COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 14 JANVIER 1895,

PRÉSIDENCE DE M. MAREY.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur un procédé de vérification, applicable au calcul des séries de la Mécanique céleste.* Note de M. **Poincaré**.

« Dans mon Ouvrage intitulé « les Méthodes nouvelles de la Mécanique » céleste », j'ai montré comment on pouvait représenter les coordonnées des astres par des séries trigonométriques et je me suis particulièrement étendu sur ce sujet dans les Chapitres XIV et XV.

» Supposons que l'on étudie le mouvement de trois corps, par exemple du Soleil et de deux planètes; nous rapporterons les deux planètes à une origine mobile mais à des axes de direction fixe; la première planète sera rapportée à des axes passant par le Soleil et la seconde à des axes passant par le centre de gravité du Soleil et de la première planète.

» Soient x_1, x_2, x_3 les trois coordonnées de la première planète, x_4, x_5, x_6 celles de la seconde; soient y_1, y_2, y_3 les trois composantes de la quantité de mouvement de la première planète; soient y_4, y_5, y_6 les mêmes composantes pour la seconde planète. Il s'agit, bien entendu, des quantités de mouvement de ces planètes dans le mouvement relatif par rapport aux axes mobiles auxquels elles sont respectivement rapportées et en leur attribuant des masses fictives convenablement choisies qui s'expriment simplement en fonctions des masses réelles.

» Dans l'Ouvrage que je viens de citer, j'ai montré que les x_i et les y_i peuvent s'exprimer de la façon suivante : Soit μ un paramètre très petit de l'ordre des masses; soient ξ_i et ϖ_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ douze constantes d'intégration dont quatre, que j'appelle ξ_3, ξ_4, ξ_5, ξ_6, sont très petites.

» Soient n_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ six quantités s'exprimant à l'aide de ces constantes; les n_i seront développés suivant les puissances de μ et de ξ_3, ξ_4, ξ_5, ξ_6; les coefficients du développement dépendront encore de ξ_1 et de ξ_2; les n_i seront donc ainsi fonctions de μ et des ξ_i, mais indépendants des ϖ_i. Quatre des n_i à savoir n_3, n_4, n_5, n_6 seront très petits. Les deux autres, n_1 et n_2, correspondent aux moyens mouvements; ce sont pour ainsi dire les moyens mouvements moyens.

» Posons enfin

$$\omega_i = n_i t + \varpi_i.$$

» Alors j'ai montré que les x_i et les y_i sont développables suivant les puissances de μ, ξ_3, ξ_4, ξ_5 et ξ_6; chaque terme du développement est une fonction périodique des ω, de période 2π, et dépend en outre de ξ_1 et de ξ_2.

» Les douze constantes ainsi introduites rappellent en quelque sorte les « éléments absolus » de M. Gyldèn; ξ_1 et ξ_2 jouent un rôle analogue à celui des grands axes; ξ_3, ξ_4, ξ_5, ξ_6 sont analogues aux excentricités et aux inclinaisons; ω_1 et ω_2 aux longitudes moyennes; ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 aux longitudes des périhélies et des nœuds.

» Ces séries jouissent de certaines propriétés que la symétrie rend évidentes.

» Ainsi les séries qui représentent x_i et y_i seront respectivement de la forme

$$x_i = \Sigma A \mu^k \xi_3^{k_3} \xi_4^{k_4} \xi_5^{k_5} \xi_6^{k_6} \cos(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \ldots + m_6 \omega_6),$$
$$y_i = \Sigma B \mu^k \xi_3^{k_3} \xi_4^{k_4} \xi_5^{k_5} \xi_6^{k_6} \sin(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \ldots + m_6 \omega_6).$$

» Les A et les B sont des fonctions de ξ_1 et de ξ_2; les m et les k sont des entiers; mais ces entiers ne sont pas quelconques; les k sont des entiers positifs, les m peuvent être positifs, négatifs ou nuls; on aura

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_6 = 0.$$

» Enfin $|m_i|$ (où $i = 3, 4, 5$ ou 6) sera plus petit que k_i et de même parité que k_i.

» La constante des forces vives C sera une fonction des ξ_i, ou bien encore (puisque les n_i sont six fonctions indépendantes des ξ_i) ce sera une fonction des n_i. Je préfère supposer C exprimé en fonction des n_i.

» Il est à peine nécessaire d'ajouter que les séries obtenues ainsi ne sont pas convergentes, mais qu'elles peuvent néanmoins, à la façon de la série de Stirling, rendre des services aux astronomes.

» Elles sont donc importantes et comme les calculs qui y conduisent sont délicats et difficiles, il n'est pas sans intérêt de connaître des procédés de vérification.

» Un premier procédé consiste à substituer ces séries dans le premier membre de l'équation des forces vives, ou des équations des aires. Ces premiers membres doivent se réduire à des fonctions des ξ_i seulement.

» Mais il y a un autre procédé de vérification, qui ne s'aperçoit pas aussi immédiatement, et c'est sur ce point que je désirerais attirer l'attention.

» Les égalités suivantes doivent être identiquement vérifiées

$$\sum_i \left(2x_i \frac{dy_i}{d\xi_k} + y_i \frac{dx_i}{d\xi_k}\right) = \mathrm{H}_i,$$

$$\sum_i \left(2x_i \frac{dy_i}{d\omega_k} + y_i \frac{dx_i}{d\omega_k}\right) = 3\,\frac{d\mathrm{C}}{dn_k}.$$

» Les H_i sont des fonctions des ξ seulement, indépendantes des ω.

» Quant à C, c'est la constante des forces vives supposée exprimée en fonction des n_i.

» On peut ajouter, et c'est d'ailleurs une conséquence des égalités précédentes, que l'expression

$$\sum x_i\, dy_i$$

est une différentielle exacte quand on y regarde les ξ comme des constantes et les ω comme six variables indépendantes. »

ÉCONOMIE RURALE. — *Sur les cultures dérobées d'automne.* Note de M. **P.-P. Dehérain.**

« Bien que j'aie déjà, à diverses reprises, entretenu l'Académie des pertes considérables de nitrates que subissent à l'automne les terres dépouillées