Le premier résultat est connu; le second l'est moins.

On obtient aussi, par des calculs assez pénibles, les aires U_2, U_3, ..., V_2, V_3, ...

Il serait intéressant de rechercher si ces aires de podaires successives ne suivent pas une loi et quelle est cette loi.

Les aires U vont en augmentant avec n; les aires V diminuent au contraire. *Peut-on trouver vers quelle limite tend* V_n *pour* $n = \infty$? Cette question a-t-elle été déjà étudiée?

E.-N. Barisien.

127. [M¹5a] L'étude analytique des deux courbes dont les équations en coordonnées normales sont

$$Ax(y^2 - z^2) + By(z^2 - x^2) + Cz(x^2 - y^2) = 0,$$
$$Ax(y^2 + z^2) + By(z^2 + x^2) + Cz(x^2 + y^2) + Dxyz = 0$$

(centre, asymptotes, points d'inflexion, etc.) serait fort utile. N'a-t-elle pas été faite?

Des cas particuliers de ces courbes, qui sont leurs propres transformées par points inverses, se rencontrent constamment dans la Géométrie du triangle.

A. Boutin.

128. [A3d] 1° Soit

$$\rho = \frac{1}{f(x)}$$

l'équation polaire d'une courbe. On sait que si la fonction

$$f(x)[f(x) + f''(x)]$$

est négative pour $x = x_0$, la courbe est convexe vers le pôle au point x_0. Or on voit aisément qu'une courbe continue, qui ne présente ni point de rebroussement ni point anguleux, ne peut être convexe vers le pôle dans un espace angulaire supérieur à π. De là, ce théorème d'Algèbre :

Théorème. — *Si une fonction* $f(x)$ *reste finie et continue entre* $x_0 - \frac{\pi}{2}$ *et* $x_0 + \frac{\pi}{2}$, *si sa dérivée est continue dans le même intervalle, et si le produit*

$$P = f(x)[f(x) + f''(x)]$$

est négatif pour $x = x_0$, *ce produit doit changer de signe* *lorsque x varie entre $x_0 - \frac{\pi}{2}$ et $x_0 + \frac{\pi}{2}$. On pourrait aussi prendre les limites x_0 et $x_0 + \pi$ ou bien x_0 et $x_0 - \pi$.*

On peut énoncer le théorème en disant que l'une au moins des équations

$$f(x) = 0, \qquad f(x) + f''(x) = 0$$

a une racine réelle dans le même intervalle.

2° Dans le théorème précédent, $f(x)$ est une fonction arbitraire, et la variable indépendante x est assujettie seulement à représenter un arc, que nous avons supposé exprimé en parties du rayon. Comme cette signification n'intervient pas explicitement dans l'énoncé, il est clair que le théorème, étant vrai en supposant implicitement que x est un arc, doit l'être aussi lorsque, les valeurs absolues restant les mêmes, x ne représente plus un arc. Alors on est conduit à se poser cette question :

Que signifie le théorème si x représente un nombre, $\frac{\pi}{2}$ étant alors le nombre $\frac{1}{2}(3,1415\ldots)$?

La signification demandée résulterait peut-être d'une démonstration purement algébrique du théorème. H. Dellac.

129. [K1bα] On sait que si dans un triangle ABC la longueur de la bissectrice intérieure de l'angle B comprise entre le sommet B et le côté opposé est égale à la longueur de la bissectrice intérieure de l'angle C comprise entre C et le côté opposé, on sait, dis-je, que le triangle ABC est isoscèle.

