Tome V — Samedi 5 Octobre 1895 — 2e Année. — N° 40

L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE D'ÉLECTRICITÉ

DIRECTEUR SCIENTIFIQUE : J. BLONDIN

SECRÉTAIRE DE LA RÉDACTION : G. PELLISSIER

A PROPOS DE LA THÉORIE DE LARMOR

§ 9. — DISCUSSION DE LA THÉORIE DE HERTZ

Nous avons vu dans un précédent article [1] quelles sont les conditions auxquelles il semble que devrait satisfaire toute théorie électrodynamique des corps en mouvement.

1° Elle devrait rendre compte des expériences de M. Fizeau, c'est-à-dire de l'entraînement *partiel* des ondes lumineuses, ou, ce ce qui revient au même, des ondes électromagnétiques transversales.

2° Elle doit être conforme au principe de la conservation de l'électricité et du magnétisme.

3° Elle devrait être compatible avec le principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

Nous avons vu qu'aucune des théories proposées jusqu'ici ne remplit simultanément ces trois conditions ; la théorie de Hertz satisfait aux deux dernières, mais pas à la première ; celles de Helmholtz ne satisfont pas à la seconde ; celle de Lorentz satisfait bien aux deux premières mais pas à la dernière.

On peut se demander si cela tient à ce que ces théories sont incomplètes ou si ces trois conditions ne sont réellement pas compatibles, ou ne le deviendraient que par une modification profonde des hypothèses admises. Pour bien nous en rendre compte, il convient d'abord d'examiner plus en détail de quelle manière la théorie de Hertz permet de satisfaire aux deux dernières conditions.

[1] Voir *l'Éclairage Électrique*, t. III, p. 5 et 289.

Rappelons les notations de Hertz. Nous désignons par :

L, M, N, les composantes de la force magnétique,

X, Y, Z, celles de la force électrique,

α, β, γ, celles de la vitesse de la matière,

u, v, w, celles du courant de conduction,

μ, le pouvoir inducteur magnétique,

ε, le pouvoir inducteur diélectrique,

A, l'inverse de la vitesse de la lumière.

Pour abréger un peu l'écriture, j'emploierai encore d'autres notations. Je représenterai par ρ et σ la densité de l'électricité vraie et du magnétisme vrai de sorte que :

$$\frac{d\varepsilon X}{dx}+\frac{d\varepsilon Y}{dy}+\frac{d\varepsilon Z}{dz}=4\pi\rho,$$

$$\frac{d\mu L}{dx}+\frac{d\mu M}{dy}+\frac{d\mu N}{dz}=4\pi\sigma.$$

Je poserai en outre :

$$\xi=\mu(\gamma M-\beta N),\ \eta=\mu(\alpha N-\gamma L),\ \zeta=\mu(\beta L-\alpha M),$$

$$l=\varepsilon(\gamma Y-\beta Z),\ m=\varepsilon(\alpha Z-\gamma X),\ n=\varepsilon(\beta X-\alpha Y).$$

Les équations de Hertz s'écrivent alors :

$$(1)\qquad A\left[\frac{d\mu L}{dt}+\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}+4\pi\alpha\sigma\right]=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz},$$

$$(2)\qquad A\left[\frac{d\varepsilon X}{dt}+\frac{dn}{dy}-\frac{dm}{dz}+4\pi\alpha\rho\right]=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}-4\pi A u.$$

A chacune de ces deux équations, il convient de joindre les deux équations qu'on peut en déduire par permutation circulaire ; on aura ainsi deux groupes de trois équations.

Pour voir si la théorie de Hertz conduit au principe de la conservation du magnétisme, prenons les équations du premier groupe, déduites de l'équation (1) ; différentions la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons ; les seconds membres disparaîtront ainsi que les termes dépendant de ξ, η, ζ et il viendra :

$$4\pi A\left[\frac{d\sigma}{dt}+\frac{d\alpha\sigma}{dx}+\frac{d\beta\sigma}{dy}+\frac{d\gamma\sigma}{dz}\right]=0.$$

Cette équation exprime que le magnétisme vrai qui se trouve dans une portion quelconque de matière est entraîné avec cette matière.

On peut opérer de même sur les équations du second groupe ; différentier la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajouter ; il vient alors :

$$4\pi A\left[\frac{d\rho}{dt}+\frac{d\alpha\rho}{dx}+\frac{d\beta\rho}{dy}+\frac{d\gamma\rho}{dz}\right]=4\pi A\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right).$$

Cela signifie que l'électricité vraie est entraînée par la matière qui la porte, sauf celle qui est enlevée par les courants de conduction.

Il faut voir maintenant si la théorie de Hertz est compatible avec le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Pour cela il faut voir qu'elles sont, d'après cette théorie, les forces pondéromotrices mises en jeu dans un champ électromagnétique.

Pour calculer ces forces, il faut appliquer le principe de la conservation de l'énergie.

