quantité de combustible brûlé par heure, le rendement lumineux augmente, mais le degré d'incandescence diminue légèrement, jusqu'à un rendement maximum qu'on ne doit pas dépasser;

» 2° Que, pour les lampes dans lesquelles la substance réfractaire portée à l'incandescence a une valeur fixe et indépendante de la consommation du combustible, le maximum de rendement correspond à la quantité minima de combustible que l'on doit brûler pour obtenir le degré d'incandescence maximum. »

RAPPORTS.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Rapport sur un Mémoire de M.* Stieltjes, *intitulé « Recherches sur les fractions continues ».*

(Commissaires : MM. Hermite, Jordan, Darboux, Picard, Appell; Poincaré, rapporteur.)

« On sait quels services les fractions continues arithmétiques ont rendus dans les recherches sur les nombres, et depuis longtemps il était permis d'espérer que les propriétés des fractions continues algébriques pourraient utilement s'appliquer dans la théorie de la représentation des fonctions.

» Cependant ce champ de recherches est resté jusqu'ici presque inexploré; sans doute si le sujet tentait les géomètres par son importance, il les rebutait par sa difficulté. Nos regrettés confrères, Laguerre et Halphen, n'ont abordé que des cas particuliers et dans cette étude ils ont rencontré des obstacles dont ils n'ont triomphé qu'en faisant appel à toutes les ressources d'une habileté consommée.

» Le Mémoire de M. Stieltjes nous apporte, dans un cas fort étendu, la solution de toutes les questions relatives à la convergence de ces expressions analytiques.

» Les fractions continues considérées par le savant professeur de Toulouse sont telles que les quotients incomplets sont alternativement de la forme

$$a_{2n+1}z \quad \text{et} \quad a_{2n},$$

les a_i étant réels et positifs.

» Le résultat final, si caché qu'il soit, peut s'énoncer de la manière la plus simple.

» Si la série Σa_n converge, la fraction est oscillante; les réduites de rang pair tendent vers une limite déterminée; il en est de même de celles de rang impair, mais ces deux limites ne sont pas les mêmes.

» Les numérateurs et les dénominateurs des réduites de rang pair ou impair ont respectivement pour limites quatre fonctions parfaitement déterminées, holomorphes dans tout le plan, qui sont de genre zéro et dont tous les zéros sont réels et négatifs.

» La limite des réduites de rang pair (de même que celle des réduites de rang impair) est une fonction méromorphe dans tout le plan, décomposable en une série de fractions simples.

» Si, au contraire, la série Σa_n diverge, la fraction continue est convergente et la limite est une fonction $F(x)$ qui présente comme coupure la partie négative de l'axe des quantités réelles et qui est holomorphe dans tout le reste du plan. Cette coupure est, en général, naturelle, mais elle peut être artificielle.

» Cette fonction $F(x)$ peut être représentée par une intégrale définie qui, dans certains cas, se réduit à une série de fractions simples.

» Les fonctions étudiées par M. Stieltjes sont ainsi susceptibles de divers modes de représentation, tant par des fractions continues de différentes formes que par des séries de puissances croissantes ou décroissantes, par des séries de fractions simples, ou par des intégrales définies.

» L'auteur indique le moyen de passer d'un de ces développements à un autre et d'étudier les conditions de leur convergence.

» Cette intégrale définie peut recevoir une interprétation très simple. La partie réelle et la partie imaginaire de $F(x)$ peuvent être regardées comme les composantes de l'attraction dues à des masses positives distribuées d'une certaine façon le long d'une droite. L'attraction est supposée s'exercer en raison inverse de la distance. En général, ces masses forment une ligne attirante continue, mais elles sont isolées dans les cas particuliers où l'intégrale se réduit à une série de fractions simples.

» Le problème qui consiste à trouver la distribution de ces masses quand on connaît le développement de $F(z)$ suivant les puissances décroissantes de z a été longuement traité par M. Stieltjes qui lui a donné le nom de *problème des moments*.

» Il ne comporte qu'une solution si la fraction continue est convergente (pourvu que l'on suppose toutes les masses positives; il n'en serait plus de même si l'on ne les assujettissait pas à cette condition); il en admet une infinité si cette fraction est oscillante.

» Le développement de $F(z)$, suivant les puissances décroissantes de z, est souvent divergent; il n'a plus alors qu'une valeur formelle et ne peut représenter la fonction qu'asymptotiquement. Le premier exemple de ce fait est la célèbre série de Stirling qui donne une expression approchée du produit des n premiers nombres quand n est très grand; et depuis on s'est retrouvé plusieurs fois en face des mêmes circonstances dans l'étude de la Mécanique céleste, et c'est pour cette raison que les séries qui représentent les coordonnées des astres sont divergentes et peuvent néanmoins être employées par les astronomes.

» Mais les fractions continues correspondantes peuvent être convergentes, et c'est ce que M. Stieltjes montre pour plusieurs exemples, entre autres, pour la série de Stirling et pour une série tout à fait semblable à celles de la Mécanique céleste. C'est là un fait important dont l'Astronomie pourra sans doute profiter.

» Si j'ajoute qu'il y a une remarquable analogie entre ces fonctions et quelques-unes de celles que l'on rencontre en Physique mathématique, on verra que la découverte de M. Stieltjes nous donne l'espoir de conquêtes nouvelles dans le domaine des Mathématiques appliquées.

» L'Analyse pure, en tout cas, en bénéficie largement dès aujourd'hui, non seulement par les conclusions que je viens de résumer, mais par divers théorèmes que l'auteur démontre chemin faisant et qui se rapportent à la théorie générale des fonctions et à celle des ensembles.

» Le travail de M. Stieltjes est donc un des plus remarquables Mémoires d'Analyse qui aient été écrits dans ces dernières années; il s'ajoute à beaucoup d'autres qui ont placé leur auteur à un rang éminent dans la Science de notre époque. La plus grande clarté et l'élégance de la forme analytique qu'on remarque dans le Mémoire dont nous venons de rendre compte se joignent au talent de l'invention dans toutes les recherches qui ont pour objet d'importantes et difficiles questions, comme la variation de la densité à l'intérieur de la Terre, les séries semi-convergentes, la théorie des polynomes de Legendre, de la fonction Γ, etc. La Commission a l'honneur de proposer à l'Académie d'accorder à M. Stieltjes le plus haut témoignage de son approbation en ordonnant l'insertion de son Mémoire « Sur » les fractions continues » dans le *Recueil des Savants étrangers*, et elle émet le vœu qu'un prix puisse lui être accordé sur la fondation Lecomte. »

Les conclusions de ce Rapport sont mises aux voix et adoptées.