Sur l'équilibre et les mouvements des mers [DEUXIÈME PARTIE (¹)];

PAR M. H. POINCARÉ.

8. — Mouvement relatif.

J'ai jusqu'ici négligé les effets de la rotation du Globe et de la force centrifuge composée; pour en tenir compte, je rappelle d'abord les principes fondamentaux de la dynamique des systèmes en mouvement relatif et plus généralement des systèmes où interviennent des forces gyrostatiques.

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n; q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{n+k}$ les $n+k$ coordonnées qui définissent la situation du système. En reprenant les notations du n° 5, les équations de Lagrange s'écriront

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_i} - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dU}{dq_i} = Q_i.$$

Parmi les paramètres q, nous distinguerons :

1° $q_1, q_2, \ldots, q_n$, que j'appellerai les q_a ou les paramètres à variation faible.

2° $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{n+k}$, que j'appellerai les q_b ou les paramètres à variation rapide.

Je supposerai que T et U sont indépendants des q_b, T dépendant

(¹) Voir même Volume, Fasc. I, p. 57.

seulement des q'_b; et que $Q_b = 0$. L'équation de Lagrange devient alors

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_b} = 0,$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{dT}{dq'_b} = p_b,$$

p_b étant une constante.

Soit maintenant

$$H = T - U - \sum p_b q'_b.$$

Des équations (2) on peut tirer les q'_b en fonctions des q_a, des q'_a et des constantes p_b; et si l'on substitue dans H les valeurs ainsi trouvées, H n'est plus fonction que des q_a et des q'_a.

Pour éviter toute confusion je désignerai par des d ordinaires les dérivées prises par rapport aux q_a et aux q'_a en regardant les q'_b comme des variables indépendantes et par des ∂ ronds les dérivées prises par rapport aux q_a et aux q'_a en regardant les q'_b comme des fonctions des q_a et des q'_a.

Il vient alors

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} = \frac{dT}{dq_a} - \frac{dU}{dq_a} + \sum \frac{dT}{dq'_b}\frac{\partial q'_b}{\partial q_a} - \sum p_b \frac{\partial q'_b}{\partial q_a},$$

$$\frac{\partial H}{\partial q'_a} = \frac{dT}{dq'_a} \qquad + \sum \frac{dT}{dq'_b}\frac{\partial q'_b}{\partial q'_a} - \sum p_b \frac{\partial q'_b}{\partial q'_a}$$

ou, en vertu des équations (2),

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} = \frac{dT}{dq_a} - \frac{dU}{dq_a},$$

$$\frac{\partial H}{\partial q'_a} = \frac{dT}{dq'_a},$$

de sorte qu'avec les nouvelles variables les équations de Lagrange deviennent

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q'_a} - \frac{dH}{\partial q_a} = Q_a \qquad (a = 1, 2, \ldots, n).$$

Si les forces extérieures sont nulles, ces équations se réduisent à

$$(3\,bis)\qquad \frac{d}{\partial t}\frac{\partial H}{\partial q'_a} - \frac{\partial H}{\partial q_a} = 0,$$

dont la signification est bien connue. Elles veulent dire que l'action hamiltonienne

$$\int_{t_0}^{t_1} H\,dt$$

doit être minimum.

Les équations (3 *bis*) entraînent la suivante qui est l'équation de la conservation de l'énergie

$$-E = H - \sum \frac{\partial H}{\partial q'_a} q'_a = \text{const.}$$

Dans le problème qui nous occupe, nous aurons un seul paramètre à variation rapide q_b : c'est l'angle dont le globe solide terrestre a tourné autour de son axe à partir d'une certaine position prise pour origine; sa dérivée q'_b est sa vitesse angulaire de rotation. Nous aurons une infinité de paramètres à variation faible q_a qui définiront la position relative des particules liquides par rapport au globe solide.

T est un polynome homogène du deuxième degré par rapport aux q'_a et aux q'_b ; U ne dépend pas de ces quantités; les $\frac{\partial T}{\partial q'_i}$ sont des polynomes homogènes du premier degré en q'_a et q'_b.

Les q'_b tirés des équations (2) sont des polynomes du premier degré non homogènes par rapport aux q'_a; H est donc un polynome du deuxième degré non homogène par rapport aux q'_a.

J'observe que H n'est déterminé qu'à une constante près, puisque cette fonction n'intervient que par ses dérivées; je puis donc, sans restreindre la généralité, supposer que H s'annule avec les q_a et les q'_a, de sorte que son développement suivant les puissances de ces quantités ne contiendra pas de termes de degré o.

Je pourrai même, sans changer les équations (3), ajouter à H un terme de la forme Aq'_a, A étant un coefficient arbitraire; cela revient

en effet à ajouter à $\frac{\partial H}{\partial q'_a}$ la constante A; ce qui ne change pas

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q'_a}.$$

Je puis donc encore, sans restreindre la généralité, supposer que, dans le développement de H, les termes du premier degré par rapport aux q' et de degré o par rapport aux q disparaissent.

Enfin je supposerai que les valeurs

$$q_a = 0, \qquad q'_a = 0$$

correspondent à une position d'équilibre stable; les équations (3 *bis*) se réduisent alors à

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} = 0.$$

Ainsi les dérivées premières de H doivent s'annuler pour $q_a = q'_a = 0$; ce qui montre que le développement de H ne contient pas de termes du premier degré et commence par des termes du deuxième degré.

Quant aux termes de degré supérieur au second, nous pouvons les négliger parce que les q_a et les q'_a sont très petits. En définitive nous pouvons regarder H comme un polynome homogène du deuxième degré par rapport aux q_a et aux q'_a et nous écrirons

$$H = H_2 + 2H_1 + H_0.$$

H_2 sera du degré 2 par rapport aux q'_a et de degré o par rapport aux q_a.

H_1 sera du degré 1 par rapport aux q'_a et de degré 1 par rapport aux q_a.

H_0 sera du degré o par rapport aux q'_a et de degré 2 par rapport aux q_a.

L'énergie E sera alors évidemment égale à

$$E = H_2 - H_0.$$

Les équations (3) deviennent alors des équations linéaires à second

membre et à coefficients constants; et les équations (3 *bis*) sont les mêmes équations sans second membre.

Pour intégrer ces équations sans second membre, posons

$$q_a = \alpha_a e^{i\lambda t},$$

nous aurons n équations linéaires et homogènes par rapport aux n quantités $\alpha_a e^{i\lambda t}$; en écrivant que leur déterminant est nul, on obtiendra une équation de degré $2n$ en λ, qu'il s'agit d'étudier.

Cette équation a été étudiée d'une manière approfondie par Tait et Thomson dans leur *Traité de Philosophie naturelle*. De tous les résultats intéressants qu'ils ont obtenus au sujet de la réalité des racines, un seul nous est nécessaire.

Si les formes quadratiques H_2 et $-H_0$ sont définies positives (c'est le cas auquel nous aurons affaire) toutes les racines sont réelles.

9. — Étude des équations sans second membre.

Ces résultats bien connus étant rappelés, cherchons à étendre à ce problème ainsi généralisé les résultats du n° 5.

Le principe de la moindre action de Hamilton nous apprend que l'intégrale

$$J = \int_{t_0}^{t_1} H\,dt$$

doit être minimum; à la condition que les q_a soient assujettis à avoir des valeurs données pour $t = t_0$ et pour $t = t_1$.

Si cette condition n'était pas remplie, nous aurions

$$\delta J = \sum\left(\frac{dH}{dq'_a}\delta q_a\right)_{t=t_1} - \sum\left(\frac{dH}{dq'_a}\delta q_a\right)_{t=t_0}.$$

Si le mouvement est assujetti à être périodique de période $t_1 - t_0$ les expressions

$$q_a, \quad q'_a, \quad \frac{dH}{dq'_a}, \quad \delta q_a$$

reprendront les mêmes valeurs pour $t = t_0$ et pour $t = t_1$, et l'on aura

encore

$$\delta J = 0.$$

Ainsi l'intégrale J est encore minimum si le mouvement est assujetti à être périodique et si l'intégrale est étendue à une période entière.

Cela posé, soit

$$q_a = \alpha_a^{(k)} e^{i\lambda_k t}$$

une solution (imaginaire) des équations (3 *bis*) et

$$q_a = \beta_a^{(k)} e^{-i\lambda_k t}$$

la solution imaginaire conjuguée.

Si nous faisons

$$(4) \qquad q_a = \gamma_a e^{i\lambda_k t} + \delta_a e^{-i\lambda_k t},$$

l'intégrale J prise entre les limites $t = 0$ et $t = \frac{2\pi}{\lambda_k}$ devra être minimum (ou tout au moins sa première variation devra s'annuler) quand on y fera

$$\gamma_a = \alpha_a^{(k)}, \qquad \delta_a = \beta_a^{(k)}.$$

Voyons quelle est la valeur de cette intégrale. L'expression de H, quand on y substitue à la place des q_a leurs valeurs (4), se composera de trois termes : 1° un terme en $e^{2i\lambda_k t}$, qui sera homogène du deuxième degré par rapport aux γ_a; 2° un terme indépendant de t, qui sera homogène du premier degré tant par rapport aux γ_a que par rapport aux δ_a; 3° un terme en $e^{-2i\lambda_k t}$ qui sera homogène du second degré par rapport aux δ_a. Soient H′, H″, H‴ ces trois termes

$$H = H' + H'' + H'''.$$

Les intégrales de H′ et H‴ sont nulles; de sorte que

$$J = \frac{2\pi}{\lambda_k} H''.$$

La variation $\delta H''$ de H'' doit donc être nulle, quand $\gamma_a = \alpha_a^{(k)}$, $\delta_a = \beta_a^{(k)}$.

Mais, à cause de la forme bilinéaire de H'', cela peut encore s'énoncer autrement :

H'' doit être nul quels que soient les γ_a quand on y fait $\delta_a = \beta_a^{(k)}$ et quels que soient les δ_a quand on y fait $\gamma_a = \alpha_a^{(k)}$.

Voyons quelle est la forme de H''.

Nous avons posé

$$H = H_2 + 2H_1 + H_0.$$

Nous devons remplacer les q_a par

$$\gamma_a e^{i\lambda_k t} + \delta_a e^{-i\lambda_k t}$$

et les q'_a par

$$i\lambda_k(\gamma_a e^{i\lambda_k t} - \delta_a e^{-i\lambda_k t}).$$

On voit que H_2 contiendra λ_k^2 en facteur et que H_1 contiendra λ_k. H est donc un polynome du deuxième degré en λ_k.

Nous devons ensuite conserver les termes indépendants de t; nous aurons alors

$$H'' = M_2\lambda_k^2 + 2i\lambda_k M_1 + M_0,$$

M_2, M_1 et M_0 étant des formes bilinéaires en γ_a et δ_a.

H'' ne doit pas changer quand on permute γ_a et δ_a et qu'on change λ_k en $-\lambda_k$.

