

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU PROBLÈME DES TROIS CORPS;

PAR M. H. POINCARÉ.

Je désire attirer l'attention sur quelques procédés d'intégration par approximations successives applicables aux équations du problème des trois corps. Le but que je me suis proposé, c'est d'exprimer les coordonnées des astres par des séries dont chaque terme est une fonction périodique du temps et, par conséquent, d'éviter que le temps sorte des signes trigonométriques.

Un mot d'abord d'une notation que j'emploierai dans la suite. Considérons une fonction φ de plusieurs arguments $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$, périodique de période 2π par rapport à chacun de ces arguments. Elle pourra être développée par la série de Fourier de telle façon que l'on aura

$$(1) \quad \varphi = \Sigma A \cos(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_q \omega_q + C).$$

Dans le terme général de la série (1), A et C sont des constantes quelconques et les m sont des coefficients entiers positifs, négatifs ou nuls.

Parmi les termes de la série (1), je distinguerai celui où tous les coefficients m sont nuls; c'est un terme constant, c'est la *valeur moyenne* de la fonction périodique φ ; je la désignerai par la notation

$$[\varphi].$$

Je vais maintenant, pour diviser la difficulté, traiter successivement une série de problèmes, de plus en plus compliqués, de façon à m'élever jusqu'au problème des trois corps.

PROBLÈME A.

Résoudre l'équation

$$a_1 \frac{dS}{d\omega_1} + a_2 \frac{dS}{d\omega_2} + \dots + a_q \frac{dS}{d\omega_q} = \Phi - C.$$

Φ est une fonction *connue* périodique par rapport aux ω .

Bulletin astronomique. T. XIV. (Juillet 1897.)

16

S est une fonction *inconnue* qui doit être périodique par rapport aux ω .

C est une constante *inconnue*.

Les a_i sont des coefficients constants donnés.

Soit, par la série de Fourier,

$$\begin{aligned}\Phi &= \Sigma A \cos(m_1 \omega_1 + \dots + m_q \omega_q + D), \\ S &= \Sigma B \sin(m_1 \omega_1 + \dots + m_q \omega_q + E).\end{aligned}$$

Les A et les D sont donnés, et il s'agit de déterminer C , les B et les E . Pour cela, il suffira de prendre

$$C = [\Phi],$$

et, pour chacun des termes de Φ autre que $[\Phi]$, c'est-à-dire pour chacune des combinaisons des coefficients m , où tous ces coefficients ne sont pas nuls à la fois,

$$E = D, \quad B = \frac{A}{m_1 a_1 + \dots + m_q a_q}.$$

Cela est possible, pourvu qu'aucun des diviseurs

$$m_1 a_1 + \dots + m_q a_q$$

ne soit nul, c'est-à-dire pourvu qu'il n'y ait entre les coefficients a aucune relation linéaire à coefficients entiers.

PROBLÈME B.

Soit F une fonction développable suivant les puissances d'un paramètre très petit μ et dépendant de deux séries de variables

$$\begin{aligned}x_1, & x_2, \dots, x_q, \\ y_1, & y_2, \dots, y_q.\end{aligned}$$

On aura donc

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

F_0 ne dépend que des x ; les autres termes $\mu^k F_k$ dépendent à la fois des x et des y , mais sont périodiques de période 2π par rapport aux y .

Il s'agit d'intégrer les équations canoniques

$$(3) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

L'importance de ce problème est évidente; à chaque instant, en Mécanique céleste, on est amené à des équations de cette forme; je n'en citerai qu'un exemple; supposons que l'un des trois corps ait une masse nulle et que les deux autres décrivent deux circonférences concentriques, supposons enfin que les trois corps se meuvent dans un même plan. On arrivera précisément à des équations de la forme (3), en prenant pour variables x_1 et x_2 la racine du grand axe de la planète troublée et sa constante des aires; pour variables y_1 et y_2 , l'anomalie moyenne de la planète troublée et la différence entre la longitude du périhélie de la planète troublée et la longitude de la planète troublante.

Je me propose de trouver des solutions de la forme suivante: les x_i et les y_i seront développés suivant les puissances des μ , de sorte qu'on aura

$$(4) \quad \begin{cases} x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \dots = \Sigma \mu^p x_i^p, \\ y_i = y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \dots = \Sigma \mu^p y_i^p. \end{cases}$$

Dans μ^p , la lettre p représente un exposant; mais, dans x_i^p et y_i^p , elle représente un indice.

Les fonctions x_i^p et y_i^p devront dépendre de q constantes d'intégration

$$z_1, z_2, \dots, z_q$$

et de q arguments

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q,$$

qui seront des fonctions linéaires du temps, de telle façon que l'on ait

$$\omega_k = n_k t + \varpi_k,$$

les n_k étant des constantes déterminées et les ϖ_k de nouvelles constantes d'intégration.

Je supposerai que x_i^0 se réduit à la constante z_i et y_i^0 à ω_i ; que les autres x_i^p et y_i^p sont des fonctions périodiques des q arguments ω .

Il s'agit d'intégrer les équations (3) par des séries de la

forme (4), ou, ce qui revient au même, de déterminer les séries (4), de telle façon qu'en supposant les variables anciennes x et y liées aux variables nouvelles z et w par les relations (4), les équations (3) deviennent

$$\frac{dz_i}{dt} = 0, \quad \frac{dw_i}{dt} = \text{const.}$$

Or je dis que pour cela il suffit :

1° Qu'en substituant dans F , à la place des x et des y , leurs valeurs (4) en fonction des z et des w , cette fonction F se réduise à une fonction φ dépendant seulement des z et indépendante des w ; je supposerai cette fonction φ développée suivant les puissances de μ , de telle sorte que

$$\varphi = \varphi_0 + \mu\varphi_1 + \dots;$$

nous devons avoir alors

$$(5) \quad F = \varphi_0 + \mu\varphi_1 + \dots;$$

2° Que l'expression

$$dS = \Sigma(x_i - z_i) dy_i + \Sigma(w_i - y_i) dz_i$$

soit une différentielle exacte.