Quand la matière est en mouvement, elle subit en général des condensations et des dilatations ; sa densité varie et on doit supposer que les pouvoirs inducteurs μ et ε varient en même temps. Soit δ la densité de la matière, et posons :

$$\mu'=\delta\frac{d\mu}{d\delta},\quad \varepsilon'=\delta\frac{d\varepsilon}{d\delta};$$

il viendra alors, en exprimant de deux manières différentes la variation de la valeur de μ relative à une même particule matérielle :

$$(3)\quad \frac{d\mu}{dt}+\alpha\frac{d\mu}{dx}+\beta\frac{d\mu}{dy}+\gamma\frac{d\mu}{dz}=-\mu'\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right);$$

et de même .

$$(4)\qquad \frac{d\varepsilon}{dt}+\sum\alpha\frac{d\varepsilon}{dx}=-\varepsilon'\sum\frac{d\alpha}{dx}$$

Remarquons toutefois que la définition de μ' et de ε' n'est pas ainsi complète ; l'état d'un corps dépend de sa pression et de sa température, souvent d'un plus grand nombre de variables ; il semble donc que μ' et ε' n'auront pas la même valeur selon, par exemple, que le changement de densité sera ou non accompagné d'un changement de température.

Mais un changement d'état quelconque du corps aura pour conséquence une variation de l'énergie interne de ce corps et un dégagement de chaleur. *Si l'on admet* que *ce dégagement de chaleur ne dépende pas de l'intensité du champ électrique, ou du champ magnétique*, nous allons voir que μ' et ε' ont une valeur indépendante des variations de température qui peuvent accompagner les changements de densité.

Et en effet, le calcul nous donnera les valeurs des forces pondéromotrices en fonctions de μ' et ε', sans que nous soyons obligés de faire aucune hypothèse particulière sur la façon dont varie la température avec la densité. Les valeurs de μ' et de ε' ne doivent donc pas dépendre de ces hypothèses particulières.

Appliquons le principe de la conservation de l'énergie ; nous admettrons la même valeur que Hertz pour l'énergie électromagnétique totale J et nous écrirons :

$$J=\int\frac{d\tau}{8\pi}\left[\mu\sum L^2+\varepsilon\sum X^2\right].$$

Voici quelle est la signification de cette équation. Je représente par $d\tau$ un élément quelconque de volume et les intégrations portant sur cette différentielle seront toujours, sauf avis contraire, étendues à tous les éléments de volume $d\tau$ de l'espace tout entier.

Le signe Σ représentera toujours une somme de trois termes ; les deux derniers termes de cette somme se déduiront toujours du premier terme qui figure explicitement sous le signe Σ, en permutant circulairement les composantes des différents vecteurs dont ce terme dépend. Ainsi on posera :

$$\sum L^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

$$\sum \alpha \frac{d\mu}{dx} = \alpha\frac{d\mu}{dx} + \beta\frac{d\mu}{dy} + \gamma\frac{d\mu}{dz},$$

$$\sum \frac{dM}{dx} = \frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dy} + \frac{dL}{dz},$$

$$\sum \frac{d\mu L}{dx} = \frac{d\mu L}{dx} + \frac{d\mu M}{dy} + \frac{d\mu N}{dz}.$$

On aura donc :

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{d\tau}{8\pi}\left(\sum\frac{d\mu L^2}{dt} + \sum\frac{d\varepsilon X^2}{dt}\right).$$

Or nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{2}\frac{d\mu L^2}{dt} = L\frac{d\mu L}{dt} - \frac{1}{2} L^2 \frac{d\mu}{dt},$$

ou en tenant compte de l'équation (3) :

$$L\frac{d\mu L}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mu L^2) - \frac{L^2}{2}\left(\sum\alpha\frac{d\mu}{dx} + \mu'\sum\frac{d\alpha}{dx}\right)$$

et de même :

$$X\frac{d\varepsilon X}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varepsilon X^2) - \frac{X^2}{2}\left(\sum \alpha\frac{d\varepsilon}{dx} + \varepsilon'\sum\frac{d\alpha}{dx}\right).$$

Les équations de Hertz prennent alors une o rme nouvelle et s'écrivent :

(1 *bis*) $$A\left[\frac{1}{2L}\frac{d}{dt}(\mu L^2) - \frac{L}{2}\left(\sum\alpha\frac{d\mu}{dx}+\mu'\sum\frac{d\alpha}{dx}\right) + \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} + 4\pi\alpha\sigma\right] = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz},$$

(2 *bis*) $$A\left[\frac{1}{2X}\frac{d}{dt}(\varepsilon X^2) - \frac{X}{2}\left(\sum\alpha\frac{d\varepsilon}{dx}+\varepsilon'\sum\frac{d\alpha}{dx}\right) + \frac{dn}{dy} - \frac{dm}{dz} + 4\pi\alpha\rho\right] = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u.$$

Pour appliquer le principe de l'énergie, prenons les équations de Hertz, multiplions les trois équations du premier groupe respectivement par :

$$\frac{L\,d\tau}{4\pi A},\quad \frac{M\,d\tau}{4\pi A},\quad \frac{N\,d\tau}{4\pi A},$$

les trois équations du deuxième groupe respectivement par :

$$\frac{X\,d\tau}{4\pi A},\quad \frac{Y\,d\tau}{4\pi A},\quad \frac{Z\,d\tau}{4\pi A},$$

ajoutons, et intégrons par rapport à $d\tau$ en étendant l'intégration à l'espace tout entier; il viendra :

(5) $$\frac{dJ}{dt} + \mathfrak{L} + \mathfrak{M} + \mathfrak{N} + \mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z} = H + K$$