On a donc

$$M_2(\gamma_a, \delta_a) = M_2(\delta_a, \gamma_a), \qquad M_0(\gamma_a, \delta_a) = M_0(\delta_a, \gamma_a),$$
$$M_1(\gamma_a, \delta_a) = -M_1(\delta_a, \gamma_a).$$

D'après ce que nous venons de voir, on doit avoir, quels que soient les δ_a,

$$\lambda_k^2 M_2(\alpha_a^{(k)}, \delta_a) + 2i\lambda_k M_1(\alpha_a^{(k)}, \delta_a) + M_0(\alpha_a^{(k)}, \delta_a) = 0.$$

On aura donc en particulier

$$(5) \quad \lambda_k^2 M_2(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) + 2i\lambda_k M_1(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) + M_0(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) = 0$$

et de même

$$\lambda_m^2 M_2(\alpha_a^{(m)}, \alpha_a^{(k)}) + 2i\lambda_m M_1(\alpha_a^{(m)}, \alpha_a^{(k)}) + M_0(\alpha_a^{(m)}, \alpha_a^{(k)}) = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6) \quad \lambda_m^2 M_2(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) - 2i\lambda_m M_1(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) + M_0(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) = 0.$$

Les deux relations (5) et (6) montrent que l'équation

$$(7) \qquad \lambda^2 M_2 + 2i\lambda M_1 + M_0 = 0$$

a pour racines

$$\lambda = \lambda_k, \qquad \lambda = -\lambda_m.$$

Reprenons l'équation des forces vives

$$H_2 - H_0 = \text{const.}$$

Cette équation doit être satisfaite en particulier quand on fait

$$q_a = \alpha_a^{(k)} e^{i\lambda_k t} + \alpha_a^{(m)} e^{i\lambda_m t}.$$

Le premier membre de l'équation des forces vives contient alors des termes en $e^{2i\lambda_k t}$, $e^{2i\lambda_m t}$, $e^{it(\lambda_k+\lambda_m)}$. Le coefficient de cette dernière exponentielle doit s'annuler à moins que

$$\lambda_k + \lambda_m = 0.$$

Supposons donc

$$(8) \qquad \lambda_k \gtrless -\lambda_m;$$

le coefficient de cette exponentielle est nul, ce qui entraîne l'égalité

$$(9) \qquad -\lambda\,\lambda_m M_2(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) - M_0(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) = 0.$$

Nous pouvions le prévoir, car le produit $-\lambda_k\lambda_m$ des racines de (7) doit être égal à $\frac{M_0}{M_2}$.

Considérons quelques cas particuliers; si l'on fait $k = m$, l'équation (5), l'équation (6) et l'équation (9) se réduisent à

$$\lambda_k^2 M_2(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(k)}) + M_0(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(k)}) = 0.$$

Soit maintenant

$$\lambda_k = -\lambda_m, \qquad \alpha_a^{(m)} = \beta_a^{(k)};$$

l'équation (9) ne sera plus vraie, mais les équations (5) et (6) subsisteront et s'écriront

$$\lambda_k^2 M_2(\alpha_a^{(k)}, \beta_a^{(k)}) + 2i\lambda_k M_1(\alpha_a^{(k)}, \beta_a^{(k)}) + M_0(\alpha_a^{(k)}, \beta_a^{(k)}) = 0.$$

L'équation (7) a alors une racine égale à λ_k; mais sur l'autre racine nous ne savons rien.

Comme les $\alpha_a^{(k)}$ ne sont déterminés qu'à un facteur constant près, et que les β_a^k sont imaginaires conjuguées des α_a^k, nous pourrons supposer qu'on les a choisis de telle façon que

$$(10) \qquad \lambda_k^2 M_2(\alpha_a^{(k)}, \beta_a^{(k)}) - M_0(\alpha_a^{(k)}, \beta_a^{(k)}) = I_k = \pm 1.$$

Un cas particulier qui a été traité à fond par Lord Kelvin est celui où les coefficients de H_1 sont très grands par rapport à ceux de H_0 et de H_2. Il y a rencontré des résultats analogues à ceux que nous venons de trouver dans le cas général et il serait intéressant de les déduire des résultats généraux.

Si H_1 est très grand, λ ne pourra être que très grand ou très petit. Supposons λ très grand; nous pourrons donc dans nos équations négliger M_0. Les équations (5) et (6) s'écrivent alors

$$\lambda_k M_2 + 2iM_1 = 0, \qquad \lambda_m M_2 - 2iM_1 = 0,$$

et l'on en déduit, si λ_k n'est pas égal à $-\lambda_m$,

$$M_2(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) = 0.$$

C'est l'équation de Lord Kelvin (Cf. Tait et Thomson, *Philosophie naturelle*, 3e édition, n° 345xv). On s'en rendra compte aisément.

Les deux auteurs anglais ont choisi des variables particulières de telle sorte que

$$H_2 = \sum \frac{q_a'^2}{2}.$$

L'équation précédente s'écrit alors

$$\sum \alpha_a^{(1)} \alpha_a^{(m)} = 0.$$

10. — Étude des équations à second membre.

Revenons maintenant aux équations à second membre

$$\frac{d}{dt}\frac{dH}{dq'_a} - \frac{dH}{dq_a} = Q_a.$$

Elles signifient que l'action doit être minimum, c'est-à-dire que

$$(11) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta H + \sum Q_a \delta q_a\right) dt = 0.$$

Soit

$$Q_a = + r_a e^{i\lambda t} + s_a e^{-i\lambda t}.$$

On pourra satisfaire aux équations en posant

$$q_a = \alpha_a e^{i\lambda t} + \beta_a e^{-i\lambda t}$$

et l'équation (11) devra être satisfaite si, donnant aux q_a et aux Q_a ces valeurs, on fait

$$t_0 = 0, \qquad t_1 = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\delta q_a = \gamma_a e^{i\lambda t} + \delta_a e^{-i\lambda t},$$

et cela quels que soient γ_a et δ_a.

Nous ferons en particulier

$$\gamma_a = 0, \qquad \delta_a = \alpha_a^{h}$$

et l'équation (11) deviendra

$$(12)\quad \lambda^2 M_2(\alpha_a, \alpha_a^{(k)}) + 2i\lambda M_1(\alpha_a, \alpha_a^{(k)}) + M_0(\alpha_a, \alpha_a^{(k)}) = -\sum r_a \alpha_a^{(k)}.$$

Des équations (12) on pourra tirer les α_a, et l'on tirerait de même les β_a des équations

$$(12\,bis)\quad \lambda^2 M_2(\beta_a, \beta_a^{(k)}) - 2i\lambda M_1(\beta_a, \beta_a^{(k)}) + M_0(\beta_a, \beta_a^{(k)}) = -\sum s_a \alpha_a^{(k)}.$$

Étudions les équations (12); on voit qu'on peut en tirer les α_a et que ces quantités seront linéaires et homogènes par rapport aux r_a et rationnelles par rapport à λ. Considérons-les comme fonctions de λ.

1° Je vois d'abord que les α_a s'annuleront pour $\lambda = \infty$.

2° Les valeurs de λ pour lesquelles les α_a deviendront infinis seront celles pour lesquelles on pourra satisfaire aux n équations

$$(13)\quad \begin{cases} \lambda^2 M_2(\alpha_a, \alpha_a^{(k)}) + 2i\lambda M_1(\alpha_a, \alpha_a^{(k)}) + M_0(\alpha_a, \alpha_a^{(k)}) = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

sans que les α_a s'annulent.

En annulant le déterminant des équations (13) on arrivera à une équation de degré $2n$ en λ; les valeurs cherchées sont donc au nombre de $2n$.

Or on satisfait à ces équations en faisant

$$\lambda = \lambda_m, \qquad \alpha_a = \alpha_a^m \qquad \text{ou} \qquad \lambda = -\lambda_m, \qquad \alpha_a = \beta_a^m.$$

Les $2n$ infinis des fonctions α_a sont donc

$$\lambda = \pm\lambda_1, \qquad \lambda = \pm\lambda_2, \qquad \ldots, \qquad \lambda = \pm\lambda_n.$$

Il reste à chercher les résidus correspondants.

Posons donc

$$\alpha_a = \frac{\rho\,\alpha_a^m}{\lambda - \lambda_m} + \gamma_a,$$

il s'agit de déterminer ρ et les γ_a.

Nous avons pour cela les équations suivantes

$$\frac{\rho}{\lambda-\lambda_m}\left[\lambda^2 M_2(\alpha_a^m, \alpha_a^k) + 2i\lambda M_1(\alpha_a^m, \alpha_a^k) + M_0(\alpha_a^m, \alpha_a^k)\right]$$
$$+\left[\lambda^2 M_2(\gamma_a, \alpha_a^k) + 2i\lambda M_1(\gamma_a, \alpha_a^k) + M_0(\gamma_a, \alpha_a^k)\right] = -\sum r_a \alpha_a,$$

ou en faisant tendre λ vers λ_m et tenant compte de la relation (6)

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &2\rho\left[\lambda_m M_2(\alpha_a^m, \alpha_a^k) + iM_1(\alpha_a^m, \alpha_a^k)\right] \\ &\quad +\left[\lambda_m^2 M_2(\gamma_a, \alpha_a^k) + 2i\lambda_m M_1(\gamma_a, \alpha_a^k) + M_0(\gamma_a, \alpha_a^k)\right] = -\sum r_a \alpha_a^k. \end{aligned}\right.$$

Mais on a, quels que soient les γ_a,

$$\lambda_m^2 M_2(\gamma_a, \alpha_a^m) - 2i\lambda_m M_1(\gamma_a, \alpha_a^m) + M_0(\gamma_a, \alpha_a^m) = 0,$$

ou bien encore, en changeant λ^m en $-\lambda^m$ et α_a^m en β_a^m,

$$(15)\quad \lambda_m^2 M_2(\gamma_a, \beta_a^m) + 2i\lambda_m M_1(\gamma_a, \beta_a^m) + M_0(\gamma_a, \beta_a^m) = 0.$$

Parmi les équations (14) nous distinguerons celle qui correspond à

$$\lambda_k = -\lambda_m, \qquad \alpha_a^k = -\beta_a^m;$$

elle se réduit à

$$(16)\quad 2\rho\left[\lambda_m M_2(\alpha_a^m, \beta_a^m) + iM_1(\alpha_a^m, \beta_a^m)\right] = -\sum r_a \beta_a^m;$$

c'est de celle-là qu'on déduira ρ.

