

SUR UNE FORME NOUVELLE
DES ÉQUATIONS DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

PAR

H. POINCARÉ

à PARIS.

Soient A, B, C les trois corps; soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées du point A ; x_4, x_5, x_6 celles du point B ; x_7, x_8, x_9 celles du point C .

Pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment la masse du corps A par m_1, m_2, m_3 ; et de même la masse du corps B par m_4, m_5 ou m_6 ; et celle du corps C par m_7, m_8 ou m_9 .

Je poserai

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}$$

de telle façon que par exemple y_1, y_2 et y_3 soient les composantes de la quantité de mouvement du corps A .

La force vive T sera alors

$$T = \sum \frac{m_i}{2} \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 = \sum \frac{y_i^2}{2m_i}.$$

D'autre part, si l'on choisit les unités de telle façon que la constante de Gauss soit égale à 1, la fonction des forces U s'écrira

$$U = \frac{m_1 m_4}{AB} + \frac{m_1 m_7}{AC} + \frac{m_4 m_7}{BC}.$$

Si nous posons $F = T - U$; la fonction F dépendra des x et des y et les équations du mouvement pourront se mettre sous la forme canonique

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \quad (i=1,2,\dots,9)$$

Supposons maintenant que l'on change de variables et soient

$$x'_i, y'_i, \quad (i=1,2,\dots,9)$$

les 18 variables nouvelles. Quelle est la condition pour qu'après ce changement de variables les équations conservent la forme canonique?

La condition nécessaire et suffisante c'est que

$$\Sigma x'_i dy'_i - \Sigma x_i dy_i$$

soit une différentielle exacte.

Si cette condition est remplie, les équations deviendront

$$(1') \quad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i}, \quad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i}.$$

Examinons en particulier le cas où les x'_i sont des fonctions linéaires des x_i et les y'_i des fonctions linéaires des y_i .

La condition précédente peut alors s'énoncer d'une autre manière: la condition nécessaire et suffisante pour que la forme canonique des équations ne soit pas altérée, c'est qu'on ait identiquement

$$(2) \quad \Sigma y'_i x'_i = \Sigma y_i x_i.$$

Faisons une hypothèse plus particulière encore et supposons:

1° Que

$$\begin{array}{ll} x'_1, x'_4, x'_7 & \text{dépendent seulement de } x_1, x_4, x_7 \\ x'_2, x'_5, x'_8 & \text{dépendent seulement de } x_2, x_5, x_8 \\ x'_3, x'_6, x'_9 & \text{dépendent seulement de } x_3, x_6, x_9 \\ y'_1, y'_4, y'_7 & \text{dépendent seulement de } y_1, y_4, y_7 \\ y'_2, y'_5, y'_8 & \text{dépendent seulement de } y_2, y_5, y_8 \\ y'_3, y'_6, y'_9 & \text{dépendent seulement de } y_3, y_6, y_9; \end{array}$$

2° Que les relations linéaires qui lient x'_2, x'_5, x'_8 à x_2, x_5, x_8 et celles qui lient x'_3, x'_6, x'_9 à x_3, x_6, x_9 soient les mêmes que celles qui lient x'_1, x'_4, x'_7 à x_1, x_4, x_7 ;

3° Que de même les relations linéaires qui lient y'_2, y'_5, y'_8 à y_2, y_5, y_8 et celles qui lient y'_3, y'_6, y'_9 à y_3, y_6, y_9 soient les mêmes que celles qui lient y'_1, y'_4, y'_7 à y_1, y_4, y_7 .

Cette troisième hypothèse est d'ailleurs une conséquence nécessaire des deux premières et de l'identité (2).

Dans ces conditions, l'identité (2) peut être remplacée par la suivante

$$(2') \quad y'_1 x'_1 + y'_4 x'_4 + y'_7 x'_7 = y_1 x_1 + y_4 x_4 + y_7 x_7.$$

Si en effet l'identité (2') a lieu, on en déduira une seconde en augmentant tous les indices d'une unité et une troisième en augmentant encore une fois tous les indices d'une unité. La somme de ces trois identités ne sera autre chose que l'identité (2).

