylène. Nous rappellerons aussi, dans un autre ordre d'idées, que Winkler <sup>(2)</sup> avait indiqué la réduction des carbonates alcalino-terreux par le magnésium. M. Maquenne <sup>(3)</sup>, reprenant et étudiant plus complètement cette réaction, a préparé un carbure de baryum impur, qui, au contact de l'eau, produisait de l'acétylène ne renfermant que de 3 à 7 pour 100 d'hydrogène.

» *Préparation.* — On fait un mélange intime de  $120^{\text{gr}}$  de chaux de marbre et de  $70^{\text{gr}}$  de charbon de sucre; on place une partie de ce mélange

---

(1) WOELER, *Préparation de l'acétylène par le carbure de calcium* (*Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. CXXV, p. 120).

(2) WINKLER, *Berichte*, t. XXIII, p. 120, et t. XII, p. 62.

(3) MAQUENNE, *Sur une nouvelle préparation de l'acétylène* (*Annales de Chimie et de Physique*, 6<sup>e</sup> série, t. XXVIII, p. 257).