Mais à cause de (10) cela peut s'écrire

$$\rho = -I_m \lambda_m \sum r_a \beta_a^m.$$

Nous tirons de là

$$(17)\quad \alpha_a = -\sum_{m=1}^{m=n} I_m\left(\frac{\alpha_a^m \lambda_m \Sigma_a r_a \beta_a^m}{\lambda-\lambda_m} - \frac{\beta_a^m \lambda_m \Sigma_a r_a \beta_a^m}{\lambda+\lambda_m}\right),$$

ou en posant

$$\sum r_a \beta_a^m = -B_m, \qquad \sum r_a \alpha_a^m = -A_m.$$

$$\alpha_a = \sum I_m \left(\frac{B_m \alpha_a^m \lambda_m}{\lambda - \lambda_m} - \frac{A_m \beta_a^m \lambda_m}{\lambda + \lambda_m} \right).$$

Développons α_a suivant les puissances croissantes de λ sous la forme

$$\alpha_a = \varepsilon_a^0 + \lambda \varepsilon_a^1 + \lambda^2 \varepsilon_a^2 + \ldots,$$

il viendra

$$(18) \quad \begin{cases} \varepsilon_a^0 = -\sum I_m (B_m \alpha_a^m + A_m \beta_a^m), & \varepsilon_a^1 = \sum I_m \dfrac{A_m \beta_a^m - B_m \alpha_a^m}{\lambda^m}, \\ \varepsilon_a^2 = -\sum I_m \dfrac{B_m \alpha_a^m + A_m \beta_a^m}{\lambda_m^2}, & \varepsilon_a^3 = \sum I_m \dfrac{A_m \beta_a^m - B_m \alpha_a^m}{\lambda_m^3}, \end{cases}$$

Posons maintenant

$$J_{p,q} = M_0(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^q); \qquad J'_{p,q} = M_1(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^q); \qquad J''_{p,q} = M_2(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^q),$$

on trouve immédiatement

$$(A) \quad J_{p,q} = J_{p,q}; \qquad J'_{p,q} = -J'_{p,q}; \qquad J''_{p,q} = J''_{p,q}; \qquad J'_{p,p} = 0.$$

Nous pourrons écrire les formules (18) sous la forme

$$(18\ bis) \qquad \varepsilon_a^p = -\sum{}' I_m \frac{B_m \alpha_a^m}{\lambda_m^p},$$

avec cette convention que le signe $\sum'$ ne porte pas comme $\sum$ sur n termes, mais sur $2n$ termes partagés en deux séries; pour la première série m varie de 1 à n; et l'on passe d'un terme de la première série au terme correspondant de la seconde en changeant λ_m en $-\lambda_m$, α_a^m et A_m en β_a^m et B_m réciproquement.

Il vient alors

$$J''_{p-1,q} = -\sum{}' I_m \frac{B_m}{\lambda_m^{p-1}} M_2(\alpha_a^m, \varepsilon_a^q),$$

$$J'_{p,q} = -\sum{}' I_m \frac{B_m}{\lambda_m^p} M_1(\alpha_a^m, \varepsilon_a^q),$$

$$J_{p+1,q} = -\sum{}' I_m \frac{B_m}{\lambda_m^{p+1}} M_0(\alpha_a^m, \varepsilon_a^q).$$

On a d'autre part

$$\lambda_m^2 M_2(\alpha_a^m, \varepsilon_a^q) + 2i\lambda_m M_1(\alpha_a^m, \varepsilon_a^q) + M_0(\alpha_a^m, \varepsilon_a^q) = 0:$$

d'où

$$(19) \qquad J''_{p-1,q} + 2iJ'_{p,q} + J_{p+1,q} = 0.$$

On trouverait de même

$$(19\,bis) \qquad J''_{p,q-1} - 2iJ'_{p,q} + J_{p,q+1} = 0.$$

On trouvera une autre relation de la façon suivante; il vient

$$J''_{p-1,q-1} = \sum{}'' \frac{B_m B_k}{\lambda_m^{p-1}\lambda_k^{q-1}} M_2(\alpha_a^m, \alpha_a^k) I_m I_k.$$

La somme $\sum''$ contient $4n^2$ termes, chacun des $2n$ termes de ε_a^{p-1} (expressions 18 *bis*) devant être combiné avec chacun des $2n$ termes de ε_a^{q-1}.

De même

$$J_{p,q} = \sum{}'' \frac{B_m B_k}{\lambda_m^p \lambda_k^q} M_0(\alpha_a^m, \alpha_a^k) I_m I_k.$$

Considérons la somme

$$J''_{p-1,q-1} + J_{p,q}.$$

En vertu de l'équation (9) tous les termes de cette somme (qui sont au nombre de $4n^2$) disparaîtront à l'exception de ceux (au nombre de $2n$) qui sont tels que

$$\lambda_k = -\lambda_m, \qquad \alpha_a^k = \beta_a^m, \qquad B_k = A_m.$$

Il vient donc, en tenant compte de (10),

$$\begin{aligned} J''_{p-1,q-1} + J_{p,q} &= \sum{}' \frac{A_m B_m}{\lambda_m^{p+q}} (-1)^q (M_0 - \lambda_m^2 M_2) \\ &= (-1)^{q+1} \sum{}' \frac{A_m B_m I_m}{\lambda_m^{p+q}}, \end{aligned}$$

ou enfin (puisque les termes sont égaux deux à deux au signe près)

$$(20)\qquad \frac{J''_{p-1,q-1}+J_{p,q}}{2}=(-1)^{q+1}\sum\frac{2A_mB_mI_m}{\lambda_m^{p+q}},$$

si $p+q$ est pair et

$$(20\,bis)\qquad J''_{p-1,q-1}+J_{p,q}=0,$$

si $p+q$ est impair.

L'expression $J''_{p-1,q-1}+J_{p,q}$ ne dépend donc que de $p+q$ et de la parité de q; elle change de signe sans changer de valeur absolue, quand q augmente d'une unité et que p diminue d'une unité. On a donc la relation

$$J''_{p-1,q}+J_{p+1,q}+J''_{p,q-1}+J_{p,q+1}=0$$

que l'on pourrait d'ailleurs obtenir en ajoutant (19) et (19 *bis*).

En faisant dans cette relation $q=p$, on trouve

$$2J''_{p,p-1}+2J_{p,p+1}=0,$$

de sorte qu'on retrouve l'équation (20 *bis*).

De (19) et (19 *bis*) on déduit encore

$$J''_{p-1,q}+2iJ'_{p,q}=J''_{p+1,q-2}-2iJ'_{p+1,q-1}.$$

Toutes ces relations montrent que les fonctions $J_{p,q}$ ne sont pas indépendantes les unes des autres; considérons l'ensemble des fonctions J telles que $p+q\leqq 2n$, des fonctions J′ telles que $p+q\leqq 2n-1$ et des fonctions J″ telles que $p+q\leqq 2n-2$; le nombre total de ces fonctions qui sont distinctes en tenant compte des relations (A) est de $2n^2+(n+1)^2$. Le nombre des relations distinctes de la forme (19) est $n(2n-1)$; il reste donc seulement n^2+3n+1 fonctions distinctes.

11. — Cas de l'équilibre stable.

Je vais me restreindre maintenant au cas où H_2 et $-H_0$ sont deux formes quadratiques définies positives, de sorte que l'équilibre reste stable, *même si l'on supprime les forces centrifuges composées.*

C'est évidemment le cas de la nature, dans le problème qui nous occupe.

Alors, d'après ce que nous avons vu plus haut, tous les λ_m sont réels.

Mais ce n'est pas tout; si γ_a et δ_a sont imaginaires conjugués, on a

$$M_2(\gamma_a, \delta_a) > 0, \qquad M_0(\gamma_a, \delta_a) < 0.$$

Il vient donc

$$\lambda_k^2 M_2(\alpha_a^k, \beta_a^k) - M_0(\alpha_a^k, \beta_a^k) > 0,$$

ce qui montre que tous les nombres que nous avons appelés I_k et I_m, et qui dans le cas général peuvent être égaux à $+1$ ou à -1, sont dans le cas qui nous occupe tous égaux à $+1$.

Toutes les formules qui précèdent se trouvent ainsi notablement simplifiées.

Il en résulte une série d'inégalités sur lesquelles il me reste à appeler l'attention.

Supposons en particulier que r_a soit réel; c'est-à-dire que $r_a = s_a$ puisque r_a et s_a sont imaginaires conjugués.

Les quantités α_a^m, β_a^m sont imaginaires conjuguées, de même que r_a, s_a et que A_m, B_m.

Il en résulte que ε_a^p est réel si p est pair et purement imaginaire si p est impair.

On a donc, si p est pair,

$$M_2(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^p) > 0, \qquad M_0(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^p) < 0$$

et au contraire, si p est impair,

$$M_2(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^p) < 0, \qquad M_0(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^p) > 0,$$

c'est-à-dire que

$$(21)\qquad \begin{cases} J''_{p,p} > 0, & J_{p,p} < 0 \quad (\text{pour } p \text{ pair}),\\ J''_{p,p} < 0, & J_{p,p} > 0 \quad (\text{pour } q \text{ impair}). \end{cases}$$

Il est clair d'ailleurs qu'on aura dans tous les cas

$$J'_{p,p} = 0.$$

Cela posé, reprenons l'équation (20) qui s'écrit maintenant (puisque $I_m = 1$)

$$(20)\qquad \frac{J''_{p-1,q-1} + J_{p,q}}{2} = (-1)^{q+1} \sum \frac{2 A_m B_m}{\lambda_m^{p+q}} \qquad (p + q \text{ pair}).$$

Si nous faisons $q = p$, il vient

$$(J''_{p-1,p-1} + J_{p,p})(-1)^{p+1} = 4 \sum \frac{A_m B_m}{\lambda_m^{2p}}.$$

Comme A_m et B_m sont imaginaires conjugués le second membre est positif, d'où l'on tire

$$\begin{aligned} &J''_{p-1,p-1} + J_{p,p} < 0 \qquad (\text{si } p \text{ est pair}),\\ &J''_{p-1,p-1} + J_{p,p} > 0 \qquad (\text{si } p \text{ est impair}). \end{aligned}$$

Ces inégalités sont d'ailleurs des conséquences immédiates des inégalités (21).

Je poserai pour abréger

$$\frac{1}{4}(J''_{(p-1)p-1} + J_{p,p})(-1)^{p+1} = \sum \frac{A_m B_m}{\lambda_m^{2p}} = K_p > 0.$$

Cette valeur de K_p nous montre alors d'autres propriétés du nombre K_p qui font ressortir son analogie avec les intégraies J_{2p} envisagées dans la première Partie.

On trouve en effet

$$\frac{K_{p+1}}{K_p} < \frac{K_{p+2}}{K_{p+1}},$$

de sorte que le rapport $\frac{K_{p+1}}{K_p}$ va constamment en croissant; sa limite pour p infini est en général égale à la plus grande des valeurs de $\frac{1}{\lambda_m^2}$.

Si l'on a donc

$$\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \ldots < \lambda_n^2,$$

la limite de ce rapport sera $\frac{1}{\lambda_1^2}$:

A moins que A_1 (et par conséquent B_1) ne soient nuls, auquel cas cette limite serait égal à $\frac{1}{\lambda_2^2}$;

A moins que non seulement A_1 et B_1, mais encore A_2 et B_2 ne soient nuls, auquel cas la limite serait $\frac{1}{\lambda_3^2}$;

Et ainsi de suite.