Le théorème n'est plus toujours vrai pour les bissectrices extérieures; on demande de démontrer *géométriquement* que a, b, c, R, r_a étant respectivement les trois côtés de ABC, le rayon du cercle circonscrit et le rayon du cercle ex-inscrit tangent au côté BC, si l'on a $4\mathrm{R}r_a = a^2 + bc$, les longueurs des bissectrices extérieures des angles B et C sont égales. *Alauda.*

respectives $1, 2, \ldots, n$. La question posée est résolue par le Tableau suivant :

I. n pair et non divisible par 3. On pourra prendre

$$\left.\begin{aligned} b_i &\equiv \frac{n}{2} + 2(i-1) \\ b_{\frac{n}{2}+i} &\equiv \frac{n}{2} + 1 + 2i \end{aligned}\right\} \pmod{n}. \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

II. n impair, divisible par 3

$$b_1 = 1, \quad \left.\begin{aligned} b_{i+1} - 1 &\equiv \frac{n-1}{2} + 2(i-1) \\ b_{\frac{n+1}{2}+i} - 1 &\equiv \frac{n+1}{2} + 2i \end{aligned}\right\} [\mathrm{mod}(n-1)]. \quad i = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}.$$

III. n impair, non divisible par 3

$$b_i \equiv r + 2i \pmod{n}. \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

r est un entier quelconque.

IV. n divisible par 6

$$\left.\begin{aligned} b_i &= 2i \\ b_{\frac{n}{2}+i} &= 2i - 1 \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}.$$

Dans les congruences qui précèdent, on devra retrancher le module des nombres qui le surpassent; de cette manière b_1, b_2, b_3, ..., b_n feront partie de la suite $1, 2, \ldots n$. On s'assure aisément que $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont tous différents et que les équations $b_i - b_j = \pm(i-j)$ ne sont possibles que lorsque $i = j$. Ces conditions sont évidemment nécessaires et suffisantes pour que les reines (i, b_i) ne soient pas en prise réciproque. Le nombre de ces reines se réduit à $n - 1$ quand n est égal à 2 ou à 3.

J. Franel (Zurich).

128. (Dellac). — *Deuxième réponse.* — Ce théorème rentre comme cas particulier dans celui-ci dont la démonstration peut être présentée sous forme purement algébrique. Soit

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0 \tag{1}$$

une équation différentielle linéaire du second ordre. Les coefficients α, β, γ seront, par exemple, des polynomes entiers en x, mais je suppose que l'équation $\alpha = 0$ n'ait pas de racine réelle, au moins dans l'intervalle que je considère, de telle façon que l'équation (1) n'admette pas de point singulier. Nous aurons par exemple dans l'intervalle considéré $\alpha > 0$.

Soient u et v deux intégrales quelconques de l'équation (1), l'intégrale générale sera

$$y = Au + Bv.$$

J'observe d'abord que le rapport $\frac{u}{v}$ varie toujours dans le même sens (toujours croissant par exemple), et qu'à son passage par l'infini il saute toujours par exemple de $+\infty$ à $-\infty$.

Il en résulte qu'entre deux racines de l'équation

$$Au + Bv = 0,$$

il y a toujours une racine de l'équation

$$A'u + B'v = 0$$

et une seule.

Cela posé, considérons une fonction continue $f(x)$. Soient x_1, x_2, x_3 trois valeurs de x comprises entre deux racines consécutives de l'équation

$$Cu + Dv = 0.$$

Soient u_i et v_i les valeurs de u et de v pour $x = x_i$. Supposons que l'on ait

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x_1) = A u_1 + B v_1, \\ f(x_2) = A u_2 + B v_2, \\ f(x_3) = A u_3 + B v_3. \end{cases}$$

Je dis qu'on pourra trouver deux constantes A' et B', telles que, pour une valeur x_4 de x comprise entre x_1 et x_2, on ait

$$\begin{aligned} f(x_4) &= A' u_4 + B' v_4, \\ f'(x_4) &= A' u'_4 + B' v'_4, \\ f(x_3) &= A' u_3 + B' v_3. \end{aligned}$$

Ce qui revient à dire que $f(z)$ devient trois fois égal à $A'u + B'v$ pour $x = x_3$, pour $x = x_4$ et pour $x = x_4 + \varepsilon$, ε étant infiniment petit.

Si l'on définit en effet A' et B' par les équations

$$\begin{aligned} f(x) &= A' u + B' v, \\ f(x_3) &= A' u_3 + B' v_3, \end{aligned}$$

A′ devient égal à A pour $x = x_1$ et pour $x = x_2$ et, comme il ne peut devenir infini dans cet intervalle, il faut qu'il ait passé entre x_1 et x_2 par un maximum ou un minimum, ce qui démontre la proposition énoncée.