Mais ce n'est pas tout: nous avons supposé que x'_3, x'_6, x'_9 sont liés à x_3, x_6, x_9 , par les mêmes relations que x'_1, x'_4, x'_7 à x_1, x_4, x_7 , et y'_2, y'_5, y'_8 liés à y_2, y_5, y_8 par les mêmes relations que y'_1, y'_4, y'_7 à y_1, y_4, y_7 .

L'identité (2') subsistera donc quand on y changera

$$x_1, x_4, x_7; x'_1, x'_4, x'_7; y_1, y_4, y_7; y'_1, y'_4, y'_7$$

en

$$x_3, x_6, x_9; x'_3, x'_6, x'_9; y_2, y_5, y_8; y'_2, y'_5, y'_8.$$

On aura donc

$$y'_2 x'_3 + y'_5 x'_6 + y'_8 x'_9 = y_2 x_3 + y_5 x_6 + y_8 x_9$$

et de même

$$y'_3 x'_2 + y'_6 x'_5 + y'_9 x'_8 = y_3 x_2 + y_6 x_5 + y_9 x_8$$

et en retranchant

$$\begin{aligned} & y'_2 x'_3 - y'_3 x'_2 + y'_5 x'_6 - y'_6 x'_5 + y'_8 x'_9 - y'_9 x'_8 \\ &= y_2 x_3 - y_3 x_2 + y_5 x_6 - y_6 x_5 + y_8 x_9 - y_9 x_8. \end{aligned}$$

Or le second membre n'est autre chose que le premier *moment de rotation* du système, qui doit être constant en vertu de l'équation des aires. On voit que l'expression de ce moment de rotation en fonction des x' et des y' a la même forme que son expression en fonction des x et des y .

La forme de l'équation des aires n'est donc pas altérée par notre changement de variables.

Premier exemple. — Nous satisferons à l'identité (2') en faisant

$$y_1 = y'_1, \quad y_4 = y'_4, \quad x_7 = x'_7, \quad x_1 - x_7 = x'_1, \quad x_4 - x_7 = x'_4, \\ y'_7 = y_1 + y_4 + y_7.$$

Ce changement de variables, dont nous ferons un fréquent usage dans la suite et que nous appellerons *le changement* (α), a une signification géométrique, très simple.

Les variables nouvelles x'_1, x'_2, \dots, x'_6 sont les coordonnées *relatives* des points A et B par rapport à des axes mobiles passant par le point C .

Les variables $\frac{y'_1}{m_1}, \frac{y'_2}{m_2}, \dots, \frac{y'_6}{m_6}$ sont les composantes des vitesses *absolues* de ces deux points A et B .

Un *second exemple* qui ne diffère pas essentiellement du premier est le suivant

$$x'_1 = x_1 - x_7, \quad x'_4 = x_4 - x_7, \quad x'_7 = \frac{m_1 x_1 + m_4 x_4 + m_7 x_7}{m_1 + m_4 + m_7}, \\ y'_1 = y_1 - \frac{m_1 y_7}{m_1 + m_4 + m_7}, \quad y'_4 = y_4 - \frac{m_4 y_7}{m_1 + m_4 + m_7}, \quad y'_7 = y_1 + y_4 + y_7.$$

J'ai dit que ce second changement de variables ne diffère pas essentiellement du premier, voici pourquoi:

On ne restreint pas la généralité en supposant que le centre de gravité du système est fixe, c'est-à-dire que

$$y_1 + y_4 + y_7 = 0.$$

Si l'on fait cette hypothèse, les valeurs de $x'_1, x'_4, y'_1, y'_4, y'_7$ sont les mêmes dans les deux systèmes; les valeurs de x'_7 seules diffèrent; mais cette différence n'a rien d'essentiel. La fonction F dépend en effet des *différences* des coordonnées des trois points A, B, C . Elle dépend donc de $x'_1 = x_1 - x_7$ et de $x'_4 = x_4 - x_7$; *mais elle ne dépend pas de x'_7 .*

Troisième exemple. — Avec le troisième exemple je retombe sur un changement de variables connu et que j'appellerai *le changement* (β).

Soient

$$m'_1 = m'_2 = m'_3, \quad m'_4 = m'_5 = m'_6, \quad m'_7 = m'_8 = m'_9$$

trois coefficients constants analogues aux masses. On voit que, pour conserver la symétrie des notations, je représente indifféremment le premier de ces coefficients par m'_1, m'_2 ou m'_3 de même que j'avais représenté indifféremment la masse du corps A par m_1, m_2 ou m_3 .