Voici la signification de toutes ces lettres ; on a :

$$\mathfrak{L} = \int\frac{L\,d\tau}{4\pi}\left[-\frac{L}{2}\left(\sum\alpha\frac{d\mu}{dx} + \mu'\sum\frac{d\alpha}{dx}\right) + \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} + 4\pi\alpha\rho\right],$$

$$\mathfrak{X} = \int\frac{X\,d\tau}{4\pi}\left[-\frac{X}{2}\left(\sum\alpha\frac{d\varepsilon}{dx}+\varepsilon'\sum\frac{d\alpha}{dx}\right) + \frac{dn}{dy} - \frac{dm}{dz} + 4\pi\alpha\rho\right],$$

$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, se déduisent de $\mathfrak{L}$; et $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{Z}$ par permutation circulaire. Enfin on a :

$$H = \frac{1}{4\pi A}\int d\tau \sum\left[L\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right) + X\left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}\right)\right]$$

$$K = -\int d\tau\,\left(uX + vY + wZ\right)$$

L'analyse bien connue de Poynting nous apprend que :

$$H = 0$$

D'autre part K représente la chaleur de Joule. L'ensemble des termes

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{M} + \mathfrak{N} + \mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}$$

que j'appelle $\mathfrak{T}$, représentera donc au signe près le travail des forces pondéromotrices.

Etudions donc ces termes et transformons d'abord $\mathfrak{L}$. Tous les termes de la quantité sous le signe $\int$ contiennent en facteur une des composantes de la vitesse, α, β, γ, ou une de leurs dérivées $\frac{d\alpha}{dx}$; les quantités ξ, η, ζ, sont en effet des fonctions linéaires de α, β, γ.

Transformons les termes qui dépendent des dérivées de α, β, γ, par le moyen de l'intégration par parties.

Soient en effet F et F_1, deux fonctions quelconques, de x, y, z ; on aura

$$\int F \frac{dF_1}{dx} d\tau = -\int F_1 \frac{dF}{dx} d\tau$$

si le produit $F F_1$ s'annule à l'infini.

Comme la perturbation électromagnétique doit être nulle à l'infini, nous pouvons appliquer ce procédé de transformation et nous aurons par exemple :

$$\int L^2 \mu' \frac{d\alpha}{dx} d\tau = -\int \alpha \frac{dL^2\mu'}{dx} d\tau,$$

$$\int L \frac{d\zeta}{dy} d\tau = -\int \zeta \frac{dL}{dy} d\tau.$$

L'application de ce procédé nous donne :

$$\mathfrak{L} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\Big[-\frac{L^2}{2}\sum \alpha \frac{d\mu}{dx} + \sum \frac{\alpha}{2}\frac{d\mu' L^2}{dx} - \zeta \frac{dL}{dy} + \eta \frac{dL}{dz} + 4\pi\alpha\sigma L\Big],$$

Nous transformerons de même $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$ et nous trouverons finalement une expression de la forme :

$$\mathfrak{T} = \int d\tau \left(a\alpha + b\beta + c\gamma\right)$$

Il est clair que a, b, c, seront les composantes de la force pondéromotrice rapportée à l'unité de volume.

Pour calculer a, il suffit de faire $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 1$, d'où :

$$\xi = 0, \qquad \eta = \mu N, \qquad \zeta = -\mu M.$$

Il vient alors :

$$\mathfrak{L} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\Big(-\frac{L^2}{2}\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d\mu' L^2}{dx} + \mu M \frac{dL}{dy} + \mu N \frac{dL}{dz} + 4\pi\sigma L\Big),$$

$$\mathfrak{M} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\Big(-\frac{M^2}{2}\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d\mu' M^2}{dy} - \mu M \frac{dM}{dx}\Big),$$

$$\mathfrak{N} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\Big(-\frac{N^2}{2}\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d\mu' N^2}{dy} - \mu N \frac{dN}{dx}\Big);$$

d'où

$$\Sigma\mathfrak{L} = \mathfrak{L} + \mathfrak{M} + \mathfrak{N} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\Big[-\frac{\Sigma L^2}{2}\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Sigma \mu' L^2 + 4\pi\sigma L + \mu M\Big(\frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}\Big) + \mu N\Big(\frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}\Big)\Big],$$

ce qui peut s'écrire, en se rappelant la signification de σ :

$$\Sigma\mathfrak{L} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\Big[-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Sigma\mu L^2 + \frac{d}{dx}\big(\mu L^2\big) + \frac{d}{dy}\big(\mu L M\big) + \frac{d}{dz}\big(\mu L N\big) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Sigma \mu' L^2\Big].$$

On trouverait de même :

$$\Sigma\mathfrak{X} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\Big[-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Sigma\varepsilon X^2 + \frac{d}{dx}\big(\varepsilon X^2\big) + \frac{d}{dy}\big(\varepsilon X Y\big) + \frac{d}{dz}\big(\varepsilon X Z\big) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Sigma \varepsilon' X^2\Big].$$

Il vient donc finalement

$$(5) \quad 4\pi a = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\big(\Sigma\mu L^2 + \Sigma\varepsilon X^2\big) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\big(\Sigma\mu' L^2 + \Sigma\varepsilon' X^2\big) + \frac{d}{dx}\big(\mu L^2 + \varepsilon X^2\big) + \frac{d}{dy}\big(\mu L M + \varepsilon X Y\big) + \frac{d}{dz}\big(\mu L N + \varepsilon X Z\big),$$

On en déduirait par symétrie la valeur de b et de c et on connaîtra ainsi la force pondéromotrice. Il serait intéressant de discuter, par le menu, la signification physique de ces différents termes, nous y reviendrons plus loin, mais cela m'entraînerait trop loin de mon sujet.