Si en effet dS est une différentielle exacte, il en sera de même de

$$\Sigma x dy - \Sigma z dw.$$

Donc, en prenant pour variables nouvelles les w et les z , on n'altérera pas la forme canonique des équations qui s'écriront

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} &= \frac{dF}{dw_i} = \frac{d\varphi}{dw_i} = 0 && (\text{d'où } z_i = \text{const.}), \\ \frac{dw_i}{dt} &= -\frac{dF}{dz_i} = -\frac{d\varphi}{dz_i}. \end{aligned}$$

La dérivée $\frac{d\varphi}{dz_i}$ ne dépend que des z qui sont des constantes. C'est donc une constante.

C. Q. F. D.

Cela posé, substituons dans F , à la place des x_i et des y_i , leurs valeurs (4). Alors F se trouvera développé suivant les puissances de μ , des x_i^p et des y_i^p et les coefficients de développement seront des fonctions des x_i^0 et des y_i^0 , c'est-à-dire des z_i et des w_i , périodiques par rapport aux w_i .

Ordonnons les termes de ce nouveau développement de F suivant les puissances de μ , nous trouverons

$$F = \theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \dots$$

L'équation (5) se décomposera et nous donnera

$$\theta_0 = \varphi_0, \quad \theta_1 = \varphi_1, \quad \theta_2 = \varphi_2, \quad \dots,$$

θ_0 n'est autre chose que F_0 où les x_i ont été remplacés par les constantes z_i : c'est donc une constante, de sorte que l'équation $\theta_0 = \varphi_0$, où φ_0 est une fonction indéterminée des z_i , se trouvera satisfaite d'elle-même.

Nous poserons

$$a_i = - \frac{d\theta_0}{dz_i}.$$

Les a_i étant des fonctions des z_i seront des constantes.

Développons S suivant les puissances de μ

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots$$

L'expression de dS nous montre tout de suite que S_0 est nul et que

$$dS_1 = \Sigma(x_i^1 dw_i - y_i^1 dz_i),$$

d'où

$$x_i^1 = \frac{dS_1}{dw_i}.$$

D'autre part, on a

$$\theta_1 = - \Sigma a_i x_i^1 + \Phi,$$

Φ n'est autre chose que F_1 où l'on a remplacé x_i et y_i par z_i et w_i ; c'est donc une fonction connue périodique.

Dans ce qui va suivre, je conviendrai de représenter par une même notation Φ toute fonction connue périodique.

Cette même lettre Φ pourra donc représenter plusieurs fonctions différentes.

L'équation $\theta_1 = \varphi_1$ s'écrit alors

$$\Sigma a_i \frac{dS_1}{dw_i} = \Phi - \varphi_1;$$

S_1 est une fonction périodique inconnue; φ_1 est une constante inconnue (constante puisqu'elle ne dépend que des z_i).

Nous pourrions donc intégrer cette équation par le procédé A, je veux dire par le procédé qui nous a permis de résoudre le problème A.

Connaissant S_1 , nous aurons x_i^1 et y_i^1 par les équations

$$x_i^1 = \frac{dS_1}{dw_i}, \quad y_i^1 = -\frac{dS_1}{dz_i}.$$

Il vient ensuite

$$(6) \quad dS_2 = \Sigma (x_i^2 dw_i + x_i^1 dy_i^1 - y_i^2 dz_i),$$

d'où

$$(7) \quad x_i^2 = \frac{dS_2}{dw_i} - \Sigma x_k^1 \frac{dy_k^1}{dw_i} = \frac{dS_2}{dw_i} + \Phi.$$

D'autre part, on aura

$$(8) \quad \Theta_2 = -\Sigma a_i x_i^2 + \Phi,$$

la fonction Φ ne dépendant que des $x_i^0, y_i^0, x_i^1, y_i^1$ et étant par conséquent désormais connue.

La combinaison des équations (7) et (8) nous donnerait, en tenant compte de $\Theta_2 = \varphi_2$,

$$(9) \quad \Sigma a_i \frac{dS_2}{dw_i} = \Phi - \varphi_2,$$

qui s'intégrera par le procédé A.

Connaissant S_2 , nous aurons x_i^2 et y_i^2 par les équations

$$(7 \text{ bis}) \quad x_i^2 = \frac{dS_2}{dw_i} + \Phi, \quad y_i^2 = -\frac{dS_2}{dz_i} + \Phi.$$

Nous déterminerions ensuite S_3, x_i^3 et y_i^3 par des équations analogues aux équations (7 bis), (8) et (9) et qui n'en différeraient que parce que l'indice 2 serait remplacé par l'indice 3. Les fonctions Φ , qui figureraient dans ces nouvelles équations, pourraient être regardées comme connues parce qu'elles ne dépendraient que des $x_i^0, y_i^0, x_i^1, y_i^1, x_i^2, y_i^2$.

Et ainsi de suite.

Le problème B peut donc être regardé comme résolu.

Le procédé que je viens d'exposer n'est pas identique à celui que j'ai développé dans le Chapitre XV des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*; il présente certains avantages que la comparaison des deux procédés ferait mieux ressortir.

PROBLÈME C.

F_2 étant un polynôme homogène du second degré, par rapport aux x et aux y , intégrer les équations canoniques

$$(10) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF_2}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF_2}{dx_i} \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Ces équations sont linéaires et à coefficients constants. Elles admettront donc $2q$ solutions de la forme

$$x_i = \alpha_i^k e^{\lambda_k t}, \quad y_i = \beta_i^k e^{\lambda_k t};$$

cherchons à déterminer les constantes α_i^k , β_i^k et λ_k de façon à satisfaire aux équations; il viendra

$$\lambda_k \alpha_i^k = \frac{dF_2}{d\beta_i^k}, \quad -\lambda_k \beta_i^k = \frac{dF_2}{d\alpha_i^k}.$$

Je suppose, bien entendu, en écrivant ces équations, que dans F_2 les variables x_i et y_i ont été remplacées par α_i^k et β_i^k .