Soit

$$y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt}.$$

Dans ces conditions, les y'_i sont liés aux y_i par les mêmes relations que les $m'_i x'_i$ aux $m_i x_i$ et les identités (2) et (2') peuvent être remplacées par les suivantes

$$(3) \quad \Sigma m'_i x_i'^2 = \Sigma m_i x_i^2$$

$$(3') \quad m'_1 x_1'^2 + m'_4 x_4'^2 + m'_7 x_7'^2 = m_1 x_1^2 + m_4 x_4^2 + m_7 x_7^2.$$

L'identité (3) nous montre en outre que la force vive T , exprimée en fonction des nouvelles variables, s'écrira

$$T = \sum \frac{m'_i}{2} \left(\frac{dx'_i}{dt} \right)^2 = \sum \frac{y_i'^2}{2m'_i}.$$

Ainsi, non seulement avec le changement de variables (β) la forme canonique des équations n'est pas altérée de même que la forme des intégrales des aires, mais il en est de même de la forme de l'équation des forces vives.

Il reste à voir comment on pourra satisfaire à l'identité (3'). Cela peut se faire d'une infinité de manières. Voici celle qui est ordinairement usitée et que nous adopterons.

Soit G le centre de gravité des trois corps; D celui des deux corps A et C .

Nous appellerons x'_7, x'_8, x'_9 les coordonnées du point G ; ξ, η, ζ celles du point D et nous poserons

$$x'_1 = x_1 - x_7, \quad x'_4 = x_4 - \xi,$$

de telle sorte que x'_1, x'_2, x'_3 soient les coordonnées du point A par rapport à des axes mobiles passant par le point C ; et x'_4, x'_5, x'_6 celles du point B par rapport à des axes mobiles passant par le point D .

Nous poserons d'ailleurs

$$m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \quad m'_4 = \frac{m_4(m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7}; \quad m'_7 = m_1 + m_4 + m_7.$$

Les propriétés du changement de variables (β) ainsi défini ont été étudiées par M. RADAU (Annales de l'École Normale, 1^{ère} série, tome 5).

Les deux changements de variables (α) et (β) ont d'ailleurs en commun la propriété de ne pas altérer la forme canonique des équations, ni la forme des intégrales des aires; de plus, ils permettent d'abaisser de 9 à 6 le nombre des degrés de liberté.

En effet, dans l'un et l'autre cas, la fonction F ne dépend que des y' et des six premières variables x'_i ; mais elle est indépendante de x'_7, x'_8 et x'_9 . D'autre part, on ne restreint pas la généralité en supposant le centre de gravité fixe, ce qui entraîne les égalités

$$y'_7 = y'_8 = y'_9 = 0.$$

Si l'on annule donc y'_7, y'_8, y'_9 , F ne dépend plus que des douze variables x'_i et y'_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) et les équations (1') peuvent s'écrire

$$(1'') \quad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y'_i}, \quad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x'_i} \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

avec six degrés de liberté seulement.

Méthode usuelle.

Malgré les avantages que présente le changement (β) et bien qu'il soit connu depuis longtemps, on sait qu'il n'est pas le plus usité dans la pratique. On lui préfère d'ordinaire un changement de variables que

j'appellerai *le changement* (γ) et dont les propriétés sont loin d'être aussi élégantes. On pose

$$m'_7 = m_1 + m_4 + m_7; \quad y'_7 = y_1 + y_4 + y_7 = m'_7 \frac{dx'_7}{dt};$$

$$m'_7 x'_7 = m_1 x_1 + m_4 x_4 + m_7 x_7;$$

$$x'_1 = x_1 - x_7, \quad x'_2 = x_2 - x_8, \quad x'_3 = x_3 - x_9,$$

$$x'_4 = x_4 - x_7, \quad x'_5 = x_5 - x_8, \quad x'_6 = x_6 - x_9,$$

$$m'_i = m_i, \quad (i=1,2,\dots,6)$$

$$y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt}. \quad (i=1,2,\dots,9)$$

On voit que x'_7, x'_8, x'_9 sont les coordonnées du centre de gravité G ; que $x'_1, x'_2, x'_3; x'_4, x'_5, x'_6$ sont, comme dans le changement (α), les coordonnées *relatives* des points A et B par rapport à des axes mobiles passant par le point C . Mais les variables

$$\frac{y'_i}{m_i}, \quad (i=1,2,\dots,6)$$

au lieu de représenter, comme dans le changement (α) les composantes des vitesses *absolues* des points A et B , représentent les composantes des vitesses *relatives* de ces deux points par rapport aux axes mobiles.