Ce que nous avons à vérifier, c'est que le principe de l'égalité de l'action et de la réaction n'est pas violé. Analytiquement, il s'exprime par les six équations des projections des forces et des moments qui s'écrivent

$$\int a\, d\tau = \int b\, d\tau = \int c\, d\tau = 0,$$

$$\int (b z - c y)\, d\tau = \int (c x - a z)\, d\tau = \int (a y - b x)\, d\tau = 0.$$

Pour vérifier la première

$$\int a\, d\tau = 0,$$

il nous suffira de remarquer que a, d'après l'équation (5), est une somme de dérivées partielles. Et en effet une intégrale de la forme

$$\int \frac{d\varphi}{dx} d\tau$$

est évidemment nulle quand l'intégration est étendue à tout l'espace et que φ s'annule à l'infini.

Vérifions de même les équations des moments, par exemple la première

$$(6) \qquad \int (b z - c y)\, d\tau = 0$$

Comme b et c sont, comme a, des sommes de dérivées partielles, le premier membre sera une somme de termes de l'une des quatre formes :

$$\int z \frac{d\varphi}{dx} d\tau, \int z \frac{d\varphi}{dy} d\tau, \int y \frac{d\varphi}{dx} d\tau, \int y \frac{d\varphi}{dz} d\tau,$$

ou de l'une des deux formes

$$\int y \frac{d\varphi}{dy} d\tau, \quad \int z \frac{d\varphi}{dz} d\tau.$$

Les termes des quatre premières formes sont nuls, car on a par exemple :

$$\int z \frac{d\varphi}{dx} d\tau = \int \frac{d(\varphi z)}{dx} d\tau = 0,$$

En ne conservant par conséquent que les termes des deux dernières formes, l'équation (6) s'écrit :

$$\int \frac{d\tau}{4\pi}\left[z \frac{d}{dz}(\mu MN + \varepsilon YZ) - y \frac{d}{dy}(\mu MN + \varepsilon YZ)\right] = 0$$

et elle est évidemment satisfaite, car la quantité sous le signe $\int$ n'est autre chose que le déterminant fonctionnel de yz et

$$\mu MN + \varepsilon YZ$$

par rapport à y et à z.

§ 10. — Discussion des autres théories

Ainsi la théorie de Hertz satisfait aux deux dernières conditions ; il nous reste à voir qu'elle est la seule qui y satisfasse.

Quelles que soient les hypothèses qui nous serviront de point de départ, nous arriverons toujours à deux groupes de trois équations aux dérivées partielles analogues à celles de Hertz et auxquelles devront satisfaire les deux vecteurs L, M, N, et X, Y, Z.

Remarquons que les équations de Hertz satisfont aux trois conditions suivantes :

1° Elles sont linéaires et homogènes par rapport à L, M, N, X, Y, Z et à leurs dérivées.

2° Elles sont linéaires, mais non homogènes par rapport à α, β, γ et à leurs dérivées.

3° Elles ne contiennent que des dérivées du premier ordre tant par rapport à t que par rapport à x, y et z.

Je dis qu'on peut toujours supposer que les équations que l'on doit substituer à celles de Hertz satisfont à ces mêmes conditions.

1° On peut supposer qu'elles sont linéaires par rapport aux composantes de la force électrique et de la force magnétique ; si en effet elles ne l'étaient pas et si les perturbations électromagnétiques étaient très petites, les termes d'ordre supérieur disparaîtraient devant les termes du premier ordre ; si donc ces équations étaient compatibles avec les principes de l'action et de la réaction et de la conservation de l'électricité et du magnétisme, elles ne cesseraient pas de l'être quand on les réduirait à leurs termes du premier ordre par rapport à L, M, N, X, Y, Z.

2° On peut supposer qu'elles sont linéaires par rapport aux composantes de la vitesse α, β, γ ; si en effet on suppose que ces composantes sont très petites, les termes du second degré et de degré supérieur en α, β, γ seront négligeables ; si donc ces équations étaient compatibles avec les principes, elles ne cesseraient pas de l'être quand on les réduirait à leurs termes d'ordre 0 et d'ordre 1 par rapport à α, β, γ.

3° On peut supposer qu'elles ne contiennent que des dérivées du premier ordre ; si en effet on suppose que la perturbation varie très lentement, c'est-à-dire qu'elle est « à très grande longueur d'onde », les dérivées d'ordre supérieur seront négligeables ; si donc les équations étaient compatibles avec les principes, elles ne cesseraient pas de l'être quand on les réduirait à ceux de leurs termes qui dépendent des dérivées du premier ordre.

Supposons donc remplies les trois conditions énoncées plus haut.