Cela posé, reprenons l'équation

$$(12)\quad \lambda^2 M_2(x_a, x_a^k) + 2i\lambda M_1(x_a, x_a^k) + M_0(x_a, x_a^k) = -\sum r_a x_a^k = A_k$$

qui doit être satisfaite par le développement

$$x_a = \varepsilon_a^0 + \lambda\varepsilon_a^1 + \lambda^2\varepsilon_a^2 + \ldots.$$

On en déduira

$$(22)\quad \begin{cases} M_0(\varepsilon_a^0, x_a^k) = -\sum r_a x_a^k, \\ M_0(\varepsilon_a^1, x_a^k) = -2i\, M_1(\varepsilon_a^0, x_a^k), \\ M_0(\varepsilon_a^2, x_a^k) = -2i\, M_1(\varepsilon_a^1, x_a^k) - M_2(\varepsilon_a^0, x_a^k). \end{cases}$$

Les équations (22) nous donneront les $3n$ quantités

$$(23)\qquad \varepsilon_a^0,\quad \varepsilon_a^1,\quad \varepsilon_a^2.$$

On pourra donc former

$$J''_{00},\quad J''_{11},\quad J_{11},\quad J_{22}$$

et par conséquent le rapport

$$-\frac{J''_{11}+J_{22}}{J''_{00}+J_{11}}=\frac{K_2}{K_1}.$$

Les quantités (23) sont des fonctions linéaires des n quantités r_a; K_2 et K_1 sont donc deux formes quadratiques définies positives par rapport aux r_a.

Les A_k sont des fonctions linéaires des r_a, mais à coefficients imaginaires; les B_k sont les formes imaginaires conjuguées des A_k.

Les r_a sont au nombre de n comme les A_k et les B_k; mais nous avons supposé les r_a réels tandis que les A_k et les B_k sont imaginaires.

Si donc nous donnons aux r_a des valeurs réelles quelconques, nous ne pouvons pas choisir ces valeurs de façon à donner aux A_k des valeurs imaginaires arbitraires; il doit donc y avoir n relations linéaires entre les n quantités A_k et les n quantités B_k; ou, si l'on aime mieux, entre les parties réelles et imaginaires des A_k (ces relations expriment d'ailleurs que la somme des résidus des fonctions α_a qui sont n fonctions rationnelles de λ; que cette somme, dis-je, est nulle).

En revanche, les produits $A_k B_k$, qui sont au nombre de n, sont réels et positifs; on peut donc choisir les r_a de façon qu'ils aient des valeurs réelles et positives, *arbitraires* en ce sens qu'elles ne sont assujetties à aucune égalité, mais *devant satisfaire à certaines inégalités.*

Cela ne me suffit pas encore pour mon objet; mais nous pouvons déjà en tirer certaines conséquences.

On a en effet

$$K_2=\sum\frac{A_m B_m}{\lambda_m^4},\qquad K_1=\sum\frac{A_m B_m}{\lambda_m^2},$$

ce qui nous montre que le rapport $\frac{K_2}{K_1}$ est toujours compris entre $\frac{1}{\lambda_1^2}$ et $\frac{1}{\lambda_n^2}$; nous avons donc déjà des inégalités auxquelles doivent satisfaire λ_1 et λ_n. Les mêmes considérations nous donneraient également des inégalités auxquelles devraient satisfaire les autres λ_m.

Au n° 5 nous avons montré que, pour le mouvement absolu, la détermination des λ_m se ramène à l'étude des variations du rapport de

deux formes quadratiques; ici l'étude d'un rapport analogue ne nous donne plus les λ_m, mais des limites supérieures ou inférieures de ces quantités.

Mais on peut aller plus loin; n'assujettissons plus les r_a à être réels, mais posons

$$r_a = \rho_a + i\lambda\sigma_a,$$

les ρ_a et les σ_a étant réels. Soient alors $\varepsilon_a'^k$ et $\varepsilon_a''^k$ ce que devient ε_a^k quand on y remplace r_a par ρ_a et par σ_a; il viendra évidemment

$$\alpha_a = (\varepsilon_a'^0 + \lambda\varepsilon_a'^1 + \ldots) + i\lambda(\varepsilon_a''^0 + \lambda\varepsilon_a''^1 + \ldots)$$

et par conséquent

$$\varepsilon_a^0 = \varepsilon_a'^0, \qquad \varepsilon_a^1 = \varepsilon_a'^1 + i\varepsilon_a''^0, \qquad \varepsilon_a^2 = \varepsilon_a'^2 + i\varepsilon_a''^1 + \ldots,$$

ce qui montre que ε_a^k est encore réel si k est pair et purement imaginaire si k est impair.

Je remarque que α_a est encore une fonction rationnelle de λ et que cette fonction conserve sa propriété essentielle, à savoir qu'elle ne change pas quand on change à la fois i en $-i$ et λ en $-\lambda$.

Ses infinis sont toujours $\pm\lambda_m$; si alors j'appelle $\lambda_m B_m \alpha_a^m$ le résidu relatif à λ_m, et $-\lambda_m A_m B_a^m$ le résidu relatif à $-\lambda_m$, il sera facile de voir :

1° Que A_m et B_m sont les mêmes pour tous les α_a et ne dépendent pas de l'indice a;

2° Que A_m et B_m sont imaginaires conjugués.

On n'a plus :

$$\sum r_a \beta_a^m = -B_m, \qquad \sum r_a \alpha_a^m = -A_m,$$

mais on a

$$-B_m = \sum \beta_a^m(\rho_a + i\lambda_m\sigma_a), \qquad -A_m = \sum \alpha_a^m(\rho_a - i\lambda_m\sigma_a).$$

En revanche, les formules (18) et toutes celles qui s'en déduisent

restent vraies de sorte que l'on a encore

$$\frac{1}{4}(J''_{p-1,p-1}+J_{p,p})(-1)^{p+1}=\sum\frac{A_m B_m}{\lambda_m^{2p}}=K_p>0.$$

Les équations (22) doivent être remplacées par les suivantes :

$$(22\,bis)\quad\left\{\begin{aligned}&M_0(\varepsilon_a^0,\alpha_a^k)=-\sum\rho_a\alpha_a^k,\\&M_0(\varepsilon_a^1,\alpha_a^k)=-2iM_1(\varepsilon_a^0,\alpha_a^k)-i\sum\sigma_a\alpha_a^k,\\&M_0(\varepsilon_a^2,\alpha_a^k)=-2iM_1(\varepsilon_a^1,\alpha_a^k)-M_2(\varepsilon_a^0,\alpha_a^k).\end{aligned}\right.$$

On tirera de là les $3n$ quantités (23) sous la forme de fonctions linéaires des ρ_a et des σ_a. Donc K_2 et K_1 seront des formes quadratiques définies positives des ρ_a et des σ_a.

Mais les ρ_a et les σ_a sont au nombre de $2n$; on pourra donc les choisir de telle façon que les A_m puissent prendre des valeurs imaginaires arbitraires et que les $A_m B_m=|A_m^2|$ prennent des valeurs réelles et positives *complètement arbitraires*.

Alors $\frac{1}{\lambda_n^2}$ sera le minimum du rapport $\frac{K_2}{K_1}$, et $\frac{1}{\lambda_1^2}$ en sera le maximum. Posons

$$\rho_a=\theta_1\rho_a^1+\theta_2\rho_a^2+\ldots+\theta_q\rho_a^q,$$
$$\sigma_a=\theta_1\sigma_a^1+\theta_2\sigma_a^2+\ldots+\theta_q\sigma_a^q.$$

Choisissons ensuite les θ pour que le rapport soit aussi petit que possible, en supposant les ρ_a^k et les σ_a^k donnés. Le rapport dépend encore des ρ_a^k et des σ_a^k et son maximum nouveau sera $\frac{1}{\lambda_q^2}$. En somme nous retrouvons tous les résultats du n° 5.

Avant d'aller plus loin, observons que les deux formes H_2 et H_0 jouent un rôle analogue; toute notre analyse subsisterait si nous changions H_2 en $-H_0$, M_2 en $-M_0$ et λ en $\frac{1}{\lambda}$.

12. — Problème du vase tournant.

Considérons un vase qui contient un liquide pesant, mais qui est assez petit pour que la pesanteur puisse être regardée comme constante en grandeur et en direction.

Ce vase est animé d'une vitesse de rotation uniforme Ω autour d'un axe parallèle à l'axe des z. La surface libre du liquide en équilibre n'est plus alors un plan horizontal, mais un paraboloïde de révolution.

Toutefois nous supposerons que Ω est assez petit pour que l'on puisse négliger Ω^2 qui entre en facteur dans la force centrifuge ordinaire, sans pouvoir négliger Ω qui entre en facteur dans la force centrifuge composée. A cette condition, nous pourrons regarder la surface libre comme un plan horizontal.

Du reste si l'on avait à tenir compte de Ω^2, il n'y aurait à faire subir aux résultats que quelques modifications très simples.

Il s'agit d'étudier les petites oscillations du liquide dans ce vase.

Pour cela nous allons voir comment les principes du n° **8** peuvent s'appliquer au mouvement relatif d'un système par rapport à des axes mobiles.

Soit un système formé de n points matériels

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_n.$$

La masse du point m_i sera m_i; ses coordonnées par rapport aux axes mobiles seront

$$x_i, \quad y_i, \quad z_i$$

dans l'état d'équilibre, et

$$x_i + \xi_i, \quad y_i + \eta_i, \quad z_i + \zeta_i$$

dans l'état de mouvement.

Si les axes mobiles sont animés d'une vitesse de rotation Ω autour de l'axe des z, les projections de la vitesse *absolue* du point m_i sur les

trois axes mobiles seront

$$\frac{d\xi_i}{dt} - \Omega(y_i + \eta_i), \qquad \frac{d\eta_i}{dt} + \Omega(x_i + \xi_i), \qquad \frac{d\zeta_i}{dt}$$

et la force vive absolue du système sera

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} T = &+ \sum \frac{m}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right) + \Omega \sum m\left(x\frac{d\eta}{dt} - y\frac{d\xi}{dt}\right) \\ &+ \Omega \sum m\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) + \frac{\Omega^2}{2}\sum m\left[(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2\right]. \end{aligned}\right.$$

Le premier terme représente la force vive relative, le second et le troisième représentent, au facteur près Ω, le moment de rotation dans le mouvement relatif; le dernier terme, qui contient en facteur Ω^2, est négligeable.

La vitesse angulaire Ω joue le rôle de q'_b, et l'on a, en négligeant dans T le terme en Ω^2,

$$p_b = \frac{dT}{d\Omega} = \sum m\left(x\frac{d\eta}{dt} - y\frac{d\xi}{dt}\right) + \sum m\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right),$$

d'où

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} H = &\sum \frac{m}{2}\,\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2} - \Omega \sum m\left(x\frac{d\eta}{dt} - y\frac{d\xi}{dt}\right) \\ &- \Omega \sum m\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) - U. \end{aligned}\right.$$

D'après une remarque faite au n° **8**, nous pouvons supprimer dans H les termes du premier degré par rapport aux q'_a qui sont représentés ici par le second terme de l'expression (2), de sorte qu'il reste

$$(3)\qquad H = \sum \frac{m}{2}\,\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2} - \Omega \sum m\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) - U,$$

d'où

$$H_2 = \sum \frac{m}{2}\,\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2},$$

$$H_1 = \Omega \sum m\left(\eta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\eta}{dt}\right),$$

$$H_0 = -U.$$

Pour passer au problème du liquide, où le nombre des molécules est infini, il suffit de remplacer les sommes par des intégrales et il vient

$$H_2 = \int \frac{d\tau}{2} \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2},$$

$$H_1 = \Omega \int d\tau \left(\eta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\eta}{dt}\right).$$

Les intégrations sont étendues à tous les éléments de volume $d\tau$ du liquide.