Il est aisé de voir que le changement (γ) ne satisfait pas aux identités (2), (2'), (3) et (3'); il ne conservera donc ni la forme canonique des équations, ni la forme des intégrales des aires.

Supposons cependant que le centre de gravité soit fixe; de telle sorte que $y'_7 = y'_8 = y'_9 = 0$; on sait que les équations pourront se mettre sous la forme suivante, que l'on pourrait appeler *semi-canonique*:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF'_1}{dy'_i}, & \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF'_1}{dx'_i}, & (i=1,2,3) \\ \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF'_2}{dy'_i}, & \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF'_2}{dx'_i}, & (i=4,5,6) \end{cases}$$

où

$$F_1 = \sum \frac{y_i'^2}{2m_i} - U - \frac{m_1^2}{AC} - \frac{m_4^2}{BC} + \frac{m_1 m_4}{BC^3} (x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6'),$$

$$F_2 = \sum \frac{y_i'^2}{2m_i} - U - \frac{m_1^2}{AC} - \frac{m_4^2}{BC} + \frac{m_1 m_4}{AC^3} (x_1' x_4' + x_2' x_6' + x_3' x_6').$$

On voit en quoi les douze équations (4) diffèrent des équations canoniques.

La fonction qui joue le rôle de la fonction F n'est pas la même dans ces douze équations; elle est égale à F_1 dans six d'entre elles et à F_2 dans les six autres. C'est ce que l'on exprime quelquefois en disant que la fonction perturbatrice n'est pas la même pour les deux planètes.

Élimination des nœuds.

Ce qu'on doit appeler l'*orbite osculatrice* du point A ou du point B n'est pas la même chose suivant que l'on adopte le changement (α) ou l'un des changements (β) ou (γ).

Dans l'hypothèse (α), le plan de l'orbite de A passe par la droite AC et par la vitesse *absolue* du point A et le plan de l'orbite de B passe par la droite BC et par la vitesse *absolue* du point B (je suppose toujours le centre de gravité fixe).

Dans l'hypothèse (β) le plan de l'orbite de A passe par la droite AC et par la vitesse *relative* du point A par rapport à C ; le plan de l'orbite de B passe par la droite BD et par la vitesse *relative* du point B par rapport à D .

Dans l'hypothèse (γ) le plan de l'orbite de A passe par la droite AC et par la vitesse *relative* du point A par rapport à C ; le plan de l'orbite de B passe par la droite BC et par la vitesse *relative* du point B par rapport à C .

Nous avons vu que les changements (α) et (β) conservent la forme des intégrales des aires, mais il n'en est pas de même du changement (γ). Il en résulte une importante propriété des orbites.

Dans l'hypothèse (α) comme dans l'hypothèse (β), l'intersection des plans des deux orbites est dans le plan invariable, mais il n'en est plus de même dans l'hypothèse (γ).

Il semble que tous ces avantages auraient dû faire substituer le changement (β) au changement (γ) . Si on ne l'a pas fait, c'est sans doute parce que le développement de la fonction perturbatrice est un peu plus compliqué dans l'hypothèse (β) . C'est pour cette raison que je crois devoir attirer l'attention sur le changement (α) qui n'a pas encore été proposé, *qui n'altère ni la forme canonique des équations, ni la forme des intégrales des aires et qui conduit à un développement de la fonction perturbatrice tout aussi simple que le changement (β)* . C'est ce dont nous nous rendrons mieux compte en comparant dans les trois cas la forme du développement.

Mouvement elliptique.

Soit une masse mobile m attirée par une masse fixe M située à l'origine, son mouvement sera képlérien.