Pour former les équations nouvelles, nous reprendrons les équations de Hertz et nous ajouterons respectivement aux premiers membres des trois équations du premier groupe les termes complémentaires :

$$AR_1, \quad AR_2, \quad AR_3.$$

Nous ajouterons de même respectivement aux premiers membres des trois équations du second groupe les termes complémentaires

$$A S_1, \quad A S_2, \quad A S_3.$$

Nous avons obtenu le principe de la conservation du magnétisme en opérant sur les équations du premier groupe ; les différentiant respectivement par rapport à x, y et z et ajoutant. En opérant de cette manière, on retrouvera l'équation de la conservation du magnétisme, mais avec le terme complémentaire :

$$A\left(\frac{dR_1}{dx}+\frac{dR_2}{dy}+\frac{dR_3}{dz}\right).$$

Le principe de la conservation du magnétisme exige donc que

$$\frac{dR_1}{dx}+\frac{dR_2}{dy}+\frac{dR_3}{dz}=0.$$

De même le principe de la conservation de l'électricité exige que

$$\frac{dS_1}{dx}+\frac{dS_2}{dy}+\frac{dS_3}{dz}=0.$$

Ces équations montrent que l'on peut poser :

$$R_1=\frac{d\zeta_1}{dy}-\frac{d\eta_1}{dz}\,;\ R_2=\frac{d\xi_1}{dz}-\frac{d\zeta_1}{dx}\,;\ R_3=\frac{d\eta_1}{dx}-\frac{d\xi_1}{dy};$$
$$S_1=\frac{dn_1}{dy}-\frac{dm_1}{dz}\,;\ S_2=\frac{dl_1}{dz}-\frac{dn_1}{dx}\,;\ S_3=\frac{dm_1}{dx}-\frac{dl_1}{dy}.$$

Si nous voulons, comme nous l'avons supposé plus haut, que les équations ne contiennent que des dérivées du premier ordre, il faut que les nouvelles fonctions auxiliaires ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1, dépendent seulement de L, M, N, X, Y, Z, α, β, γ et non pas de leurs dérivées.

Ces fonctions seront d'ailleurs linéaires et homogènes par rapport à L, M, N, X, Y, Z, puisque les équations doivent être linéaires et homogènes par rapport à ces composantes et à leurs dérivées.

Elles seront d'autre part linéaires et homogènes par rapport à α, β, γ ; en effet les équations ne doivent contenir que des termes d'ordre 0 et d'ordre 1 par rapport à ces composantes et à leurs dérivées ; il est évident d'ailleurs que ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1 qui doivent disparaître dans les équations relatives à l'électrodynamique des corps en repos, ne contiennent pas de termes de degré 0 en α, β, γ.

Il nous reste à voir si ces équations peuvent être compatibles avec le principe de la réaction. Pour cela, opérons sur les équations de Hertz elles-mêmes. Le résultat que nous obtiendrons ainsi sera d'une forme analogue à l'équation (5) et s'écrira :

$$(5\ bis) \qquad \frac{dJ}{dt}+\tau+\tau_1=K.$$

τ est la somme, $\Sigma \mathfrak{L} + \Sigma \mathfrak{X}$ qui figure déjà dans l'équation (5), K est la chaleur de Joule ; l'intégrale H qui figure dans l'équation (5) est nulle ; enfin τ_1 est un terme complémentaire provenant des termes complémentaires R_1, R_2, ..., S_3.

On aura donc :

$$\tau_1=\int\frac{d\tau}{4\pi}\left[\sum \bar{L}\left(\frac{d\zeta_1}{dy}-\frac{d\eta_1}{dz}\right)+\sum X\left(\frac{dn_1}{dy}-\frac{dm_1}{dz}\right)\right].$$

Le signe Σ représente toujours une somme de trois termes et on déduit les deux derniers du premier en permutant circulairement x, y, z ; L, M, N ; X, Y, Z ; ξ_1, η_1, ζ_1 ; l_1, m_1, n_1.

L'intégration par parties nous donne :

$$\tau_1=\int\frac{d\tau}{4\pi}\sum\left(\eta_1\frac{dL}{dz}-\zeta_1\frac{dL}{dy}+m_1\frac{dX}{dz}-n_1\frac{dX}{dy}\right).$$

Soient a, b, c, les composantes de la force pondéromotrice dans la théorie de Hertz ; soient $a+a_1$, $b+b_1$, $c+c_1$ les composantes de cette même force dans la théorie transformée.

Le terme τ_1 représentera alors le travail de la force pondéromotrice complémentaire (a_1, b_1, c_1).

Comme la force de la théorie de Hertz (a, b, c), satisfait au principe de la réaction, il faut que la force complémentaire (a_1, b_1, c_1) y satisfasse également et par conséquent que l'on ait :

$$\int a_1 d\tau = \int b_1 d\tau = \int c_1 d\tau = 0.$$

Ces conditions peuvent encore s'énoncer autrement; *il faut que τ_1 soit nul quand on donne à α, β, γ des valeurs constantes..*

Si donc nous donnons à α, β, γ des valeurs constantes quelconques, et que nous remplacions L, M, N, X, Y, Z par des fonctions *quelconques* de x, y, z s'annulant à l'infini, l'intégrale τ_1 devra s'annuler.