Entre ces $2q$ équations (qui sont linéaires et homogènes, par rapport aux α et aux β) j'élimine les $2q$ quantités α et β . J'obtiens une équation de degré $2q$ en λ_k , dont les racines seront deux à deux égales et de signe contraire.

Si la forme quadratique F_2 est définie positive, les racines λ_k sont purement imaginaires, de sorte que λ_k et $-\lambda_k$ sont imaginaires conjuguées.

Soit maintenant μ_k une autre racine de l'équation en λ_k et

$$x_i = \gamma_i^k e^{\mu_k t}, \quad y_i = \delta_i^k e^{\mu_k t}$$

la solution correspondante des équations (10). Posons

$$\begin{aligned} \xi_i &= \alpha_i^k e^{\lambda_k t}, & \eta_i &= \beta_i^k e^{\lambda_k t}, \\ \xi'_i &= \gamma_i^k e^{\mu_k t}, & \eta'_i &= \delta_i^k e^{\mu_k t}. \end{aligned}$$

Comme $x_i = \xi_i$, $y_i = \eta_i$ d'une part; $x_i = \xi'_i$, $y_i = \eta'_i$ d'autre part, sont deux solutions des équations (10), il est aisé de vérifier qu'on aura

$$\Sigma(\xi_i \eta'_i - \eta_i \xi'_i) = \text{const.}$$

Comme, d'autre part, le premier membre est divisible par $e^{(\lambda_k + \mu_k)t}$, la constante du second membre doit être nulle, à moins

que $\mu_k = -\lambda_k$. Si $\mu_k = -\lambda_k$, nous ne restreindrons pas la généralité en supposant que cette constante est égale à 1.

Soient alors a_i^k, b_i^k les valeurs de γ_i^k, δ_i^k correspondant à cette racine $\mu_k = -\lambda_k$. Si la forme F_2 est définie positive, nous pouvons supposer que α_i^k et $\sqrt{-1} a_i^k, \beta_i^k$ et $\sqrt{-1} b_i^k$ sont imaginaires conjugués.

Posons alors

$$(11) \quad \begin{cases} x_i = \sum_{k=1}^q \alpha_i^k x'_k + \sum a_i^k y'_k, \\ y_i = \sum \beta_i^k x'_k + \sum b_i^k y'_k; \end{cases}$$

il vient

$$\Sigma(x_i dy_i - y_i dx_i) = \Sigma(x'_k dy'_k - y'_k dx'_k).$$

Cette équation exprime que

$$\Sigma x dy - \Sigma x' dy'$$

est une différentielle exacte, et que, en passant des variables x, y aux variables x', y' , on n'altère pas la forme canonique des équations.

Les équations (10) deviendront donc

$$\frac{dx'_k}{dt} = \frac{dF_2}{dy'_k}, \quad \frac{dy'_k}{dt} = -\frac{dF_2}{dx'_k}$$

et comme elles doivent avoir pour intégrales

$$x'_k = e^{\lambda_k t}, \quad y'_k = e^{-\lambda_k t}$$

nous aurons

$$(12) \quad F_2 = \sum_{k=1}^q \lambda_k x'_k y'_k.$$

D'autre part, comme $\Sigma(x dy - x' dy')$ est une différentielle exacte on aura identiquement

$$\Sigma \left(\frac{dF_2}{dx_i} \frac{dR}{dy_i} - \frac{dR}{dx_i} \frac{dF_2}{dy_i} \right) = \Sigma \left(\frac{dF_2}{dx'_i} \frac{dR}{dy'_i} - \frac{dR}{dx'_i} \frac{dF_2}{dy'_i} \right).$$

Le second membre se réduit à

$$(13) \quad \Sigma \lambda_k \left(y'_k \frac{dR}{dy'_k} - x'_k \frac{dR}{dx'_k} \right).$$

Si R est un polynome entier par rapport aux x et aux y , et par conséquent aussi par rapport aux x' et aux y' , si de plus il n'y a entre les λ_k aucune relation linéaire à coefficients entiers, la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression (13) s'annule, c'est que R soit un polynome entier par rapport aux q expressions $\lambda_k x'_k y'_k$. Remarquons que ces q expressions dont la somme est égale à F_2 , sont q polynomes homogènes du second degré par rapport aux x et aux y . Ces q polynomes sont réels et toujours positifs, si la forme F_2 est définie positive.

PROBLÈME D.

Résoudre l'équation

$$(14) \quad \sum_{k=1}^q \lambda_k \left(y_k \frac{dS}{dy_k} - x_k \frac{dS}{dx_k} \right) = P - Q$$

où P est un polynome *connu* homogène de degré p par rapport aux $2q$ variables x et y .

S est un polynome *inconnu* homogène de degré p par rapport aux x et aux y .

Q est un polynome *inconnu* homogène de degré $\frac{p}{2}$ par rapport aux q produits xy .

Soient

$$\begin{aligned} P &= \Sigma A x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \dots x_q^{\alpha_q} y_q^{\beta_q}, \\ S &= \Sigma B x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \dots x_q^{\alpha_q} y_q^{\beta_q}, \\ Q &= \Sigma C (x_1 y_1)^{\alpha_1} (x_2 y_2)^{\alpha_2} \dots (x_q y_q)^{\alpha_q}. \end{aligned}$$

Nous résoudrons l'équation (14) en prenant

$$B = \frac{A}{\Sigma \lambda_k (\alpha_k - \beta_k)}$$

si l'on n'a pas à la fois

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_q = \beta_q$$

et $C = A$ si l'on a à la fois

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_q = \beta_q.$$

La solution est possible pourvu que les λ_k ne soient liés par aucune relation linéaire à coefficients entiers.

Remarquons que Q est identiquement nul si p est impair.

PROBLÈME E.