Soient $a, e, i, l, g + \theta$, et θ le demi grand axe, l'excentricité, l'inclinaison, l'anomalie moyenne, la longitude du périhélie et celle du nœud. Soit

$$L = \sqrt{a}, \quad G = \sqrt{a(1 - e^2)}, \quad \theta = G \cos i.$$

Nous pouvons exprimer les trois coordonnées x_1, x_2, x_3 de la masse mobile m en fonction des six variables, $L, G, \theta, l, g, \theta$; écrivons donc

$$x_i = \varphi_i(L, G, \theta, l, g, \theta). \quad (i=1,2,3)$$

Posons d'autre part, en appelant n le moyen mouvement,

$$y_i = m \frac{dx_i}{dt} = nm \frac{d\varphi_i}{dl} = \frac{m\sqrt{M}}{L^3} \frac{d\varphi_i}{dl}.$$

Les fonctions φ_i jouissent de deux propriétés qui nous seront utiles dans la suite; elles satisfont d'abord à l'intégrale des forces vives

$$\frac{\Sigma y^2}{2m} - \frac{mM}{\sqrt{\Sigma x^2}} = -\frac{mM}{2L^2}.$$

D'autre part, l'expression

$$\Sigma y dx = m \sqrt{M} (L dl + G dg + \theta d\theta)$$

est une différentielle exacte.

Emploi des variables képlériennes.

Considérons les variables x'_i et y'_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) définies par l'un des trois changements (α) , (β) ou (γ) ; nous allons faire un nouveau changement de variables en remplaçant ces douze variables par douze variables nouvelles

$$L, G, \theta, l, g, \theta,$$

$$L', G', \theta', l', g', \theta'.$$

Ces douze variables nouvelles seront définies de la manière suivante; nous poserons

$$(5) \quad \begin{cases} x'_k = \varphi_k(L, G, \theta, l, g, \theta) & (k=1,2,3) \\ y'_k = \frac{\beta}{L^3} \frac{d\varphi_k}{dl} \\ x'_k = \varphi_{k-3}(L', G', \theta', l', g', \theta') & (k=4,5,6) \\ y'_k = \frac{\beta'}{L'^3} \frac{d\varphi_{k-3}}{dl'}. \end{cases}$$

Les douze variables définies par ces équations (5) pourront s'appeler *variables képlériennes*, ou bien *éléments osculateurs des deux corps A et B*.

Il importe de remarquer que ces éléments osculateurs ne sont pas les mêmes selon qu'on adopte le changement (α) ou l'un des changements (β) ou (γ) . J'ajouterai même que, si l'on adopte l'un de ces changements, le changement (α) par exemple, la définition des éléments osculateurs dépend encore du choix des deux constantes β et β' , choix que nous ferons dans la suite de façon à simplifier les équations autant que possible.

Dans tous les cas, les expressions

$$y'_1 dx'_1 + y'_2 dx'_2 + y'_3 dx'_3 - \beta(Ldl + Gdg + \theta d\theta)$$

$$y'_4 dx'_4 + y'_5 dx'_5 + y'_6 dx'_6 - \beta'(L'dl' + G'dg' + \theta'd\theta')$$

sont des différentielles exactes, de sorte qu'après ce nouveau changement de variables, les équations du mouvement conserveront la forme canonique dans les hypothèses (α) et (β) et la forme semi-canonique dans l'hypothèse (γ) .

Dans les hypothèses (α) et (β) les équations s'écrivent

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dl}{dt} = \frac{dF}{\beta dL}, & \frac{dL}{dt} = -\frac{dF}{\beta dl}, \\ \frac{dl'}{dt} = \frac{dF}{\beta dL'}, & \frac{dL'}{dt} = -\frac{dF}{\beta dl'}. \end{cases}$$

Dans l'hypothèse (γ) elles s'écrivent

$$(6') \quad \begin{cases} \frac{dl}{dt} = \frac{dF_1}{\beta dL}, & \frac{dL}{dt} = -\frac{dF_1}{\beta dl}, \\ \frac{dl'}{dt} = \frac{dF_2}{\beta dL'}, & \frac{dL'}{dt} = -\frac{dF_2}{\beta dl'}. \end{cases}$$

Aux quatre équations (6), comme aux quatre équations (6'), il faut adjoindre celles qu'on en déduirait en changeant L, l, L', l' en G, g, G', g' et celles qu'on en déduirait en changeant L, l, L', l' en $\theta, \theta, \theta', \theta'$.

