COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 14 DÉCEMBRE 1896,

PRÉSIDENCE DE M. A. CORNU.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps.* Note de M. H. POINCARÉ.

« Soient trois corps A, B, C s'attirant d'après la loi de Newton; soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées de A; x_4, x_5, x_6 celles de B; x_7, x_8, x_9 celles de C; soit $m_1 = m_2 = m_3$ la masse de A, $m_4 = m_5 = m_6$ celle de B, $m_7 = m_8 = m_9$ celle de C; soit

$$U = \frac{m_1 m_4}{AB} + \frac{m_1 m_7}{AC} + \frac{m_4 m_7}{BC}, \qquad F = \sum \frac{y_i^2}{2m_i} - U.$$

» On sait que les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i}$$

ou encore sous la forme canonique

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

» On ne restreint pas la généralité en supposant le centre de gravité fixe, et l'on peut profiter de cette circonstance pour abaisser le nombre des degrés de liberté. Cette réduction peut s'opérer de plusieurs manières. Voici les deux manières qui ont été proposées :

» 1° On peut faire le changement de variables que j'appellerai (γ) et qui est le plus usuel. Il consiste à poser

$$\begin{gathered} x'_1 = x_1 - x_7, \qquad x'_2 = x_2 - x_8, \qquad x'_3 = x_3 - x_9, \\ x'_4 = x_4 - x_7, \qquad x'_5 = x_5 - x_8, \qquad x'_6 = x_6 - x_9, \\ y'_i = m_i \frac{dx'_i}{dt}. \end{gathered}$$

» Les équations ne conservent plus alors la forme canonique ; mais elles deviennent

$$\begin{aligned} \frac{dx'_i}{dt} &= \frac{dF_1}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF_1}{dx'_i} \qquad (i=1, 2, 3), \\ \frac{dx'_i}{dt} &= \frac{dF_2}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF_2}{dx'_i} \qquad (i=4, 5, 6), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum \frac{y'^2_i}{2m_i} - \frac{m_1 m_4}{AB} - \frac{m_1(m_1+m_7)}{AC} + \frac{m_1 m_4}{BC^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6), \\ F_2 &= \sum \frac{y'^2_i}{2m_i} - \frac{m_1 m_4}{AB} - \frac{m_4(m_4+m_7)}{BC} + \frac{m_1 m_4}{AC^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6). \end{aligned}$$

» 2° On peut faire le changement de variables que j'appellerai (β), et qui consiste à poser (en appelant ξ_1, ξ_2, ξ_3 les coordonnées du centre de gravité des deux corps A et C),

$$\begin{gathered} x'_1 = x_1 - x_7, \qquad x'_2 = x_2 - x_8, \qquad x'_3 = x_3 - x_9, \\ x'_4 = x_4 - \xi_1, \qquad x'_5 = x_5 - \xi_2, \qquad x'_6 = x_6 - \xi_3, \\ y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt}, \\ m'_1 = m'_2 = m'_3 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \qquad m'_4 = m'_5 = m'_6 = \frac{m_4(m_1+m_7)}{m_1+m_4+m_7}. \end{gathered}$$

» Les équations conservent alors leur forme canonique et s'écrivent

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i},$$

où

$$F = \sum \frac{y_i'^2}{2 m_i'} - U.$$

» La forme des intégrales des aires n'est pas non plus altérée.

» Le changement (β) paraît donc très avantageux, mais cependant il n'a pas été adopté jusqu'ici dans la pratique, sans doute parce que la forme de la fonction perturbatrice y est plus compliquée.

» 3° C'est pourquoi je crois devoir appeler l'attention sur un troisième changement de variables que j'appellerai (α). Posons

$$x_1' = x_1 - x_7, \qquad x_2' = x_2 - x_8, \qquad x_3' = x_3 - x_9,$$
$$x_4' = x_4 - x_7, \qquad x_4' = x_4 - x_8, \qquad x_4' = x_4 - x_9,$$
$$y_i' = m_i \frac{dx_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

» Avec ce changement de variables :

» 1° La forme canonique des équations ne sera pas altérée;

» 2° La forme des intégrales des aires ne sera pas non plus altérée;

» 3° La fonction F deviendra

$$F = \sum \frac{y_i'^2}{2 m_i'} - U + \frac{y_1' y_4' + y_2' y_5' + y_3' y_6'}{m_7},$$

en posant, pour abréger,

$$m_1' = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \qquad m_4' = \frac{m_4 m_7}{m_4 + m_7}.$$

» La forme de la fonction perturbatrice est donc tout aussi simple que dans le cas du changement de variables (γ).