Résoudre les équations

$$(15) \quad \begin{cases} \sum \left(\frac{dF_2}{dx_i} \frac{dS}{dy_i} - \frac{dF_2}{dy_i} \frac{dS}{dx_i} \right) = P - Q, \\ \sum \left(\frac{dF_2}{dx_i} \frac{dQ}{dy_i} - \frac{dF_2}{dy_i} \frac{dQ}{dx_i} \right) = 0, \end{cases}$$

où F_2 est un polynome homogène *donné* du deuxième degré par rapport aux x et aux y , P un polynome homogène *connu* de degré p , S et Q deux polynomes homogènes *inconnus* de degré p .

Faisons le changement de variables (11), les équations (15) deviendront

$$\begin{aligned} \sum \lambda_k \left(y'_k \frac{dS}{dy'_k} - x'_k \frac{dS}{dx'_k} \right) &= P - Q, \\ \sum \lambda_k \left(y'_k \frac{dQ}{dy'_k} - x'_k \frac{dQ}{dx'_k} \right) &= 0. \end{aligned}$$

La seconde de ces équations signifiera que Q est un polynome entier par rapport aux produits $x'_k y'_k$. Nous sommes donc ramenés au problème précédent.

Le problème sera donc possible pourvu qu'il n'y ait entre les λ_k aucune relation linéaire à coefficients entiers. Q est nul, si p est impair.

PROBLÈME F.

La fonction F est une série ordonnée suivant les puissances croissantes des x et des y et commençant par des termes du deuxième degré, soit

$$F = F_2 + F_3 + F_4 + \dots,$$

F_p désignant l'ensemble des termes d'ordre p .

Il s'agit d'intégrer les équations canoniques

$$(16) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

Voici dans quelles circonstances on rencontrera ce problème. On a cherché à étudier les variations séculaires des éléments des planètes de la manière suivante. On a écrit les équations des perturbations en supprimant dans la fonction perturbatrice tous les termes périodiques, et l'on s'est proposé d'intégrer les équations ainsi simplifiées que j'appellerai *équations aux variations séculaires*. On sait que Lagrange a effectué cette intégration en ne conservant dans la fonction perturbatrice que les termes du deuxième degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Les équations étaient alors linéaires et à coefficients constants. Ce n'était d'ailleurs autre chose que notre problème C.

Plus tard, Le Verrier a tenu compte des termes du quatrième degré, Cellérier de ceux du sixième degré. Le procédé que je vais exposer amène, dans ces calculs, une simplification importante et permet de tenir compte de toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons.

Et, en effet, si les variables sont convenablement choisies, les équations aux variations séculaires sont précisément de la forme (16).

Je me propose d'exprimer les x et les y en fonctions de q constantes ρ_k et de q arguments ω_k qui seront des fonctions linéaires du temps. Je m'arrangerai pour que les x et les y soient développables suivant les puissances des quantités

$$\rho_k e^{\omega_k \sqrt{-1}}, \quad \rho_k e^{-\omega_k \sqrt{-1}}.$$

Soient

$$(17) \quad \begin{cases} x_i = x_i^1 + x_i^2 + \dots, \\ y_i = y_i^1 + y_i^2 + \dots \end{cases}$$

ces développements où x_i^p et y_i^p représentent l'ensemble des termes de degré p par rapport aux ρ_k .

Je dis que le problème équivaut au suivant :

Déterminer les séries (17) de telle façon : 1° qu'en y substituant, à la place des x et des y , ces développements (17), F se réduise à une fonction φ dépendant seulement des ρ et indépendante des ω ;

2° Que

$$dS = \Sigma (x_i - x_i^1) dy_i + (y_i^1 - y_i) dx_i^1$$

et

$$dT = \Sigma x_i^1 dy_i^1 + \sqrt{-1} \Sigma \rho_k^2 d\omega_k$$

soient des différentielles exactes.

S'il en est ainsi, en effet,

$$\Sigma x_i dy_i + \sqrt{-1} \Sigma \rho_k^2 d\omega_k$$

sera une différentielle exacte. La forme canonique des équations ne sera donc pas altérée quand on passera des variables x et y aux variables ρ_k^2 et $-\sqrt{-1} \omega_k$; elles deviendront donc

$$\frac{d(\rho_k^2)}{dt} = \frac{-dF}{\sqrt{-1} d\omega_k} = \frac{-d\varphi}{\sqrt{-1} d\omega_k} = 0 \quad (\text{d'où } \rho_k = \text{const.}),$$

$$\sqrt{-1} \frac{d\omega_k}{dt} = + \frac{dF}{d(\rho_k^2)} = + \frac{d\varphi}{d(\rho_k^2)} = \text{const.},$$

ce qui montre que les ω sont des fonctions linéaires du temps.

Substituons dans F les développements (17) et ordonnons suivant les puissances des ρ ; nous aurons

$$F = \Theta_2 + \Theta_3 + \dots$$

pour le développement de F et

$$\varphi = \varphi_2 + \varphi_3 + \dots$$

pour celui de φ et, comme on doit avoir $F = \varphi$, nous aurons

$$\Theta_2 = \varphi_2, \quad \Theta_3 = \varphi_3, \quad \dots$$

Θ_2 n'est autre chose que F_2 où x_i et y_i sont remplacés par x_i^1, y_i^1 . Si donc, employant le procédé C, nous faisons le changement de variables (11) en posant

$$\begin{aligned} x_i^1 &= \Sigma a_i^k \rho_k e^{\omega_k \sqrt{-1}} - \sqrt{-1} \Sigma a_i^k \rho_k e^{-\omega_k \sqrt{-1}}, \\ y_i^1 &= \Sigma \beta_i^k \rho_k e^{\omega_k \sqrt{-1}} - \sqrt{-1} \Sigma \beta_i^k \rho_k e^{-\omega_k \sqrt{-1}}, \end{aligned}$$

l'expression

$$\Sigma x_i^1 y_i^1 + \sqrt{-1} \Sigma \rho_k^2 d\omega_k$$

sera une différentielle exacte et

$$\Theta_2 = F_2(x_i^1, y_i^1)$$

se réduira, en vertu de l'équation (12), à

$$-\sqrt{-1} \Sigma \lambda_k \rho_k^2,$$

de sorte que l'équation $\Theta_2 = \varphi_2$ se trouvera satisfaite. Soit

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots$$

le développement de S suivant les puissances des ρ . J'observe d'abord que les premiers termes S_0 , S_1 et S_2 sont nuls et que l'on a

$$dS_3 = \Sigma x_i^2 dy_i^1 - \Sigma y_i^2 dx_i^1.$$

D'autre part,

$$\Theta_3 = \Sigma \left(\frac{d\Theta_2}{dx_i^1} x_i^2 + \frac{d\Theta_2}{dy_i^1} y_i^1 \right) + \Phi,$$