D'autre part, on aura

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2}{2} - \frac{\beta^2}{\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}} = -\frac{\beta^2}{2L^2}, \\ \frac{y_4'^2 + y_5'^2 + y_6'^2}{2} - \frac{\beta^2}{\sqrt{x_4'^2 + x_5'^2 + x_6'^2}} = -\frac{\beta^2}{2L'^2}. \end{cases}$$

Forme de la fonction perturbatrice.

Nous distinguerons dans la fonction F quatre parties et nous poserons

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4.$$

Dans le cas (γ), où au lieu d'une seule fonction F on a à considérer les deux fonctions F_1 et F_2 , nous poserons

$$F_1 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4,$$

$$F_2 = f_1' + f_2' + f_3' + f_4'.$$

Le premier terme f_1 (ou f_1') sera le premier terme képlérien; f_2 sera le second terme képlérien, f_3 sera la partie principale de la fonction perturbatrice, f_4 sera la partie complémentaire de la fonction perturbatrice.

1° Dans l'hypothèse (α), nous aurons

$$F = T - U, \quad T = S \left[\frac{y_1'^2}{2m_1} + \frac{y_4'^2}{2m_4} + \frac{(y_1' + y_4')^2}{2m_7} \right].$$

Le signe S représente une sommation s'étendant aux trois axes des coordonnées, et je puis écrire également

$$T = S \left(\frac{y_1'^2}{2m_1} + \frac{y_4'^2}{2m_4} + \frac{y_1' y_4'}{m_7} \right);$$

en posant, pour abrégier,

$$m_1' = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \quad m_4' = \frac{m_4 m_7}{m_4 + m_7}.$$

Je poserai

$$\begin{aligned} f_1 &= S \frac{y_1'^2}{2m_1'} - \frac{m_1 m_7}{AC}; & f_2 &= S \frac{y_4'^2}{2m_4'} - \frac{m_4 m_7}{BC}; \\ f_3 &= - \frac{m_1 m_4}{AB}; & f_4 &= S \frac{y_1' y_4'}{m_7}. \end{aligned}$$

Si nous prenons

$$\beta = \frac{m_1 m_7}{\sqrt{m_1 + m_7}}, \quad \beta' = \frac{m_4 m_7}{\sqrt{m_4 + m_7}},$$

les équations (7) donneront

$$f_1 = - \frac{m_1 m_7}{2L^2}, \quad f_2 = - \frac{m_4 m_7}{2L'^2}.$$

2° Dans l'hypothèse (β), nous avons

$$T = S \left(\frac{y_1'^2}{2m_1} + \frac{y_4'^2}{2m_4} \right),$$

et nous poserons

$$\begin{aligned} f_1 &= S \frac{y_1'^2}{2m_1} - \frac{m_1 m_7}{AC}, & f_2 &= S \frac{y_4'^2}{2m_4} - \frac{m_4 m_7}{BD}, \\ f_3 &= - \frac{m_1 m_4}{AB}, & f_4 &= \frac{m_4 m_7}{BD} - \frac{m_4 m_7}{BC}. \end{aligned}$$

En prenant

$$\beta = \frac{m_1 m_7}{\sqrt{m_1 + m_7}}, \quad \beta' = \sqrt{m_4 m_4 m_7} = m_4 \sqrt{\frac{m_7(m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7}},$$

il viendra

$$f_1 = -\frac{m_1 m_7}{2L^2}, \quad f_2 = \frac{-m_4 m_7}{2L'^2}.$$

3° Dans l'hypothèse (γ), nous poserons

$$f_1 = f'_1 = S \frac{y_1'^2}{2m_1} - \frac{m_1(m_1 + m_7)}{AC},$$

$$f_2 = f'_2 = S \frac{y_4'^2}{2m_4} - \frac{m_4(m_4 + m_7)}{BC},$$

$$f_3 = f'_3 = -\frac{m_1 m_4}{AB}, \quad f_4 = \frac{m_1 m_4}{BC^3} Sx_1' x_4', \quad f'_4 = \frac{m_1 m_4}{AC^3} Sx_1' x_4'.$$