Quant à la valeur de $H_0 = -U$, nous l'avons obtenue au n° **6**; nous avons trouvé

$$H_0 = -U = -\int g\zeta^2 \frac{d\omega}{2},$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface libre. Les fonctions ξ, η, ζ sont assujetties à deux conditions :

1° On doit avoir l'équation de continuité

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0; \tag{4}$$

2° Sur la paroi du vase, on doit avoir

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0, \tag{5}$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la surface de la paroi.

On peut supposer, en outre, que les diverses molécules du fluide sont soumises à des forces extérieures et que le travail virtuel de ces forces pour des déplacements virtuels $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ des molécules est représenté par l'intégrale

$$\int d\tau (X\,\delta\xi + Y\,\delta\eta + Z\,\delta\zeta)$$

qui correspond ainsi à la somme que nous appelions dans les numéros précédents

$$\sum Q_a\,\delta q_a.$$

Il faut donc que l'on ait, en vertu du principe de Hamilton,

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta H + \int d\tau (X\,\delta\xi + Y\,\delta\eta + Z\delta\zeta)\right] = 0,$$

en supposant que $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ sont nuls pour $t = t_0$, $t = t_1$ et que ξ, η, ζ sont assujettis aux équations (4) et (5).

On peut écrire ceci sous une autre forme, en introduisant deux fonctions arbitraires ψ et θ,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta H + \int d\tau \sum X\,\delta\xi + \int d\tau\,\psi \sum \frac{d\,\delta\xi}{dx} \\ &\qquad + \int d\omega'\,\theta(l\,\delta\xi + m\,\delta\eta + n\,\delta\zeta)\Big] = 0. \end{aligned}\right.$$

La troisième intégrale est étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la surface de la paroi dont les cosinus directeurs sont l, m, n.

Cette équation (6) est évidemment vraie, quelles que soient les fonctions ψ et θ si ξ, η et ζ sont assujetties aux conditions (4) et (5), et, en vertu des principes du calcul des variations, elle sera encore vraie, pour un choix convenable de ψ et de θ, sans que ξ, η, ζ soient assujetties à aucune condition.

On arrive ainsi aux équations du mouvement qu'on aurait pu obtenir directement et qui s'écrivent

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\Omega\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\psi}{dx} = X, \\ &\frac{d^2\eta}{dt^2} - 2\Omega\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\psi}{dy} = Y, \\ &\frac{d^2\zeta}{dt^2} \qquad\qquad + \frac{d\psi}{dz} = Z, \end{aligned}\right.$$

à l'intérieur du vase;

$$\psi = -g\zeta,$$

à la surface libre.

Je prends le signe — devant $g\zeta$ dans la dernière de ces équations, parce que je considère l'axe des z positifs, comme dirigé vers le bas.

Ces équations, jointes à (4) et à (5), définiront les quatre fonctions ξ, η, ζ, ψ.

Supposons, en particulier, que ces quatre fonctions soient proportionnelles à $e^{i\lambda t}$, nos équations deviendront

$$(7\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\lambda^2\xi + 2i\Omega\lambda\eta + \frac{d\psi}{dx} = X,\\ &-\lambda^2\eta - 2i\Omega\lambda\xi + \frac{d\psi}{dy} = Y,\\ &-\lambda^2\zeta \qquad\qquad + \frac{d\psi}{dz} = Z,\end{aligned}\right.$$

à l'intérieur du vase;

$$\psi = -g\zeta,$$

à la surface libre.

13. — Développement en série.

L'élimination de ψ entre les équations ($7\,bis$) nous conduit aux équations suivantes :

$$(7\,ter)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\lambda^2\left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right) - 2i\Omega\lambda\frac{d\xi}{dz} = \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy},\\ &-\lambda^2\left(\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}\right) - 2i\Omega\lambda\frac{d\eta}{dz} = \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz},\\ &-\lambda^2\left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}\right) - 2i\Omega\lambda\frac{d\zeta}{dz} = \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\end{aligned}\right.$$

à l'intérieur du vase;

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &-g\frac{d\zeta}{dx} = X + \lambda^2\xi - 2i\Omega\lambda\eta,\\ &-g\frac{d\zeta}{dy} = Y + \lambda^2\eta + 2i\Omega\lambda\xi,\end{aligned}\right.$$

$$\int \zeta\, d\omega = 0$$

à la surface libre.

La troisième équation (8) est une conséquence immédiate de (4) et de (5).

Supposons maintenant que l'on ait

$$X = X_0 + \lambda X_1, \qquad Y = Y_0 + \lambda Y_1, \qquad Z = Z_0 + \lambda Z_1$$

et que

$$X_0\,dx + Y_0\,dy + Z_0\,dz$$

soit une différentielle exacte.

Développons ξ, η, ζ suivant les puissances croissantes de λ, de telle sorte que l'on ait, par exemple,

$$\xi = \Sigma \lambda^n \xi_n.$$

Alors les équations (7 *ter*) et (8) nous donnent, en égalant les coefficients des puissances semblables de λ :

Premier groupe.

$$(7\,a) \qquad \left\{ \begin{aligned} -2i\Omega \frac{d\xi_0}{dz} &= \frac{dY_1}{dz} - \frac{dZ_1}{dy}, \\ -2i\Omega \frac{d\eta_0}{dz} &= \frac{dZ_1}{dx} - \frac{dX_1}{dz}, \\ -2i\Omega \frac{d\zeta_0}{dz} &= \frac{dX_1}{dy} - \frac{dY_1}{dx} \end{aligned} \right.$$

à l'intérieur du vase;

$$(4\,a) \qquad \frac{d\xi_0}{dx} + \frac{d\eta_0}{dy} + \frac{d\zeta_0}{dz} = 0$$

à l'intérieur du vase;

$$(5\,a) \qquad l\xi_0 + m\eta_0 + n\zeta_0 = 0$$

pour la paroi;

$$(8\,a) \qquad -g\frac{d\zeta_0}{dy} = X_0, \qquad -g\frac{d\zeta_0}{dy} = Y_0,$$

$$\int \zeta_0\,d\omega = 0$$

pour la surface libre.

Deuxième groupe.

$$(7b) \qquad -2i\Omega\frac{d\xi_1}{dz} = \frac{d\eta_0}{dz} - \frac{d\zeta_0}{dy}$$

et deux équations qu'on en déduit par symétrie;

$$(4b) \qquad \frac{d\xi_1}{dx} + \frac{d\eta_1}{dy} + \frac{d\zeta_1}{dz} = 0,$$

$$(5b) \qquad l\xi_1 + m\eta_1 + n\zeta_1 = 0;$$

$$(8b) \qquad \begin{cases} -g\dfrac{d\zeta_1}{dx} = X_1 - 2i\Omega\eta_0, \\ -g\dfrac{d\zeta_1}{dy} = Y_1 + 2i\Omega\xi_0, \end{cases}$$

$$\int \zeta_1\, d\omega = 0.$$

Troisième groupe ($n > 0$).

$$(7c) \qquad -2i\Omega\frac{d\xi_{n+1}}{dz} = \frac{d\eta_n}{dz} - \frac{d\zeta_n}{dy}$$

et deux équations qu'on en déduit par symétrie,

$$(4c) \qquad \frac{d\xi_{n+1}}{dx} + \frac{d\eta_{n+1}}{dy} + \frac{d\zeta_{n+1}}{dz} = 0,$$

$$(5c) \qquad l\xi_{n+1} + m\eta_{n+1} + n\zeta_{n+1} = 0,$$

$$(8c) \qquad \begin{cases} -g\dfrac{d\zeta_{n+1}}{dx} = \xi_{n-1} - 2i\Omega\eta_n, \\ -g\dfrac{d\zeta_{n+1}}{dy} = \eta_{n-1} + 2i\Omega\xi_n, \end{cases}$$

$$\int \zeta_n\, d\omega = 0.$$

Voyons comment ces trois groupes d'équations vont nous permettre de déterminer par récurrence toutes nos inconnues :

1° Les équations ($7a$) déterminent ξ_0 à une fonction inconnue près de x et de y; les équations ($8a$) achèvent ensuite la détermination

de ζ_0. Ces deux équations ($8\,a$) sont compatibles, parce que

$$X_0\,dx + Y_0\,dy$$

est pour $z = 0$ une différentielle exacte;

2° Pour achever la détermination de ξ_0 et η_0, nous devons nous servir des équations ($4\,a$) et ($5\,a$). Ces équations nous font connaître

$$\frac{d\xi_0}{dx} + \frac{d\eta_0}{dy} \quad \text{et} \quad l\xi_0 + m\eta_0,$$

puisque ζ_0 est entièrement déterminé. D'autre part, ξ_0 et η_0 sont définis à deux fonctions arbitraires près de x et de y; c'est-à-dire que l'on a

$$\xi_0 = \xi_0' + \xi_0'', \qquad \eta_0 = \eta_0' + \eta_0'',$$

ξ_0' et η_0' étant entièrement connus, pendant que ξ_0'' et η_0'' ne dépendent que de x et de y. Les équations ($4\,a$) et ($5\,a$) peuvent alors s'écrire

$$(9\,a) \qquad \frac{d\xi_0''}{dx} + \frac{d\eta_0''}{dy} = \varphi, \qquad l\xi_0'' + m\eta_0'' + n\theta = 0,$$

φ et θ étant deux fonctions connues de x et de y.

Ces équations ne sont pas toujours compatibles. Soit, en effet,

$$z = h(x, y)$$

l'équation de la paroi du vase. Les cosinus directeurs l, m, n sont proportionnels à

$$\frac{dh}{dx}, \quad \frac{dh}{dy}, \quad -1,$$

de sorte que la seconde équation ($9\,a$) peut s'écrire

$$\xi_0''\frac{dh}{dx} + \eta_0''\frac{dh}{dy} = \theta.$$

Soit alors $F(h)$ une fonction de h qui s'annule pour $h = 0$; on aura

$$\int dx\,dy\left[\frac{d\xi_0''\,F(h)}{dx} + \frac{d\eta_0''\,F(h)}{dy}\right] = 0,$$

l'intégration étant étendue à toute la surface du vase, puisque sur le bord du vase $F(h)$ s'annule.

Cela peut s'écrire, en tenant compte des équations ($9a$),

$$(10a)\qquad \int dx\,dy[F(h)\varrho + F'(h)\theta] = 0.$$

Il faut donc que X_1, Y_1, Z_1 satisfassent à certaines conditions que je n'écrirai pas.

Supposons la condition ($10a$) satisfaite; je dis qu'elle sera suffisante pour que l'on puisse déterminer ξ_0'' et η_0'', de façon à satisfaire aux équations ($9a$).

Nous pouvons, en effet, toujours trouver deux fonctions ξ_0' et η_0' qui satisfassent à la première des équations ($9a$)

$$\frac{d\xi_0'}{dx} + \frac{d\eta_0'}{dy} = \varrho.$$

Cela peut se faire d'une infinité de manières; on peut, par exemple, prendre

$$\eta_0' = 0, \qquad \xi_0' = \int_0^x \varrho\,dx.$$

On aura ensuite

$$\xi_0'' = \xi_0' - \frac{d\psi}{dy}, \qquad \eta_0'' = \eta_0' + \frac{d\psi}{dx},$$

ψ étant une fonction auxiliaire.