Elle reste vraie, bien entendu, quand on permute x_1 avec x_3.

Ainsi on peut toujours trouver à l'intérieur de l'intervalle $x_1 x_3$, un autre intervalle plus petit où la fonction $f(x)$ devienne, trois fois, égale à une même intégrale de l'équation (1). On en conclut que dans l'intervalle $x_1 x_3$ il y a toujours une valeur de x telle que $f(x)$ et ses deux premières dérivées deviennent respectivement égales à l'une des intégrales de (1) et à ses deux premières dérivées, pour laquelle par conséquent on aura

$$\alpha f'' + \beta f' + \gamma f = 0.$$

C'est là une sorte de généralisation du théorème de Rolle.

Cela posé, supposons que, pour $x = x_0$, on ait

$$f_0 > 0, \qquad \alpha f''_0 + \beta f'_0 + \gamma f_0 < 0.$$

Soit $x_0 + h$ la racine de l'équation

$$u_0 v - v_0 u = 0, \tag{3}$$

qui est immédiatement supérieure à x_0. Alors toute intégrale de (1) doit, comme nous l'avons vu, s'annuler une fois et une seule entre x_0 et $x_0 + h$.

Déterminons les constantes A et B de telle façon que

$$f_0 = A u_0 + B v_0,$$
$$f'_0 = A u'_0 + B v'_0.$$

Alors pour $x = x_0 + \varepsilon$, on aura

$$0 < f < A u + B v.$$

Comme $A u + B v$ s'annule entre x_0 et $x_0 + h$, il faut que dans cet intervalle f s'annule ou devienne égal à $A u + B v$.

Mais, si f devient égal à $A u + B v$, c'est que dans le même intervalle

$$\alpha f'' + \beta f' + \gamma f$$

s'est annulé.

Donc, entre x_0 et $x_0 + h$, l'une des équations

$$f = 0, \qquad \alpha f'' + \beta f' + \gamma f = 0$$

a au moins une racine.

Dans le cas particulier de l'équation $f'' + f = 0$, on a

$$u = \sin x, \qquad v = \cos x\,;$$

l'équation (3) devient

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} x_0\,; \qquad \text{d'où} \qquad h = \pi.$$

L'une des deux équations a donc une racine dans tout intervalle égal à π. J'ai dû, pour rester dans le cadre de ce Recueil, omettre bien des détails auxquels il sera aisé de suppléer.

H. Poincaré.

237. (A.-S. Ramsey). — Soient O le centre du cercle circonscrit, ω le centre du cercle des 9 points, D_1 le milieu de AH. On sait que $D_1H = D_1A$. Si l'on considère le triangle isoscèle ωDD_1, comme $\omega D = \omega D_1 = \frac{R}{2}$, le théorème de Stewart donne

$$\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \overline{\omega H}^2 + HD.HD,$$

mais, ω étant le milieu de OH et $\overline{OH}^2$ étant égal à

$$9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \quad \text{ou} \quad 9R^2 - 2[p^2 - r(4R + r)],$$

on a

$$4\overline{\omega H}^2 = R^2 - 2AH.HD.$$

Cela posé, le triangle OIH donne

$$\overline{OI}^2 + \overline{IH}^2 = 2\overline{\omega I}^2 + 2\overline{\omega H}^2\,;$$

multipliant les deux membres par 2, remarquant que

$$\overline{OI}^2 = R(R - 2r), \qquad \text{que} \qquad \omega I = \tfrac{1}{2}(R - 2r),$$

on a, tous calculs faits,

$$\overline{IH}^2 = 2r^2 - AH.HD. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

Si l'on applique *la transformation continue* en A au théorème de M. Ramsey, on aura, en appelant I_a et r_a le centre et le rayon du cercle ex-inscrit qui touche BC et le prolongement des deux autres côtés,

$$\overline{I_aH}^2 = 2r_a^2 - AH.HD.$$

E. Lemoine.