Φ étant une fonction connue puisque x_i^1 et y_i^1 sont désormais connus. Comme l'on a

$$(18) \quad x_i^2 = \frac{dS_3}{dy_i^1}, \quad y_i^2 = -\frac{dS_3}{dx_i^1},$$

l'équation $\Theta_3 = \varphi_3$ devient

$$(19) \quad \Sigma \left(\frac{d\Theta_2}{dx_i^1} \frac{dS_3}{dy_i^1} - \frac{d\Theta_2}{dy_i^1} \frac{dS_3}{dx_i^1} \right) = -\Phi + \varphi_3.$$

D'autre part, φ_3 ne dépendant que des ρ , on aura

$$(20) \quad \Sigma \left(\frac{d\Theta_2}{dx_i^1} \frac{d\varphi_3}{dy_i^1} - \frac{d\Theta_2}{dy_i^1} \frac{d\varphi_3}{dx_i^1} \right) = 0;$$

ces équations, analogues aux équations (15), s'intégreront par le procédé E, ce qui donne S_3 ; les équations (18) donneront ensuite x_i^2 et y_i^2 .

On trouve ensuite

$$dS_4 = \Sigma (x_i^3 dy_i^1 + x_i^2 dy_i^2 - y_i^3 dx_i^1),$$

d'où, puisque x_i^2 et y_i^2 sont désormais connus,

$$(18 \text{ bis}) \quad x_i^3 = \frac{dS_4}{dy_i^1} + \Phi, \quad y_i^3 = -\frac{dS_4}{dx_i^1} + \Phi.$$

On obtient ainsi deux équations analogues aux équations (19) et (20) et qui n'en diffèrent que parce que l'indice 3 y est remplacé par l'indice 4. Ces équations s'intégreront par le procédé E, ce qui donnera S_4 , et ensuite, par (18 bis), x_i^3 et y_i^3 et ainsi de suite.

PROBLÈME G.

La fonction F a la même signification que dans le problème précédent.

Trouver $2q$ fonctions ξ_i et η_i des x_i et des y_i , telles que l'on ait

$$(21) \quad \begin{cases} \sum \left(\frac{dF}{dx_i} \xi_i + \frac{dF}{dy_i} \eta_i \right) = P - Q, \\ \sum \left(\frac{dF_2}{dx_i} \frac{dQ}{dy_i} - \frac{dF_2}{dy_i} \frac{dQ}{dx_i} \right) = 0 \end{cases}$$

et que

$$dS = \Sigma (\xi_i dy_i - \eta_i dx_i)$$

soit une différentielle exacte.

P représente une fonction connue, Q une fonction inconnue; toutes deux doivent être développables suivant les puissances des x et des y .

Je veux également que ξ , η et S soient développables de la même manière; et j'écris les développements de ces cinq fonctions sous la forme

$$(22) \quad \begin{cases} \xi_i = \Sigma \xi_i^p, & \eta_i = \Sigma \eta_i^p, & P = \Sigma P_p, \\ & Q = \Sigma Q_p, & S = \Sigma S_p. \end{cases}$$

Je substitue dans les équations (21) les développements (22); j'égale les termes du premier degré, et j'ai les équations

$$(23) \quad \begin{cases} \sum \left(\frac{dF_2}{dx_i} \xi_i^0 + \frac{dF_2}{dy_i} \eta_i^0 \right) = P_1 - Q_1, \\ \sum \left(\frac{dF_2}{dx_i} \frac{dQ_1}{dy_i} - \frac{dF_2}{dy_i} \frac{dQ_1}{dx_i} \right) = 0, \\ dS_1 = \sum (\xi_i^0 dy_i - \eta_i^0 dx_i), \\ \xi_i^0 = \frac{dS_1}{dy_i}, \quad \eta_i^0 = -\frac{dS_1}{dx_i}, \\ \sum \left(\frac{dF_2}{dx_i} \frac{dS_1}{dy_i} - \frac{dF_2}{dy_i} \frac{dS_1}{dx_i} \right) = P_1 - Q_1, \end{cases}$$

équations qui, par le procédé E, donnent S_1 , ξ_i^0 et η_i^0 .

En égalant de même les termes du deuxième degré, j'obtiens

$$(24) \quad \begin{cases} \sum \left(\frac{dF_2}{dx_i} \xi_i^1 + \frac{dF_2}{dy_i} \eta_i^1 \right) = \Phi - Q_2, \\ \sum \left(\frac{dF_2}{dx_i} \frac{dQ_2}{dy_i} - \frac{dF_2}{dy_i} \frac{dQ_2}{dx_i} \right) = 0, \\ dS_2 = \sum (\xi_i^1 dy_i - \eta_i^1 dx_i), \\ \sum \left(\frac{dF_2}{dx_i} \frac{dS_2}{dy_i} - \frac{dF_2}{dy_i} \frac{dS_2}{dx_i} \right) = \Phi - Q_2, \end{cases}$$

qui, par le procédé E, donnent S_2 , ξ_i^1 et η_i^1 ; et ainsi de suite.

Remarquons que, d'après ce que nous avons dit à propos du problème E, la fonction Q_p est nulle si l'indice p est impair, de même que la fonction φ_p du problème précédent.