La seconde équation ($9a$) montre ensuite que ψ doit satisfaire à une équation de la forme

$$(9a\,bis)\qquad \frac{d\psi}{dx}\frac{dh}{dy} - \frac{dh}{dx}\frac{d\psi}{dy} = \theta',$$

θ' étant une fonction connue de x et de y. En vertu de ($10a$), on aura

$$(10a\,bis)\qquad \int dx\,dy\,F'(h)\theta' = 0.$$

Prenons alors un système particulier de coordonnées qui compren-

dra la variable h et une variable s qui variera de o à 2π quand on fera le tour de l'une des courbes fermées $h = \text{const}$. Soit J le jacobien ou déterminant fonctionnel de x et de y par rapport à s et à h. Les équations (9 *a bis*) et (10 *a bis*) deviendront

$$(9\,a\,ter) \qquad \frac{d\psi}{ds} = J\theta^*,$$

$$(10\,a\,ter) \qquad \int\int F'(h) J\theta^*\, dh\, ds = 0.$$

L'équation (10 *a ter*) ayant lieu, quel que soit $F'(h)$, nous pourrons écrire

$$(10\,a\,quater) \qquad \int_0^{2\pi} J\theta^*\, ds = 0.$$

L'équation (9 *a ter*) nous donne

$$\psi = \int_0^s J\theta^*\, ds + \text{fonction arbitraire de } h.$$

Mais, pour que cette fonction soit uniforme, il faut et il suffit que

$$\int_0^{2\pi} J\theta^*\, ds = 0.$$

Or cette condition est remplie en vertu de l'équation (10 *a quater*).

3° La fonction ψ n'est encore déterminée qu'à une fonction arbitraire près de h que j'appellerai $f(h)$; si cette fonction $f(h)$ était connue, les équations (7 *b*) et (8 *b*) détermineraient ζ_1 complètement et ξ_1 et η_1 à des fonctions arbitraires près de x et de y. Il est aisé de vérifier que les équations (8 *b*) sont toujours compatibles.

4° Il faudrait ensuite achever la détermination de ξ_1 et η_1 à l'aide de (4 *b*) et (5 *b*); pour cela posons

$$\xi_1 = \xi_1' + \xi_1'', \qquad \eta_1 = \eta_1' + \eta_1'',$$

ξ_1' et η_1' étant entièrement connues, tandis que ξ_1'' et η_1'' ne dépendent que de x et de y.

Nous arriverons à des équations de même forme que (9 a) qui s'écriront

$$(9\,b)\qquad \frac{d\xi''_1}{dx}+\frac{d\eta''_1}{dy}=\varphi_1,\qquad \xi''_1\frac{dh}{dx}+\eta''_1\frac{dh}{dy}=\theta_1,$$

où φ_1 et θ_1 sont deux fonctions connues. Pour que ces équations soient compatibles, on devra avoir

$$(10\,b)\qquad \int dx\,dy[F(h)\varphi_1+F'(h)\theta_1]=0.$$

5° J'ai dit que ζ_1, $\frac{d\xi_1}{dz}$, $\frac{d\eta_1}{dz}$, φ_1 et θ_1 étaient des fonctions connues, *mais en supposant que la fonction $f(h)$ soit connue elle-même.*

Je vais maintenant me servir de l'équation (10 b) pour achever la détermination de $f(h)$.

Nous connaissons complètement ζ_0, $\frac{d\xi_0}{dz}$, $\frac{d\eta_0}{dz}$; il en résulte que $\frac{d\xi_1}{dz}$ et $\frac{d\eta_1}{dz}$ sont aussi entièrement connus; au contraire, $\frac{d\zeta_1}{dz}$ n'est pas complètement déterminé, parce que $\frac{d\xi_0}{dy}-\frac{d\eta_0}{dx}$ ne l'est pas.

ξ_0 est déterminé au terme près $-f'(h)\frac{dh}{dy}=-\frac{df(h)}{dy}$ et η_0 au terme près $f'(h)\frac{dh}{dx}=\frac{df(h)}{dx}$. Il en résulte que $\frac{d\zeta_1}{dz}$ sera déterminé au terme près

$$\frac{1}{2i\Omega}\Delta f(h).$$

La valeur de ζ_1 pour $z=0$ nous est donnée par les équations (8 b); mais comme ξ_0 et η_0 ne sont pas entièrement déterminés, ces équations nous montrent que $\frac{d\zeta_1}{dx}$ et $\frac{d\zeta_1}{dy}$ sont déterminés à des termes près en

$$+\frac{2i\Omega}{g}\frac{df(h)}{dx},\qquad +\frac{2i\Omega}{g}\frac{df(h)}{dy}$$

et, par conséquent, ξ_1 à un terme près en

$$+\frac{2i\Omega}{g}f(h),$$

en supposant, ce qui est permis,

$$\int f(h)\,d\omega = 0.$$

La valeur de ζ_1 pour $z = h$ est alors déterminée à un terme près en

$$\frac{h}{2i\Omega}\Delta f(h) + \frac{2i\Omega}{g} f(h)$$

et l'équation (10 b) prend la forme

$$(10\,b\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\int dx\,dy\Big[-\mathrm{F}(h)\Delta f(h) \\ &\qquad + \mathrm{F}'(h)\Big(h\,\Delta f - \frac{4\Omega^2 f}{g}\Big)\Big] = \text{expression connue,}\end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(10\,b\,ter)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \mathrm{J}\,dh\,ds\Big[(h\,\mathrm{F}' - \mathrm{F})(f'\,\Delta h + f''\,\mathrm{D}h) \\ &\qquad - \frac{4\Omega^2\,\mathrm{F}' f}{g}\Big] = \text{expression connue,}\end{aligned}\right.$$

où j'ai posé pour abréger

$$\mathrm{D}h = \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2.$$

En intégrant par partie et remarquant que $\mathrm{F}(h)$ s'annule pour $h = 0$, on trouve

$$-\int dx\,dy\,\mathrm{F}(h)\,\Delta f(h) = \int dx\,dy\,\mathrm{F}'(h) f'(h)\,\mathrm{D}h;$$

de sorte que l'équation (10 b ter) devient

$$\int \mathrm{J}\,\mathrm{F}'\,dh\,ds\Big(h f'\,\Delta h + h f''\,\mathrm{D}h + f' - \frac{4\Omega^2 f}{g}\Big) = \text{expression connue.}$$

La fonction F' étant connue, on peut tirer de là l'équation différentielle qui définira la fonction f.

Soit, en effet,

$$A = \int_0^{2\pi} J\,Dh\,ds, \qquad B = \int_0^{2\pi} J\,\Delta h\,ds, \qquad C = \int_0^{2\pi} J\,ds:$$

A, B, C sont des fonctions connues de h.

Notre équation différentielle s'écrit alors

$$(11) \qquad Ahf'' + f'(Bh + C) + KCf = E,$$

E étant une quatrième fonction connue de h.

C'est là une équation différentielle du deuxième ordre qui ne détermine la fonction f qu'à deux constantes arbitraires près.

Voyons comment on peut déterminer ces constantes.

Je supposerai que la fonction h n'a qu'un seul maximum que j'appellerai h_0, de telle façon que les courbes $h =$ const. soient des courbes fermées s'enveloppant mutuellement. C'est d'ailleurs ce que j'ai déjà supposé implicitement en prenant les variables h et s.

Cela posé, j'observe que J s'annule, ainsi que Dh, pour $h = h_0$. Il en résulte que A, B, C et E s'annulent également et il en est de même de $\frac{A}{C}$, tandis que $\frac{B}{C}$ reste fini et qu'il en est de même, en général, de $\frac{E}{C}$.

Si j'écris l'équation (11) sous la forme

$$\frac{A}{C}hf + f'\left(h\frac{B}{C} + 1\right) + Kf = \frac{E}{C},$$

je vois que le coefficient de f'' s'annule deux fois : pour $h = 0$ et pour $h = h_0$.

Il en résulte que pour $h = 0$, par exemple, l'intégrale générale de l'équation (11) devient infinie, ou du moins que ses dérivées d'ordre suffisamment élevé deviennent infinies.

Si donc on veut que f reste fini pour $h = 0$, ainsi que toutes ses dérivées, il faudra assujettir les deux constantes d'intégration à une certaine relation.

De même si l'on veut que f reste fini pour $h = h_0$, ainsi que toutes

ses dérivées, il faudra assujettir les deux constantes d'intégration à une seconde relation.

Ces constantes devant ainsi satisfaire à deux relations seront entièrement déterminées.

La fonction f est donc déterminée complètement, ainsi que ξ_0, η_0, ζ_1, $\frac{d\xi_1}{dz}$, $\frac{d\eta_1}{dz}$, φ_1 et θ_1.

6° Les fonctions φ_1 et θ_1 ainsi déterminées satisfont à la condition (10 b); on déterminera ξ''_1 et η''_1 par les équations (9 b); ce qui nous fera connaître ξ_1 et η_1, non pas complètement, mais à des termes près en

$$-f'_1(h)\frac{dh}{dy} \quad \text{et} \quad f'_1(h)\frac{dh}{dx},$$

$f_1(h)$ étant une nouvelle fonction arbitraire de h.

7° Nous formerons une équation (10 c) avec (4 c) et (5 c) de la même manière que nous avons formé (10 a) avec (4 a) et (5 a) et (10 b) avec (4 b) et (5 b); traitant ensuite (10 c) comme nous venons de traiter (10 b), nous déterminerons $f_1(h)$. La détermination de ξ_1, η_1 et ζ_1 sera ainsi achevée.

8° Par les équations (7 c) et (8 c) nous déterminerons

$$\zeta_2, \quad \frac{d\xi_2}{dz}, \quad \frac{d\eta_2}{dz}.$$

9° La condition (10 c) étant remplie, les équations (4 c) et (5 c) sont compatibles. Elles nous donneront ξ_2 et η_2 à des termes près en

$$-f'_2(h)\frac{dh}{dy} \quad \text{et} \quad f'_2(h)\frac{dh}{dx},$$

$f_2(h)$ étant une nouvelle fonction arbitraire.

10° On déterminera $f_2(h)$ comme on a déterminé $f(h)$ et $f_1(h)$. La détermination de ξ_2, η_2, ζ_2 sera alors terminée.

Et ainsi de suite.

Nous avons dû supposer plus haut que non seulement X_0, Y_0, Z_0, mais X_1, Y_1, Z_1 doivent satisfaire à certaines relations. La généralité se trouverait ainsi restreinte, et pour éviter cela nous poserons non

plus

$$X = X_0 + \lambda X_1,$$

mais

$$X = X_0 + \lambda X_1 + \lambda^2 X_2, \qquad Y = Y_0 + \lambda Y_1 + \lambda^2 Y_2, \qquad \ldots.$$

Nos équations doivent alors être modifiées.