Mais τ_1 peut encore s'écrire sous la forme d'une somme de trois termes en posant :

$$\tau_1 = \mathrm{U} + \mathrm{V} + \mathrm{W}.$$

et

$$\mathrm{U} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left(\zeta_1 \frac{d\mathrm{M}}{dx} - n_1 \frac{d\mathrm{N}}{dx} + n_1 \frac{d\mathrm{Y}}{dx} - m_1 \frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right),$$

$$\mathrm{V} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left(\xi_1 \frac{d\mathrm{N}}{dy} - \zeta_1 \frac{d\mathrm{L}}{dy} + l_1 \frac{d\mathrm{Z}}{dy} - n_1 \frac{d\mathrm{X}}{dy}\right),$$

$$\mathrm{W} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left(n_1 \frac{d\mathrm{L}}{dz} - \xi_1 \frac{d\mathrm{M}}{dz} + m_1 \frac{d\mathrm{X}}{dz} - l_1 \frac{d\mathrm{Y}}{dz}\right).$$

Je dis que les trois termes U, V, W doivent s'annuler tous les trois.

En effet, remplaçons les six composantes L, M, ..., Z par six fonctions quelconques de x, y, z; la somme $\mathrm{U} + \mathrm{V} + \mathrm{W}$ devra s'annuler.

Remplaçons maintenant ces mêmes composantes par les six *mêmes* fonctions de $\lambda_1 x$, $\lambda_2 y$, $\lambda_3 z$; (λ_1, λ_2, λ_3 étant trois coëfficients constants arbitraires) U se changera en $\frac{\mathrm{U}}{\lambda_2\lambda_3}$, V en $\frac{\mathrm{V}}{\lambda_1\lambda_3}$, W en $\frac{\mathrm{W}}{\lambda_1\lambda_2}$. Et comme τ_1 reste toujours nul, on devra avoir :

$$\frac{\mathrm{U}}{\lambda_2\lambda_3} + \frac{\mathrm{V}}{\lambda_1\lambda_3} + \frac{\mathrm{W}}{\lambda_1\lambda_2} = 0,$$

et cela quels que soient les cœfficients λ; on doit donc avoir séparément :

$$\mathrm{U} = \mathrm{V} = \mathrm{W} = 0.$$

Dans U, la fonction sous le signe $\int$ est linéaire, d'une part par rapport à L, M, ..., Z, d'autre part par rapport aux dérivées de ces six composantes prises par rapport à x.

Considérons une intégrale de la forme :

$$\int d\tau \left(\mathrm{A}\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + \mathrm{B}\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} + \mathrm{C}\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx} + \mathrm{D}\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx}\right).$$

Quelle est la condition pour que cette intégrale s'annule, quelles que soient les fonctions φ_1 et φ_2 qui seront seulement assujetties à s'annuler à l'infini ?

Je dis que la condition nécessaire et suffisante, c'est que la quantité sous le signe $\int$ soit une dérivée exacte. En effet, d'après ce que nous avons dit plus haut, la condition est évidemment suffisante et on a en particulier :

$$\int \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} d\tau = \int \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} d\tau = \int \left(\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx} + \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx}\right) d\tau = 0.$$

L'intégrale proposée se réduit donc à :

$$(\mathrm{B} - \mathrm{C}) \int \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} d\tau.$$

Comme φ_2 est une fonction *arbitraire* de x, y, z, le produit $\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx}$ sera aussi une fonction absolument arbitraire de ces variables et l'intégrale ne pourra s'annuler que si

$$\mathrm{B} = \mathrm{C},$$

c'est-à-dire si

$$\mathrm{A}\varphi_1 d\varphi_1 + \mathrm{B}\varphi_2 d\varphi_1 + \mathrm{C}\varphi_1 d\varphi_2 + \mathrm{D}\varphi_2 d\varphi_2$$

est une différentielle exacte.

La condition est donc aussi nécessaire.

Considérons maintenant une intégrale où la fonction sous le signe $\int$ sera linéaire, d'une part par rapport à n fonctions arbitraires :

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n;$$

d'autre part par rapport à leurs dérivées :

$$\frac{d\varphi_1}{dx}, \frac{d\varphi_2}{dx}, \ldots, \frac{d\varphi_n}{dx}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette inégrale s'annule toujours, sera encore que la quantité sous le signe $\int$ soit une dérivée exacte.

La condition est évidemment suffisante. Je dis qu'elle est également nécessaire.

En effet, les fonctions φ étant abitraires, l'intégrale devra être nulle, en particulier, quand toutes ces fonctions seront identiquement nulles, sauf deux ; si donc nous égalons à o toutes les fonctions φ, sauf deux, la quantité sous le signe $\int$ doit être une dérivée exacte ; les termes $\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx}$ et $\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx}$ doivent donc avoir même coefficient ; ce qui veut dire que les conditions d'intégrabilité doivent donc être remplies.

Appliquons cette règle au cas qui nous occupe. Nous verrons que

$$\zeta_1 \, dM - \eta_1 \, dN + n_1 \, dY - m_1 \, dZ,$$

et de même :

$$\xi_1 \, dN - \zeta_1 \, dL + l_1 \, dZ - n_1 \, dX,$$
$$\eta_1 \, dL - \xi_1 \, dM + m_1 \, dX - l_1 \, dY,$$

doivent être des différentielles exactes.

La première de ces expressions, où ne figurent ni dL ni dX doit être la différentielle d'une fonction indépendante de L et de X.