En prenant

$$\beta = m_1 \sqrt{m_1 + m_7}, \quad \beta' = m_4 \sqrt{m_4 + m_7},$$

il viendra

$$f_1 = f'_1 = \frac{-m_1(m_1 + m_7)}{2L^2}, \quad f_2 = f'_2 = \frac{-m_4(m_4 + m_7)}{2L'^2},$$

Première approximation. Nous regarderons la masse m_7 comme finie et les masses m_1 et m_4 comme très petites du premier ordre. Dans ces conditions β et β' sont du premier ordre, f_1 et f_2 sont du premier ordre; f_3 et f_4 (comme f'_4) sont du second ordre. On remarquera d'abord qu'aux quantités près du second ordre, les valeurs de $\frac{f_1}{\beta}$, $\frac{f_2}{\beta'}$, $\frac{f_3}{\beta}$, $\frac{f_4}{\beta'}$ sont les mêmes dans les trois hypothèses (α), (β) et (γ); à ce degré d'approximation, les équations différentielles auxquelles conduisent les trois hypothèses ne diffèrent que par les termes qui dépendent des dérivées de f_4 .

Soit

$$\phi = Sx_1' x_4' = x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6'.$$

La fonction ϕ sera une fonction des douze variables képlériennes dont le développement est connu et d'ailleurs relativement aisé à obtenir.

Si l'on observe d'autre part que

$$y_1 = \frac{\beta}{L^3} \frac{dx'_1}{dt}, \quad \frac{x'_1}{AC^3} = -\frac{1}{L^6} \frac{d^2 x'_1}{dt^2},$$

$$y'_4 = \frac{\beta'}{L'^3} \frac{dx'_4}{dt'}, \quad \frac{x'_4}{BC^3} = -\frac{1}{L'^6} \frac{d^2 x'_4}{dt'^2},$$

on aura donc:

Dans l'hypothèse (α)

$$f_4 = \frac{\beta\beta'}{m_1 L_3 L'_3} \frac{d^2 \psi}{dt dt'}$$

exactement;

Dans l'hypothèse (β)

$$f_4 = \frac{-m_1 m_4}{L'^6} \frac{d^2 \psi}{dt'^2}$$

aux quantités près du troisième ordre;

Dans l'hypothèse (γ)

$$f_4 = \frac{-m_1 m_4}{L'^6} \frac{d^2 \psi}{dt'^2}$$

exactement;

$$f'_4 = \frac{-m_1 m_4}{L'^6} \frac{d^2 \psi}{dt'^2}$$

exactement.

Tous ces développements de f_4 et de f'_4 se déduisent immédiatement les uns des autres. A ce degré d'approximation, les trois méthodes sont équivalentes au point de vue de la facilité du développement de la fonction perturbatrice.

D'autre part, si l'on ne tient compte que des perturbations du premier ordre, on n'est pas gêné par le fait que les équations (4) ne sont pas canoniques. Donc, à ce premier degré d'approximation, les trois méthodes se valent.

Deuxième approximation. Mais il n'en est plus de même si l'on veut tenir compte des perturbations du second ordre; la forme non canonique des équations (4) devient alors un grave inconvénient; d'un autre côté, le développement de la fonction perturbatrice auquel il n'y a rien

à changer dans les hypothèses (α) et (γ) devient très compliqué dans l'hypothèse (β) . Le changement de variables (α) que je propose prend alors un avantage marqué.

Il a toutefois son inconvénient propre, plus apparent que réel, au point de vue de l'osculution. Supposons que l'on veuille calculer la position de la planète A , par exemple, à l'aide des éléments osculateurs, à l'époque t . Si l'on définit ces éléments osculateurs comme on le fait dans les hypothèses (β) et (γ) , les coordonnées ainsi calculées sont exactes à l'époque t , et pour l'époque $t + \varepsilon$, l'erreur est de l'ordre de $\varepsilon^2\zeta$. Si on les définit comme dans l'hypothèse (α) , les coordonnées sont encore exactes pour l'époque t ; mais pour l'époque $t + \varepsilon$, l'erreur est de l'ordre de ε . Il ne faut pas s'exagérer cependant l'importance de cet inconvénient. Si ε est comparable à la durée de révolution, l'erreur est du même ordre de grandeur que celle qui est due aux perturbations; elle est du même ordre dans tous les cas. Si ε est très petit par rapport à la durée de révolution, la correction est extrêmement faible et de plus très facile.