Dans l'équation ($7\,b$) on doit ajouter un second membre $\frac{dY_2}{dz} - \frac{dZ_2}{dy}$ et il faut modifier de même les autres équations déduites de ($7\,b$) par symétrie.

Les équations ($8\,c$) doivent également être modifiées pour $n = 1$ et l'on doit les écrire

$$-g\frac{d\xi_2}{dx} = \xi_0 - 2i\Omega\eta_1 + X_2,$$

$$-g\frac{d\eta_2}{dy} = \eta_0 + 2i\Omega\xi_1 + Y_2.$$

Tout ce que nous avons dit subsiste d'ailleurs et les fonctions X_2, Y_2, Z_2 peuvent être quelconques.

Nous avons ainsi le moyen de développer ξ, η, ζ suivant les puissances de λ; mais le domaine de convergence est évidemment limité.

C'est ici qu'on peut appliquer les principes du n° **11**.

Nous avons vu que dans le cas où il y a un nombre fini de degrés de liberté, les quantités q_a (qui sont analogues à ξ, η, ζ) sont des fonctions rationnelles de λ, dont les infinis sont les quantités $\pm\lambda_m$.

Ici, le nombre des degrés de liberté étant illimité, ξ, η, ζ seront des fonctions uniformes (et très probablement méromorphes) de λ. En multipliant le développement de ξ suivant les puissances de λ par un polynome tel que le suivant

$$(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2)\ldots(\lambda^2 - \lambda_{m-1}^2)(\lambda^2 - \lambda_m^2),$$

on étendra donc beaucoup l'étendue du domaine de convergence (il est même probable qu'on pourra l'étendre indéfiniment) et, d'ailleurs, on augmentera la rapidité de la convergence.

De là l'intérêt qui s'attache à la détermination des λ_m. Nous avons

vu que cette détermination pouvait reposer sur la considération du rapport $\frac{k_{p+1}}{k_p}$; ici ce rapport s'écrit, en faisant, par exemple, $p = 3$,

$$(12) \qquad \frac{-\int d\tau(\xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2) + g\int \zeta_4^2\, d\omega}{\int d\tau(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - g\int \zeta_3^2\, d\omega}.$$

J'observe que ce rapport est essentiellement positif. En effet, si nous supposons, comme il convient, X_0, Y_0, Z_0, X_2, Y_2, Z_2 réels, X_1, Y_1, Z_1 purement imaginaires; il arrivera que ξ_2, η_2, ζ_2, ξ_4, η_4, ζ_4 seront réels, tandis que ξ_3, η_3, ζ_3 seront purement imaginaires

Les fonctions ξ_n, η_n, ζ_n dépendent évidemment du choix de X, Y, Z; supposons donc qu'on choisisse X, Y, Z, de façon que le rapport $\frac{k_4}{k_3}$ soit maximum. Le maximum ainsi obtenu, que j'appellerai le *premier maximum*, est précisément $\frac{1}{\lambda_1^2}$.

Soit maintenant

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_p A_p, \\ Y &= \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \ldots + \alpha_p B_p, \\ Z &= \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_p C_p, \end{aligned}$$

les α étant des coefficients indéterminés, les A, B, C étant des fonctions quelconques de x, y, z.

Les fonctions A, B, C étant d'abord supposées données, choisissons les coefficients α, de telle façon que le rapport (12) soit minimum. Soit R le minimum ainsi obtenu. Ce minimum R dépend du choix des fonctions A, B, C; choisissons ces fonctions de telle façon que R soit maximum. Le maximum ainsi obtenu sera ce que j'appellerai le $p^{\text{ième}}$ *maximum* du rapport (12); il sera égal à $\frac{1}{\lambda_p^2}$.

Tout est donc ramené à l'étude des maxima successifs du rapport (12).

14. — Cas d'une profondeur très petite.

Tout ce qui précède est susceptible d'importantes simplifications, quand la profondeur du vase est infiniment petite.

Nous pouvons alors développer toutes nos quantités suivant les puissances croissantes de z et négliger le carré de z. Nous aurons alors

$$\xi = \xi' + z\xi'', \qquad \eta = \eta' + z\eta'', \qquad \zeta = \zeta' + z\zeta'',$$
$$X = X' + zX'', \qquad Y = Y' + zY'', \qquad Z = Z' + zZ'',$$

ξ', ξ'', ..., X', X'', ..., étant des fonctions de x et de y.

La troisième équation (7 *ter*) devient alors

$$-\lambda^2\left(\frac{d\xi'}{dy} - \frac{d\eta'}{dx}\right) - 2i\Omega\lambda\zeta'' = \frac{dX'}{dy} - \frac{dY'}{dx},$$

Les équations (8) deviennent

$$-g\frac{d\zeta'}{dx} = X' + \lambda^2\xi' - 2i\Omega\lambda\eta',$$
$$-g\frac{d\zeta'}{dy} = Y' + \lambda^2\eta' + 2i\Omega\lambda\xi',$$
$$\int \zeta' d\omega = 0.$$

D'autre part (4) nous donne (en négligeant les termes en z devant ceux qui ne contiennent pas z)

$$\frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{dy} + \zeta'' = 0$$

et (5) devient, en négligeant les termes en z^2, zh, ...,

$$\xi'\frac{dh}{dx} + \eta'\frac{dh}{dy} = \zeta' + h\zeta''.$$

En éliminant ζ'' entre ces équations, nous trouvons

$$-\lambda^2\left(\frac{d\xi'}{dy}-\frac{d\eta'}{dx}\right)+2i\Omega\lambda\left(\frac{d\xi'}{dx}+\frac{d\eta'}{dy}\right)=\frac{dX'}{dy}-\frac{dY'}{dx},$$

$$\frac{d(h\xi')}{dx}+\frac{d(h\eta')}{dy}=\zeta'.$$

Je transcris ces équations en supprimant les accents devenus inutiles,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} -g\frac{d\zeta}{dx}&=X+\lambda^2\xi-2i\Omega\lambda\eta,\\ -g\frac{d\zeta}{dy}&=X+\lambda^2\eta+2i\Omega\lambda\xi,\end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \int\zeta\,d\omega=0.$$

$$(3)\qquad -\lambda^2\left(\frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx}\right)+2i\Omega\lambda\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right)=\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx},$$

$$(4)\qquad \frac{d(h\xi)}{dx}+\frac{d(h\eta)}{dy}=\zeta.$$

Développons maintenant toutes ces expressions suivant les puissances de λ et soit

$$X=X_0+\lambda X_1+\lambda^2X_2,\qquad Y=Y_0+\lambda Y_1+\lambda^2Y_2,$$

$$\xi=\xi_0+\lambda\xi_1+\lambda^2\xi_2+\ldots+\lambda^n\xi_n+\ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous arriverons à la série d'équations suivantes :

Premier groupe.

$$(1a)\qquad -g\frac{d\zeta_0}{dx}=X_0,\qquad -g\frac{d\zeta_0}{dy}=Y_0,$$

$$(2a)\qquad \int\zeta_0\,d\omega=0$$

$\left(\text{avec la condition } \dfrac{dX_0}{dy}=\dfrac{dY_0}{dx}\right)$,

$$(3a)\qquad 2i\Omega\left(\frac{d\xi_0}{dx}+\frac{d\eta_0}{dy}\right)=\frac{dX_1}{dy}-\frac{dY_1}{dx},$$

$$(4a)\qquad \frac{dh\xi_0}{dy}+\frac{dh\eta_0}{dy}=\zeta_0.$$

Deuxième groupe.

$$(1\,b)\qquad \begin{cases} -g\dfrac{d\zeta_1}{dx} = X_1 - 2i\Omega\eta_0, \\[2ex] -g\dfrac{d\zeta_1}{dy} = Y_1 + 2i\Omega\xi_0, \end{cases}$$

$$(2\,b)\qquad \int \zeta_1\, d\omega = 0,$$

$$(3\,b)\qquad 2i\Omega\left(\frac{d\xi_1}{dx} + \frac{d\eta_1}{dy}\right) = \frac{dX_2}{dy} - \frac{dY_2}{dx} + \frac{d\xi_0}{dy} - \frac{d\eta_0}{dx},$$

$$(4\,b)\qquad \frac{dh\xi_1}{dx} + \frac{dh\eta_1}{dy} = \zeta_1.$$

Troisième groupe.

$$(1\,c)\qquad \begin{cases} -g\dfrac{d\zeta_2}{dx} = X_2 - 2i\Omega\eta_1 + \xi_0, \\[2ex] -g\dfrac{d\zeta_2}{dy} = Y_2 + 2i\Omega\xi_1 + \eta_0, \end{cases}$$

$$(2\,c)\qquad \int \zeta_2\, d\omega = 0,$$

$$(3\,c)\qquad 2i\Omega\left(\frac{d\xi_2}{dx} + \frac{d\eta_2}{dy}\right) = \frac{d\xi_1}{dy} - \frac{d\eta_1}{dx},$$

$$(4\,c)\qquad \frac{dh\xi_2}{dx} + \frac{dh\eta_2}{dy} = \zeta_2.$$

Quatrième groupe $(n > 2)$.

$$(1\,d)\qquad \begin{cases} -g\dfrac{d\zeta_n}{dx} = -2i\Omega\eta_{n-1} + \xi_{n-2}, \\[2ex] -g\dfrac{d\zeta_n}{dy} = 2i\Omega\xi_{n-1} + \eta_{n-2}, \end{cases}$$

$$(2\,d)\qquad \int \zeta_n\, d\omega = 0,$$

$$(3\,d)\qquad 2i\Omega\left(\frac{d\xi_n}{dx} + \frac{d\eta_n}{dy}\right) = \frac{d\xi_{n-1}}{dy} - \frac{d\eta_{n-1}}{dx},$$

$$(4\,d)\qquad \frac{dh\xi_n}{dx} + \frac{dh\eta_n}{dy} = \zeta_n.$$

A ces équations il faut adjoindre les suivantes :

Soit $F(h)$ une fonction quelconque de h s'annulant pour $h = 0$, on aura, comme dans le numéro précédent,

$$\int d\omega\left[F'(h)\left(\frac{dh\xi}{dx}+\frac{dh\eta}{dy}\right)+(F-hF')\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right)\right]=0;$$

d'où l'on tire les équations

$$(10\,a)\qquad \int d\omega\left[2i\Omega\zeta_0F'+(F-hF')\left(\frac{dX_1}{dy}-\frac{dY_1}{dx}\right)\right]=0,$$

$$(10\,b)\qquad \int d\omega\left[2i\Omega\zeta_1F'+(F-hF')\left(\frac{dX_2}{dy}-\frac{dY_2}{dx}+\frac{d\xi_0}{dy}-\frac{d\eta_0}{dx}\right)\right]=0,$$

$$(10\,c)\qquad \int d\omega\left[2i\Omega\zeta_nF'+(F-hF')\left(\frac{d\xi_{n-1}}{dy}-\frac{d\eta_{n-1}}{dx}\right)\right]=0.$$

L'équation $(10\,a)$ est une condition à laquelle doivent satisfaire les fonctions X_1 et Y_1.

Les équations $(10\,b)$ et $(10\,c)$ doivent servir à déterminer ξ_0, η_0, ξ_{n-1}, η_{n-1}.