PROBLÈME H.

Il n'y aurait rien à changer à l'analyse qui précède si les équations (21) étaient remplacées par les suivantes

$$21 \text{ bis) } \left\{ \begin{array}{l} \sum \left(\frac{dF}{dx_i} \xi_i + \frac{dF}{dy_i} \eta_i \right) + \Sigma(A_i \xi_i + B_i \eta_i) = P - Q, \\ \sum \left(\frac{dF_2}{dx_i} \frac{dQ}{dy_i} - \frac{dF_2}{dy_i} \frac{dQ}{dx_i} \right) = 0, \end{array} \right.$$

et si l'expression dS , qui doit être différentielle exacte, s'écrivait

$$dS = \Sigma(\xi_i dy_i - \eta_i dx_i) + \Sigma(\xi_i dC_i - \eta_i dD_i),$$

où A_i, B_i, C_i, D_i sont des fonctions *connues* des x et des y , développables suivant les puissances de ces variables, *le développement commençant par des termes du deuxième degré.*

En y substituant les développements (22) et égalant les termes du premier degré, on retrouverait les équations (23).

En égalant ensuite les termes du deuxième degré, on retrouverait les deux premières équations (24), car le terme

$$\Sigma(A_i \xi_i^0 + B_i \eta_i^0),$$

qu'il faudrait ajouter dans la première d'entre elles, est maintenant connu, puisque ξ_i^0 et η_i^0 ont été préalablement déterminés par les équations (23). Il peut donc rentrer dans Φ .

La troisième équation (24) deviendrait

$$dS_2 = \Sigma(\xi_i^1 dy_i - \eta_i^1 dx_i) + \Sigma(\xi_i^0 dC_i - \eta_i^0 dD_i),$$

d'où

$$\frac{dS_2}{dy_i} = \xi_i^1 + \Phi, \quad \frac{dS_2}{dx_i} = -\eta_i^1 + \Phi.$$

On retrouverait donc la quatrième équation (24) et le calcul continuerait comme dans le problème G.

Signification du problème H.

Voici comment on peut être conduit à se poser les problèmes G et H.

Reprenons les équations (16) et remplaçons-y F par $F - \varepsilon P$, où ε est une quantité très petite, dont on peut négliger le carré, et P, une sorte de fonction perturbatrice.

Remplaçons de même dans ces équations x_i et y_i par $x_i + \varepsilon \xi_i$, $y_i + \varepsilon \eta_i$.

Les équations s'écriront alors

$$(16 \text{ bis}) \quad \frac{d(x_i + \varepsilon \xi_i)}{dt} = \frac{d(F - \varepsilon P)}{d(y_i + \varepsilon \eta_i)}, \quad \frac{d(y_i + \varepsilon \eta_i)}{dt} = - \frac{d(F - \varepsilon P)}{d(x_i + \varepsilon \xi_i)}.$$

Nous avons remplacé les équations (16) par les suivantes

$$F = \varphi,$$

$$dS = \Sigma[(x_i - x_i^1) dy_i + (y_i^1 - y_i) dx_i^1].$$

La première de ces équations va devenir

$$F - \varepsilon P = \varphi - \varepsilon Q,$$

Q étant une fonction qui comme φ ne doit dépendre que des p ; de sorte que la fonction $\varphi - \varepsilon Q$ pourra jouer le même rôle que φ .

Le premier membre de cette équation pourra, en négligeant les quantités de l'ordre de ε^2 , s'écrire

$$F + \varepsilon \sum \left(\frac{dF}{dx_i} \xi_i + \frac{dF}{dy_i} \eta_i \right) - \varepsilon P,$$

en supposant que dans P, F et ses dérivées, $x_i + \varepsilon \xi_i$ et $y_i + \varepsilon \eta_i$ sont remplacés par x_i et y_i .

Nous aurons donc, en égalant les coefficients de ε ,

$$\sum \left(\frac{dF}{dx_i} \xi_i + \frac{dF}{dy_i} \eta_i \right) = P - Q,$$

où l'on reconnaît la première équation (21).

En changeant maintenant x_i , y_i , S en $x_i + \varepsilon \xi_i$, $y_i + \varepsilon \eta_i$,

$S + \varepsilon U$, nous trouvons

$$d(S + \varepsilon U) = \Sigma[(x_i + \varepsilon \xi_i - x_i^1) d(y_i + \varepsilon \eta_i) + (y_i^1 - y_i - \varepsilon \eta_i) dx_i^1].$$

En négligeant ε^2 et en posant

$$U = S' - \Sigma \eta_i (x_i^1 - x_i),$$

il viendra

$$dS' = \Sigma(\xi_i dy_i - \eta_i dx_i).$$

Maintenant nous savons que x_i et y_i sont développables suivant les puissances des x_i^1 et des y_i^1 .

Prenons les x_i^1 et les y_i^1 comme variables indépendantes, il viendra

$$\frac{dF}{dx_i} = \frac{dF}{dx_i^1} + A_i, \quad \frac{dF}{dy_i} = \frac{dF}{dy_i^1} + B_i,$$

$$x_i = x_i^1 + D_i, \quad y_i = y_i^1 + C_i,$$

où les développements des A_i , B_i , C_i , D_i suivant les puissances des x_i^1 et y_i^1 commencent par des termes du second degré.

Nous aurons donc

$$\Sigma \left(\frac{dF}{dx_i^1} \xi_i + \frac{dF}{dy_i^1} \eta_i \right) + \Sigma (A_i \xi_i + B_i \eta_i) = P - Q,$$

$$dS' = \Sigma(\xi_i dy_i^1 - \eta_i dx_i^1) + \Sigma(\xi_i dC_i - \eta_i dD_i),$$

et comme Q ne doit dépendre que des ρ

$$\Sigma \left(\frac{dF_2}{dx_i^1} \frac{dQ}{dy_i^1} - \frac{dF_2}{dy_i^1} \frac{dQ}{dx_i^1} \right) = 0.$$

Nous reconnaissons les équations (21 bis). Ainsi le problème H revient à l'intégration des équations (16 bis) en supposant ε très petit.

