COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 30 NOVEMBRE 1896,

PRÉSIDENCE DE M. A. CORNU.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts** adresse une ampliation du Décret par lequel le Président de la République approuve l'élection de M. *Michel Lévy* dans la Section de Minéralogie, en remplacement de feu M. *Daubrée*.

Il est donné lecture de ce Décret.

Sur l'invitation de M. le Président, M. **Michel Lévy** prend place parmi ses Confrères.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE. — *Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action*. Note de M. **H. Poincaré**.

« La théorie des solutions périodiques peut, dans certains cas, se rattacher au principe de moindre action.

» Supposons trois corps se mouvant dans un plan et s'attirant en raison inverse du cube des distances ou d'une puissance plus élevée de ces distances : j'appelle a, b, c ces trois corps.

» L'énergie cinétique T est essentiellement positive et il en est de même de la fonction des forces U, qui est égale à une somme de termes de la forme

$$\frac{kmm'}{r^n},$$

où k est une constante positive, m et m' les masses de deux des trois corps, r leur distance et n un exposant au moins égal à 2.

» L'action hamiltonienne

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\,dt$$

sera donc essentiellement positive.

» Considérons une classe de trajectoires de nos trois corps a, b, c : ce seront des trajectoires fictives, c'est-à-dire ne satisfaisant pas aux équations du mouvement; mais elles seront soumises aux conditions suivantes :

» 1° Au temps t_1 les distances des trois corps seront les mêmes qu'au temps t_0; les vitesses seront les mêmes en grandeur et feront les mêmes angles avec les côtés du triangle des trois corps; en d'autres termes, la figure formée par les trois corps et par les droites qui représentent leurs vitesses aura repris à l'époque t_1 la même forme qu'elle avait à l'époque t_0; ou bien encore les distances de ces trois corps seront des fonctions périodiques du temps de période $t_1 - t_0$.

» 2° La droite bc aura, entre les époques t_0 et t_1, tourné d'un angle donné ω_1.

» 3° La droite ac aura, entre ces mêmes époques, tourné d'un angle donné $\omega_1 + 2K_2\pi$, K_2 étant un entier donné.

» 4° La droite ab aura tourné d'un angle $\omega_1 + 2K_3\pi$, K_3 étant un entier donné.

» Une classe de trajectoires fictives se trouve ainsi définie par trois constantes entièrement arbitraires t_0, t_1 et ω_1 et par deux entiers arbitraires K_2 et K_3.

» Mais l'action hamiltonienne, ne pouvant devenir négative, admettra un minimum, et, en vertu du principe de moindre action, la trajectoire qui correspondra à ce minimum devra être une trajectoire effective et satisfaire aux équations du mouvement.

» Cette trajectoire effective, d'après sa définition, correspondra à une solution périodique du problème dont la période sera $t_1 - t_0$.

» Je me propose de démontrer que, dans chaque classe de trajectoires fictives, il y en a une qui correspond à un minimum de l'action hamiltonienne et, par conséquent, à une solution périodique.

» Pour cela, il me suffit de faire voir qu'en faisant varier d'une manière continue notre trajectoire fictive, elle ne pourra passer d'une classe à l'autre sans que l'action hamiltonienne devienne infinie.

» En effet, le passage d'une classe à l'autre s'effectuera lorsque deux des trois corps viendront à se rencontrer. Si, par exemple, a et c se rencontrent, la trajectoire considérée T sera infiniment voisine de deux autres T' et T''; pour T', le corps a passera très près de c, mais à droite; pour T'', il passera très près de c, mais à gauche. Il est clair que les valeurs de l'entier K_2, qui correspondent à T' et à T'', différeront d'une unité.

» Je dis maintenant que, si a et c se rencontrent, l'action est infinie.

» En effet, l'action sera du même ordre de grandeur que

$$\int 2\,U\,dt,$$

ou que

$$\int 2\sqrt{U}\,dr,$$

ou que

$$2kmm'\int \frac{dr}{r^{\frac{n}{2}}},$$

c'est-à-dire infinie si $n \geqq 2$. Or on a $n = 2$ si, comme nous le supposons, l'attraction s'exerce en raison inverse du cube des distances.

» Alors, dans chaque classe, il doit y avoir un minimum de l'action; il doit donc y avoir une trajectoire effective, et cette trajectoire correspond à une solution périodique du problème.

» A chaque système de valeurs des deux constantes arbitraires $t_1 - t_0$ et ω_1 et des deux entiers K_2 et K_3 correspond une solution périodique.

» Notre raisonnement ne s'applique évidemment que si l'attraction pour les très petites distances est du même ordre de grandeur que l'inverse du cube de la distance ou d'ordre plus grand.

» Dans tous ces cas, il y aura une infinité de solutions périodiques.

» Mais, dans le cas de la loi de Newton, l'action ne devient plus infinie quand les deux corps se rencontrent; nous ne pouvons plus affirmer qu'il y a une solution périodique dans chaque classe.

» Tout ce que nous pouvons dire, c'est qu'à chaque valeur de la période $t_1 - t_0$, et à chaque valeur de l'angle ω_1 (en ne considérant pas comme distinctes deux valeurs différant d'un multiple de 2π), correspond une solution périodique.

» On pourrait obtenir certains autres résultats par l'artifice suivant : supposons que la loi d'attraction soit celle de Newton tant que la distance est supérieure à une très petite quantité ε, et celle de l'inverse du cube des distances, quand la distance est plus petite que ε. Alors, les trajectoires seront les mêmes qu'avec la loi de Newton, sauf si deux des corps s'approchent beaucoup l'un de l'autre, auquel cas le mouvement serait troublé pendant un temps très court. Au problème ainsi modifié, les considérations qui précèdent s'appliquent, mais les résultats, applicables au problème ordinaire des trois corps, que l'on peut obtenir ainsi, ne paraissent pas susceptibles d'un énoncé simple. »

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Exploration scientifique en ballon.* Note de M. **Mascart**.

« La Conférence météorologique internationale, réunie à Paris dans le mois de septembre dernier, a constitué plusieurs Commissions spéciales, chargées d'étudier différentes questions relatives à la Physique du globe. L'une d'elles, présidée par M. Hergesell, a reçu la mission de coordonner les expériences scientifiques faites soit ballon monté soit en ballon libre ou ballon-sonde, et d'organiser des expéditions simultanées à certaines époques convenues par une entente commune. On est en droit d'espérer que ce concours général à une même entreprise fournira les plus précieux renseignements sur les variations de température et le régime du vent dans les hautes régions de l'atmosphère.

» Une première expérience a été faite dans la nuit du 13 au 14 novembre. Les stations de Berlin, Munich, Varsovie et Saint-Pétersbourg ont expédié des ballons montés; en même temps, des ballons libres étaient lancés de Paris, Berlin, Strasbourg et Saint-Pétersbourg. Chacune des ascensions doit être l'objet d'une étude particulière, mais il est intéressant d'en indiquer déjà les principaux résultats.

» Pour les ballons montés, celui de Berlin, parvenu à 5650^{m}, a observé une température de $-24^{\circ},4$; celui de Munich s'est élevé vers 3500^{m} et a obtenu $-6^{\circ},5$; celui de Varsovie a observé -20° à 2000^{m}; celui de Saint-Pétersbourg a atteint 5000^{m} et obtenu $-27^{\circ},5$ à 4300^{m}.