Voici comment se dirigeront les calculs :

Les équations $(1\,a)$ et $(2\,a)$ détermineront ζ_0;

Les équations $(3\,a)$ et $(4\,a)$, qui sont compatibles si la condition $(10\,a)$ est satisfaite, détermineront ξ_0 et η_0 à des termes près

$$-\frac{df_0(h)}{dy}\qquad\text{et}\qquad\frac{df_0(h)}{dx},$$

$f_0(h)$ étant une fonction arbitraire de h.

Les équations $(1\,b)$ et $(2\,b)$ détermineront ζ_1 au terme près

$$+\frac{2i\Omega}{g}f_0(h).$$

En même temps $\frac{d\xi_0}{dy}-\frac{d\eta_0}{dx}$ sera déterminé au terme près $-\Delta f_0(h)$; de sorte que l'équation $(10\,b)$ prendra la forme

$$\int d\omega\left[-\frac{4\Omega^2}{g}F'f_0+(hF'-F)\Delta f_0\right]=\text{expression connue.}$$

C'est l'équation (10 *b bis*) du numéro précédent et nous avons vu comment il faut la traiter pour déterminer $f_0(h)$.

La fonction $f_0(h)$ étant ainsi connue, la détermination de ξ_0, η_0, ζ_1 se trouve achevée.

Et ainsi de suite.

Pour pouvoir appliquer les principes du n° **11**, il nous faut voir ce que deviennent nos fonctions H_2, H_1, H_0 au degré d'approximation adopté. On trouve aisément

$$H_2 = \int \frac{h\,d\omega}{2} \frac{d\xi^2 + d\eta_1^2}{dt^2},$$

$$H_1 = \Omega \int h\,d\omega \left(\eta_1 \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\eta_1}{dt}\right),$$

$$H_0 = -\frac{g}{2} \int \zeta^2\,d\omega.$$

Le rapport $\frac{K_4}{K_3}$ prend alors la forme

$$\frac{-\int h\,d\omega(\xi_3^2 + \eta_{13}^2) + g\int \zeta_4^2\,d\omega}{\int h\,d\omega(\xi_2^2 + \eta_{12}^2) - g\int \zeta_3^2\,d\omega}.$$

En tenant compte des équations (1 *d*) ($n = 4$) et (4 *d*) ($n = 3$) cette expression devient

$$(5) \qquad \frac{-\int h\,d\omega(\xi_3^2 + \eta_{13}^2) + g\int \zeta_4^2\,d\omega}{\int h\,d\omega\left[\left(g\frac{d\zeta_4}{dx} - 2i\Omega\eta_{13}\right)^2 + \left(g\frac{d\zeta_4}{dy} + 2i\Omega\xi_3\right)^2\right] - g\int d\omega\left(\frac{dh\xi_3}{dx} + \frac{dh\eta_{13}}{dy}\right)^2},$$

et elle ne contient plus que trois fonctions arbitraires

$$\xi_3, \quad \eta_3, \quad \zeta_4.$$

Ces trois fonctions ne sont pas cependant entièrement arbitraires; car elles sont assujetties à la condition (2 *d*) ($n = 4$) et à la condition (10 *c*) ($n = 4$).

Ces conditions sont d'ailleurs les seules. Si elles sont remplies, on pourra à l'aide de (3 *d*) et (4 *d*) ($n = 4$) puis de (1 *d*), (2 *d*) ($n = 5$) et (10 *c*) ($n = 5$), déterminer ξ_4, η_4, ζ_5, et ainsi de suite.

Il reste à voir que ces fonctions ξ_3, η_3, ζ_4 sont compatibles avec les équations (1 a, b, c), (2 a, b, c), (3 a, b, c), (4 a, b, c), (10 a, b), (1, d, $n = 3$ et 4), (2 d, $n = 3$ et 4), (3, 4 d $n = 3$) (10, c, $n = 3$).

Or cette compatibilité est évidente, (1 d, $n = 4$) donnera ξ_2 et η_2 et entraînera comme conséquence (3 d, $n = 3$); (4 d, $n = 3$) nous donnera ζ_3 et entraînera (10 c, $n = 3$) et (2 d, $n = 3$).

Ensuite (1 d, $n = 3$) donnera ξ_1 et η_1 et entraînera (3 c); (4 c) donnera ζ_2 et entraînera (10 c, $n = 2$) et (2 c).

On pourra choisir X_2 et Y_2 arbitrairement; (1 c) donnera ξ_0 et η_0 et entraînera (3 b); (4 b) donnera ζ_1 et entraînera (10 b) et (2 b).

Enfin (1 b) donnera X_1 et Y_1 et entraînera (3 b); (4 a) donnera ζ_0 et entraînera (10 a) et (2 a); (1 a) donnera X_0 et Y_0.

Voyons maintenant si nous ne pouvons pas nous affranchir de ces deux conditions (2 d, $n = 4$), (10 c, $n = 4$).

Pour cela j'observe d'abord que si j'ajoute à ξ_4 une constante quelconque le dénominateur de (5) ne change pas.

Il en est encore de même si j'ajoute respectivement à ξ_3, η_3, ζ_4 les termes

$$-\frac{d\,f(h)}{dy}, \quad \frac{d\,f(h)}{dx}, \quad +\frac{2i\Omega\,f(h)}{g},$$

$f(h)$ étant une fonction quelconque de h.

On est donc amené à chercher à déterminer cette fonction $f(h)$ de telle façon que le numérateur soit minimum.

Je puis encore énoncer le problème en d'autres termes : quelle est la condition que doivent remplir les fonctions ξ_3, η_3, ζ_4 pour que le numérateur augmente quand on change ξ_3, η_3, ξ_4 en

$$\xi_3 - \frac{d\,f(h)}{dy}, \quad \eta_3 + \frac{d\,f(h)}{dx}, \quad \xi_4 + \frac{2i\Omega}{g}\,f(h),$$

et cela quelle que soit la fonction arbitraire $f(h)$?

Écrivons donc que la variation de ce numérateur est nulle :

$$(6) \qquad -\int h(\xi_3\,\delta\xi_3 + \eta_3\,\delta\eta_3)\,d\omega + g\int \xi_4\,\delta\zeta_4\,d\omega = 0.$$

Cette condition doit être remplie quelle que soit $f(h)$ quand on fait

$$\delta\xi_3 = -\frac{d\,f(h)}{dy}, \qquad \delta\eta_3 = \frac{d\,f(h)}{dx}, \qquad \delta\zeta_4 = +\frac{2i\Omega}{g}f,$$

d'où

$$(6\,bis) \qquad \int h\,f'\left(\xi_3\frac{dh}{dy} - \eta_3\frac{dh}{dx}\right)d\omega + 2i\Omega\int\zeta_4 f\,d\omega = 0.$$

Posons $f = F'$, $f' = F''$; nous pourrons encore supposer que F s'annule pour $h = 0$, et nous aurons

$$\int h\,F''\left(\xi_3\frac{dh}{dy} - \eta_3\frac{dh}{dx}\right)d\omega + 2i\Omega\int\zeta_4 F'\,d\omega = 0.$$

Or, hF'' est la dérivée de $hF' - F$, et comme $hF' - F$ s'annule pour $h = 0$, l'intégration par parties nous donnera

$$\int h\,F''\left(\xi_3\frac{dh}{dy} - \eta_3\frac{dh}{dx}\right)d\omega = -\int(hF' - F)\left(\frac{d\xi_3}{dy} + \frac{d\eta_3}{dx}\right)d\omega.$$

On tire de là

$$(6\,ter) \qquad \int\left[(F - hF')\left(\frac{d\xi_3}{dy} - \frac{d\eta_3}{dx}\right) + 2i\Omega\zeta_4 F'\right]d\omega = 0,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation ($10c$, $n = 4$).

Si, de même, dans l'équation (6 *bis*) nous faisons

$$f = 1,$$

il vient

$$\int\zeta_4\,d\omega = 0$$

ce qui n'est autre chose que l'équation ($2d$, $n = 4$).

Nous sommes ainsi conduits à l'énoncé suivant :

Considérons le rapport (5) où ξ_3, η_3, ζ_4 sont trois fonctions tout à

fait arbitraires; ou mieux le rapport

$$(5\ bis)\qquad \frac{\int (hu^2 + hv^2 + gw^2)\,d\omega}{\int d\left[h\left(g\frac{dw}{dx} + 2\Omega v\right)^2 + h\left(g\frac{dw}{dy} - 2\Omega u\right)^2 + g\left(\frac{dhu}{dx} + \frac{dhv}{dy}\right)^2\right]},$$

où j'ai posé

$$\xi_3 = iu, \qquad \eta_3 = iv, \qquad \zeta_4 = w,$$

de telle façon que les trois fonctions arbitraires u, v, w soient réelles.

Posons maintenant

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p - \frac{d\,f(h)}{dy},$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p + \frac{d\,f(h)}{dx},$$

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_p w_p - \frac{2\Omega\,f(h)}{g}.$$

Dans ces expressions les α_i sont des coefficients indéterminés, les u_i, les v_i, les w_i des fonctions complètement arbitraires; $f(h)$ une fonction arbitraire de h.

Regardant d'abord les u_i, les v_i, les w_i comme déterminés, nous choisissons les α_i et $f(h)$ de telle façon que le rapport (5 *bis*) soit aussi petit que possible; soit R le minimum ainsi obtenu qui dépendra des u_i, des v_i et des w_i; choisissons les u_i, v_i, w_i de façon que R soit aussi grand que possible; le maximum ainsi obtenu, que j'appellerai le $p+1^{\text{ième}}$ *maximum* sera $\frac{1}{\lambda_p^2}$.

La définition du $p+1^{\text{ième}}$ maximum se trouve ainsi un peu modifiée puisqu'au lieu de $p+1$ coefficients arbitraires, on a p coefficients arbitraires α_i et une fonction arbitraire $f(h)$. Mais cette modification n'a rien d'essentiel.

Ainsi *la détermination des périodes des oscillations propres du vase tournant est ramenée à la recherche des maxima successifs du rapport* (5 *bis*).

De cette détermination dépend, comme je l'ai expliqué à la fin du

numéro précédent, la possibilité d'étendre le domaine de convergence des séries procédant suivant les puissances de λ et d'augmenter la rapidité de leur convergence.

Ainsi l'étude du mouvement des mers, en tenant compte de la rotation du Globe, se trouve rattachée aux principes exposés dans la première Partie de ce Travail, où je négligeais cette rotation.

Dans un cas comme dans l'autre on est amené à envisager les maxima successifs du rapport de deux intégrales.

C'est ce qu'on comprendra mieux d'ailleurs si je montre ce que devient le rapport (5 *bis*) quand on suppose la rotation nulle.

On a alors

$$\Omega = 0, \qquad u = v = 0$$

et le rapport se réduit à

$$\frac{1}{g}\,\frac{\int w^2\,d\omega}{\int h\left[\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dy}\right)^2\right]d\omega},$$

ce qui est précisément le rapport envisagé au n° 6.

Il resterait à tenir compte de la courbure; mais c'est ce qui pourrait se faire d'après les mêmes principes.