Les équations (16 bis) étant de même forme que les équations (16) (sauf la présence possible de termes du premier degré dans P), il n'est pas étonnant que l'on puisse résoudre le problème H et trouver pour les inconnues ξ_i et η_i des développements procédant suivant les puissances des x_k^1 et des y_k^1 et, par conséquent, des $\rho_k e^{\pm \omega_k \sqrt{-1}}$.

Je suis maintenant en mesure d'aborder le problème des trois corps dans toute sa généralité, et c'est ce que je vais faire en combinant les divers procédés que je viens d'exposer.

Choix des variables.

Soient a, e, i, ϖ, Ω et l le grand axe, l'excentricité, l'inclinaison, la longitude du périhélie, celle du nœud et la longitude moyenne pour la première planète; désignons les mêmes éléments pour la seconde planète par les mêmes lettres accentuées. Soient β et β' deux coefficients numériques convenablement choisis (ces coefficients ont été définis dans le *Bulletin astronomique*, février 1897) et choisissons pour variables

$$\begin{aligned} \beta \sqrt{a} &= X_1, & \beta' \sqrt{a'} &= X_2, & l &= Y_1, & l' &= Y_2, \\ \sqrt{2\beta \sqrt{a}(1-\sqrt{1-e^2})} \cos \varpi &= x_1, & -\sqrt{2\beta \sqrt{a}(1-\sqrt{1-e^2})} \sin \varpi &= y_1, \\ \sqrt{2\beta' \sqrt{a'}(1-\sqrt{1-e'^2})} \cos \varpi' &= x_2, & -\sqrt{2\beta' \sqrt{a'}(1-\sqrt{1-e'^2})} \sin \varpi' &= y_2, \\ \sqrt{2\beta \sqrt{a}(1-e^2)(1-\cos i)} \cos \Omega &= x_3, & -\sqrt{2\beta \sqrt{a}(1-e^2)(1-\cos i)} \sin \Omega &= y_3, \\ \sqrt{2\beta' \sqrt{a'}(1-e'^2)(1-\cos i')} \cos \Omega' &= x_4, & -\sqrt{2\beta' \sqrt{a'}(1-e'^2)(1-\cos i')} \sin \Omega' &= y_4. \end{aligned}$$

Les équations du mouvement prennent alors la forme canonique et s'écrivent

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{dX_i}{dt} = \frac{dF}{dY_i}, & \frac{dY_i}{dt} = -\frac{dF}{dX_i}, \\ \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, & \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \end{cases}$$

La fonction F est développable suivant les puissances des masses; pour mettre ce fait en évidence, nous introduirons un coefficient μ de l'ordre des masses; chaque masse sera égale à μ multiplié par une quantité finie et F sera développable suivant les puissances de μ sous la forme

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

F_0 dépendra des X et sera indépendante des Y , des x et des y .

Les autres fonctions F_1, F_2 dépendront de toutes les variables. Par rapport aux Y , ce seront des fonctions périodiques; de plus, elles seront développables suivant les puissances des x et des y .

F_1 étant une fonction périodique des Y , je puis considérer sa valeur moyenne $[F_1]$ définie comme au début de ce travail. Je poserai

$$[F_1] = R.$$

R sera développable suivant les puissances des x et des y et j'aurai

$$R = R_0 + R_2 + R_4 + \dots,$$

R_p étant l'ensemble des termes d'ordre p . Il n'y a d'ailleurs que des termes d'ordre pair.

C'est R_2 qui jouera le rôle que jouait F_2 dans les problèmes E, F, G,

Forme de la solution.

Nous allons chercher à exprimer nos variables en fonctions de six constantes

$$z_1, z_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$$

et de six arguments fonctions linéaires du temps

$$\omega_1, \omega_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4.$$

Nous verrons que les ϖ varient très rapidement et les ω très lentement, et même que ω_4 se réduit à une constante.

Nos variables devront se développer suivant les puissances de μ

$$(26) \quad \begin{cases} X_i = X_i^0 + \mu X_i^1 + \dots = \Sigma \mu^p X_i^p, \\ Y_i = \Sigma \mu^p Y_i^p, \quad x_i = \Sigma \mu^p x_i^p, \quad y_i = \Sigma \mu^p y_i^p. \end{cases}$$

Voici quelle sera la forme de ces développements : toutes les fonctions $X_i^p, Y_i^p, x_i^p, y_i^p$ ($p > 0$) seront des fonctions des ϖ , développables d'autre part suivant les puissances des

$$\rho_k e^{\omega_k \sqrt{-1}}, \quad \rho_k e^{-\omega_k \sqrt{-1}}.$$

Elles dépendront en outre des z d'une manière quelconque.

On aura

$$X_i^0 = z_i.$$

Enfin les $Y_i^0 - \omega_i$, les x_i^0 , les y_i^0 seront indépendants des ϖ et développables suivant les puissances des

$$\rho_k e^{\omega_k \sqrt{-1}}, \quad \rho_k e^{-\omega_k \sqrt{-1}}.$$

Quand on annulera les ρ , Y_i^0 se réduira à ω_i , x_i^0 et y_i^0 à 0.

Les quantités X_i^p , etc. étant des fonctions périodiques des ϖ , je pourrai envisager leur valeur moyenne, définie au début de ce travail, et la désigner par $[X_i^p]$.

Voici quelle est la signification de ces diverses quantités.

Les différences $X_i^p - [X_i^p]$, ... représentent les perturbations à courte période d'ordre p par rapport aux masses.

La valeur moyenne $[X_i^p]$ représente les perturbations séculaires d'ordre $p + 1$. En effet elle ne dépend pas des ω , mais seulement des ω : elle variera donc très lentement; la quantité elle-même est d'ordre p ; mais ses variations dans un temps fini seront de l'ordre $p + 1$.