» Pour mieux nous en rendre compte, exprimons tout en fonctions des éléments osculateurs. Soient

$$x_1 = \varphi_1(L, G, \Theta, l, g, \theta),$$
$$x_2 = \varphi_2(L, G, \Theta, l, g, \theta),$$
$$x_3 = \varphi_3(L, G, \Theta, l, g, \theta)$$

les équations du mouvement elliptique, où x_1, x_2, x_3 désignent les coordonnées rectangulaires du point mobile, l l'anomalie moyenne, θ la longitude du nœud, $g + \theta$ celle du périhélie, et où, a, e, i désignant le grand axe, l'excentricité et l'inclinaison, on a

$$L = \sqrt{a}, \qquad G = \sqrt{a(1 - e^2)}, \qquad \Theta = G \cos i.$$

» Posons alors (en appelant β et β' deux coefficients)

$$x'_1 = \varphi_1(L), \qquad x'_2 = \varphi_2(L), \qquad x'_3 = \varphi_3(L),$$
$$y'_1 = \frac{\beta\, d\varphi_1}{L^3\, dl}, \qquad y'_2 = \frac{\beta\, d\varphi_2}{L^3\, dl}, \qquad y'_3 = \frac{\beta\, d\varphi_3}{L^3\, dl},$$
$$x'_4 = \varphi_1(L'), \qquad x'_5 = \varphi_2(L'), \qquad x'_6 = \varphi_3(L'),$$
$$y'_4 = \frac{\beta'\, d\varphi_1}{L'^3\, dl'}, \qquad y'_5 = \frac{\beta'\, d\varphi_2}{L'^3\, dl'}, \qquad y'_6 = \frac{\beta'\, d\varphi_3}{L'^3\, dl'}.$$

» Dans les équations de la première ligne, les fonctions φ dépendent des six variables L, G, Θ, l, g, θ; dans celles de la seconde ligne, elles dépendent de six variables analogues L', G', Θ', l', g', θ'. Ces équations définissent ces douze variables que l'on peut appeler les éléments osculateurs et qui sont très peu différents sans être exactement les mêmes avec les trois changements de variables (α), (β) et (γ).

» La forme canonique des équations n'est pas altérée par ce nouveau changement de variables. On a d'abord

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dF}{\beta\, dL}, \qquad \frac{dL}{dt} = \frac{-dF}{\beta\, dl},$$

ainsi que deux équations analogues que l'on obtient en changeant L et l en G et g, et deux autres qu'on obtient en changeant L et l en Θ et θ.

» Avec le changement de variables (γ), il faut, dans ces six équations, changer F en F_1.

» On a ensuite

$$\frac{dl'}{dt} = \frac{-dF}{\beta'\, dL'}, \qquad \frac{dL'}{dt} = \frac{-dF}{\beta'\, dl'},$$

ainsi que deux équations analogues que l'on obtient en changeant L' et l' en G' et g', et deux autres que l'on obtient en changeant L' et l' en Θ' et θ'.

» Dans le cas où l'on adopte le changement de variables (γ), il faut dans ces six équations remplacer F par F_2.

» Il convient de prendre : avec le changement (α)

$$\beta = \frac{m_1 m_7}{\sqrt{m_4 + m_7}}, \qquad \beta' = \frac{m_1 m_7}{\sqrt{m_4 + m_7}},$$

avec le changement (β)

$$\beta = \frac{m_1 m_7}{\sqrt{m_1 + m_7}}, \qquad \beta' = m_4 \sqrt{\frac{m_7(m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7}},$$

avec le changement (γ)

$$\beta = m_1\sqrt{m_1 + m_7}, \qquad \beta' = m_4\sqrt{m_4 + m_7}.$$

» Il est aisé alors de comparer la forme des différentes fonctions perturbatrices. Pour cela, je poserai, pour abréger,

$$x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6 = \psi,$$

et je supposerai ψ exprimé en fonction des douze éléments osculateurs.

» La fonction perturbatrice se composera alors d'une partie principale $-\frac{m_1 m_4}{\mathrm{AB}}$, qui sera la même avec les deux changements (α) et (γ), et d'un terme complémentaire qui sera

$$\frac{\beta\beta'}{m_7 \mathrm{L}^3 \mathrm{L}'^3} \frac{d^2\psi}{dl\,dl'}$$

avec le changement (α),

$$\frac{m_1 m_4}{\mathrm{L}'^6} \frac{d^2\psi}{dl'^2}$$

pour F_1 avec le changement (γ),

$$\frac{m_1 m_4}{\mathrm{L}^6} \frac{d^2\psi}{dl^2}$$

pour F_2 avec le changement (γ).

» On voit que ces trois termes complémentaires peuvent se déduire facilement de l'un d'entre eux. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe de fonctions transcendantes;* par M. **Émile Picard**.

« Dans un Mémoire sur une classe de transcendantes nouvelles (*Acta mathematica*, 1894), j'ai démontré que, étant donnée une substitution *birationnelle* arbitraire relative à m lettres $u, v, \ldots, w$

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} u' &= \mathrm{R}_1(u, v, \ldots, w), \\ v' &= \mathrm{R}_2(u, v, \ldots, w), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ w' &= \mathrm{R}_m(u, v, \ldots, w), \end{aligned}\right.$$