Donc ζ_1, η_1, n_1 et m_1 ne dépendent ni de L ni de X ; et de même ξ_1, ζ_1, l_1, n_1 ne dépendent ni de M, ni de Y ; η_1, ξ_1, m_1 et l_1 ne dépendent ni de N, ni de Z.

Il résulte de là que ξ_1 et l_1 peuvent dépendre seulement de L et de X ; η_1 et m_1 seulement de M et de Y ; et ζ_1, et n_1, seulement de N et de Z.

Les conditions d'intégrabilité nous donnent ensuite :

$$\frac{d\zeta_1}{dN} = -\frac{d\eta_1}{dM}; \quad \frac{d\xi_1}{dL} = -\frac{d\zeta_1}{dN}; \quad \frac{d\eta_1}{dM} = -\frac{d\xi_1}{dL};$$

d'où :

$$\frac{d\xi_1}{dL} = \frac{d\eta_1}{dM} = \frac{d\zeta_1}{dN} = 0.$$

On trouverait de même :

$$\frac{dl_1}{dX} = \frac{dm_1}{dY} = \frac{dn_1}{dZ} = 0.$$

Ainsi $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, l_1, m_1, n_1$ ne pourront dépendre respectivement que de X, Y, Z, L, M, N.

Les conditions d'intégrabilité nous donnent enfin :

$$\frac{d\xi_1}{dX} = \frac{d\eta_1}{dY} = \frac{d\zeta_1}{dZ} = -\frac{dl_1}{dL} = -\frac{dm_1}{dM} = -\frac{dn_1}{dN},$$

c'est-à-dire que ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1 devront se réduire à un *même* facteur constant près à X, Y, Z, — L, — M et — N.

Ce facteur constant devra d'ailleurs être une fonction linéaire et homogène de α, β, γ.

Mais si nous faisons intervenir une condition nouvelle, celle de l'*isotropie*, nous verrons que ce facteur constant doit être nul ; car si ce facteur s'écrivait par exemple :

$$\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \gamma,$$

la direction dont les cosinus directeurs sont proportionnels à λ_1, λ_2, λ_3, jouerait un rôle prépondérant.

Il résulte de là que les termes complémentaires ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1, doivent être nuls.

Ainsi *la théorie de Hertz est la seule qui soit compatible avec le principe de la conservation de l'électricité et du magnétisme et avec celui de l'égalité de l'action et de la réaction.*

§ 11. — Conclusions provisoires

Il résulte de tout ce qui précède qu'aucune théorie ne peut satisfaire à la fois aux trois conditions énoncées au début du § 9 ; car la théorie de Hertz est la seule qui satisfasse aux deux dernières et elle ne satisfait pas à la première.

Nous ne pourrions par conséquent espérer d'échapper à cette difficulté qu'en modifiant profondément les idées généralement admises; on ne voit pas bien d'ailleurs dans quel sens cette modification devrait se faire.

Il faut donc renoncer à développer une théorie parfaitement satisfaisante et s'en tenir provisoirement à la moins défectueuse de toutes qui paraît être celle de Lorentz. Cela me suffira pour mon objet qui est d'approfondir la discussion des idées de Larmor.

Sous quelles formes pourrons-nous mettre cette théorie de Lorentz ?

Ces formes sont diverses et on doit choisir l'une ou l'autre selon le but qu'on se propose.

Dans cette théorie on envisage une multitude de particules chargées mobiles qui circulent à travers un éther immobile en conservant une charge invariable.

L'éther est d'ailleurs parcouru par des perturbations électromagnétiques.

Nous pouvons alors conserver les équations de Hertz, mais en donnant aux quantités qui y entrent des valeurs très différentes, selon que le point x, y, z se trouvera dans une particule chargée, ou dans l'éther.

Dans l'éther on aura :

$$\alpha=\beta=\gamma=0,$$

puisque l'éther n'est pas supposé entraîné par le mouvement de la matière.

On aura d'autre part :

$$\varepsilon=\mu=1, \qquad \rho=\sigma=0, \qquad u=v=w=0,$$

Dans une particule chargée on aura :

$$\rho=\text{const.}, \quad \sigma=0, \quad u=v=w=0, \quad \mu=1,$$

puisque la charge demeure constante et que ces particules ne sont pas le siège de courants de conduction proprement dits.

Dans cette manière de voir il n'y a nulle part de magnétisme proprement dit et le magnétisme apparent est dû seulement aux courants particulaires d'Ampère.

Sous cette forme, les phénomènes électromagnétiques sont vus pour ainsi dire au microscope et les apparences ayant disparu, on ne voit plus que la réalité ou plutôt ce que Lorentz regarde comme tel. On est ainsi en possession d'un instrument qui peut être utile pour la discussion que nous avons en vue.

Mais les équations sous cette forme se prêtent mal aux applications où les apparences, c'est-à-dire en somme les phénomènes moyens, importent seuls.

En se plaçant à ce point de vue, on peut écrire les équations de la façon suivante ; on conservera les équations de Hertz, seulement dans les équations (1) et (2) on affectera les termes :

$$\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}, \quad \frac{dn}{dy}-\frac{dm}{dz},$$

de coefficients constants qui dépendront de la nature du milieu, qui seront égaux à 0 pour l'éther, à 1 pour les conducteurs parfaits et auront des valeurs intermédiaires pour les diélectriques autres que l'éther.

Dans l'expresion de la force pondéromocrice, les termes qui dépendent de ξ, η, ζ, ou bien de l, m, n, devront être affectés du même cœfficient et c'est pour cette raison que le principe de réaction cesse d'être satisfait.

Pour nous en rendre compte, il nous faut rechercher quelle est la signification physique des divers termes de la force pondéromotrice ; je supposerai pour simplifier :

$$\mu'=\varepsilon'=0$$

Nous avons exposé plus haut comment on peut trouver les composantes de la force pondéromotrice. La première composante s'obtient en faisant $\beta=\gamma=0$, $\alpha=1$ dans l'expression

$$\Sigma\,\mathfrak{L}+\Sigma\,\mathfrak{N}$$

Or nous avons vu que Σ L s'écrit alors :

$$\Sigma\,\mathfrak{L}=\int\frac{d\tau}{4\pi}\left(-\frac{\Sigma L^2}{2}\frac{d\mu}{dx}\right)+\int d\tau\,\sigma L+\int\frac{\mu\,d\tau}{4\pi}\left[M\left(\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}\right)+N\left(\frac{dL}{dz}-\frac{dN}{dx}\right)\right],$$

Le second terme représente l'action de la force magnétique sur les aimants permanents ; le premier devrait représenter l'action de la force magnétique sur les corps magnétisés par induction ; l'expression n'est pas tout à fait celle qui est généralement adoptée et cela pourrait donner lieu à une discussion curieuse dans laquelle je n'entrerai pas.

Reste le troisième terme ; les binômes

$$\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}, \quad \frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}, \quad \frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}$$

représentent, à un facteur constant près, les composantes du courant total, courant de conduction plus courant de déplacement.

Le troisième terme représente donc l'action de la force magnétique sur le courant total.

Dans la théorie de Lorentz, et dans les autres théories analogues, ce terme doit être affecté d'un cœfficient plus petit que 1 ; de sorte qu'un champ magnétique exercera sur un diélectrique traversé par un courant de déplacement une action moindre que sur un conducteur traversé par un courant de conduction de même intensité.

Elle serait presque nulle si ce diélectrique est l'air ; et d'autant plus faible que ε serait plus voisin de 1.

On trouverait de même :

$$\Sigma \mathfrak{X} = -\int \frac{d\tau}{4\pi} \Sigma X^2 \frac{d\varepsilon}{dx} + \int d\tau \rho X +$$
$$\int \frac{\varepsilon d\tau}{4\pi} \left[Y \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) + Z \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) \right]$$

Le second terme représente l'action du champ électrique sur les conducteurs chargés ; le premier l'action de ce champ sur les diélectriques.

Quant au troisième, il représente une force que l'expérience n'a pu encore déceler ; et qui consisterait dans une action d'un champ électrique sur un corps qui serait le siège d'un champ magnétique variable. Dans la théorie de Lorentz, ce troisième terme disparaîtrait ou serait affecté d'un cœfficient plus petit que 1.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que cette théorie, si elle peut nous rendre certains services pour notre objet, en fixant un peu nos idées, ne peut nous satisfaire pleinement, ni être regardée comme définitive.

Il me paraît bien difficile d'amettre que le principe de réaction soit violé, même en apparence, et qu'il ne soit plus vrai si l'on envisage seulement les actions subies par la matière pondérable et si on laisse de côté la réaction de cette matière sur l'éther.

Il faudra donc un jour ou l'autre modifier nos idées en quelque point important et briser le cadre où nous cherchons à faire rentrer à la fois les phénomènes optiques et les phénomènes électriques.

Mais même en se bornant aux phénomènes optiques proprement dits, ce qu'on a dit jusqu'ici pour expliquer l'entraînement partiel des ondes n'est pas très satisfaisant.

L'expérience a révélé une foule de faits qui peuvent se résumer dans la formule suivante : il est impossible de rendre manifeste le mouvement absolu de la matière, ou mieux le mouvement relatif de la matière pondérable par rapport à l'éther ; tout ce qu'on peut mettre en évidence, c'est le mouvement de la matière pondérable par rapport à la matière pondérable.

Les théories proposées rendent bien compte de cette loi, mais à une double condition :

1° Il faut négliger la dispersion et divers autres phénomènes secondaires du même genre.

2° Il faut négliger le carré de l'aberration :

Or, cela ne suffit pas ; la loi semble être vraie même sans ces restrictions ainsi que l'a prouvé une récente expérience de M. Michelson.

Il y a donc là aussi une lacune qui n'est peut être pas sans quelque parenté avec celle que le présent article a pour but de signaler.

Et en effet, l'impossibilité de mettre en évidence un mouvement relatif de la matière par rapport à l'éther ; et l'égalité qui a sans doute lieu entre l'action et la réaction sans tenir compte de l'action de la matière sur l'éther, sont deux faits dont la connexité semble évidente.

Peut être les deux lacunes seront-elles comblées en même temps.

(*A suivre*).

H. Poincaré
de l'Institut,
Professeur de Physique mathématique
à la Sorbonne.

LA TÉLÉPHONIE A GRANDE DISTANCE

AU MOYEN DE L'INDUCTION MULTIPLE

Le problème de la téléphonie à grande distance, malgré l'importance exceptionnelle qui s'y attache et les nombreux efforts qui