J'observe enfin que les quantités ρ par rapport auxquelles nous développerons sont de l'ordre des excentricités et des inclinaisons.

Je désignerai par u_k et v_k les termes du premier degré par rapport aux ρ dans le développement de x_k^0 et y_k^0 .

Transformation du problème.

Je dis que le problème peut être remplacé par le suivant : déterminer les séries (26) de telle façon que :

1° La fonction F , quand on y a substitué les séries (26), se réduise à une fonction φ ne dépendant plus que des constantes z et ρ .

2° Les expressions

$$\begin{aligned} dS &= \Sigma[(X_i - z_i) dY_i + (Y_i^0 - Y_i) dz_i + (x_k - x_k^0) dy_k + (y_k^0 - y_k) dx_k^0], \\ dT &= \Sigma[(x_k^0 - u_k) dy_k^0 + (v_k - y_k^0) du_k] + \Sigma(\omega_i - y_i^0) dz_i, \\ d\mathcal{D} &= \Sigma u_k dv_k + \sqrt{-1} \Sigma \rho_k^2 d\omega_k \end{aligned}$$

sont des différentielles exactes.

Si, en effet, ces trois différentielles sont exactes, il en sera de même de

$$\Sigma X_i dY_i + \Sigma x_k dy_k - \Sigma z_i d\omega_i + \sqrt{-1} \Sigma \rho_k^2 d\omega_k.$$

Si donc on prend comme variables les z , les ω , les ρ_k^2 et les $-\sqrt{-1} \omega_k$, la forme canonique des équations (25) ne sera pas altérée et elles deviendront

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} &= \frac{dF}{d\omega_i} = \frac{d\varphi}{d\omega_i} = 0 \quad (z_i = \text{const.}), \\ \frac{d\rho_k^2}{dt} &= \frac{-d\varphi}{\sqrt{-1} d\omega_k} = 0 \quad (\rho = \text{const.}), \\ \frac{d\omega_i}{dt} &= -\frac{d\varphi}{dz_i} = \text{const.}; \quad \frac{d\omega_k}{dt} = \frac{d\varphi}{\sqrt{-1} d(\rho_k^2)} = \text{const.}, \end{aligned}$$

ce qui montre que les z et les ρ sont des constantes, les ω et les ω des fonctions linéaires du temps. C. Q. F. D.

Substituons dans F les développements (26), et ordonnons suivant les puissances de μ ; nous aurons

$$F = \Theta_0 + \mu\Theta_1 + \mu^2\Theta_2 + \dots$$

Si nous développons de même φ suivant les puissances de μ de telle sorte que $\varphi = \Sigma\mu^p\varphi_p$, l'équation $F = \varphi$ nous donnera

$$\Theta_0 = \varphi_0, \quad \Theta_1 = \varphi_1, \quad \Theta_2 = \varphi_2, \quad \dots$$

Comme Θ_0 n'est autre chose que F_0 , où X_i est remplacé par z_i , l'équation $\Theta_0 = \varphi_0$ est remplie d'elle-même.

Je développerai de même S suivant les puissances de μ en écrivant

$$S = \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots$$

Théorème de Poisson.

Il vient d'abord, en égalant les termes du premier degré,

$$dS_1 = \Sigma (X_i^1 dY_i^0 - Y_i^1 dz_i + x_k^1 dy_k^0 - y_k^1 dx_k^0).$$

D'après nos hypothèses, $Y_i^0 - \omega_i$, z_i , y_k^0 , x_k^0 sont indépendants des ω ; on a donc

$$\frac{dY_i^0}{d\omega_i} = 1, \quad \frac{dY_k^0}{d\omega_i} = 0 \quad (k \geq i), \quad \frac{dy_k^0}{d\omega_i} = 0, \quad \frac{dx_k^0}{d\omega_i} = 0,$$

d'où

$$(27) \quad \frac{dS_1}{d\omega_i} = X_i^1.$$

Mais la valeur moyenne de $\frac{dS_1}{d\omega_i}$, qui est la dérivée d'une fonction périodique, est évidemment nulle; on a donc

$$[X_i^1] = 0.$$

Mais $[X_i^1]$ représente, d'après ce que nous avons vu plus haut, les perturbations séculaires de X_i , c'est-à-dire du grand axe, qui sont du second ordre par rapport aux masses.

C'est donc le théorème de Poisson sur l'invariabilité des grands axes.

Perturbations séculaires du premier ordre.

Posons

$$a_i = - \frac{d\theta_0}{dz_i}.$$

Les z_i étant regardées comme des constantes, il en sera de même des a_i et l'on aura

$$(28) \quad \theta_1 = - \sum a_i X_i^1 + F_1.$$

Il demeure bien entendu que, dans F_1 , les variables X_i, Y_i, x_i, y_i doivent être remplacées par X_i^0, Y_i^0, x_i^0 et y_i^0 . En prenant les valeurs moyennes, on trouve

$$[\theta_1] = - \sum a_i [X_i^1] + [F_1] = R.$$

Reprenons l'équation $\theta_1 = \varphi_1$ et prenons les valeurs moyennes des deux membres, il vient

$$(29) \quad R = \varphi_1.$$

Regardons un instant les z_i comme des constantes, il viendra

$$(30) \quad dT = \sum [(x_k^0 - u_k) dy_k^0 + (v_k - y_k^0) dy_k]$$

et il faudra déterminer les x_k^0 et y_k^0 de façon à satisfaire à l'équation (29) et à rendre l'expression (30) ainsi que dU différentielles exactes.

C'est le problème F, où $R, T, U, x_k^0, y_k^0, u_k, v_k$ jouent le rôle de $F, S, T, x_i, y_i, x_i^1, y_i^1$.

Nous obtiendrons donc x_k^0 et y_k^0 développés suivant les puissances des $\rho e^{\pm \omega \sqrt{-1}}$.

La fonction T étant ainsi déterminée par le procédé F, on aura

$$Y_i^0 = \omega_i - \frac{dT}{dz_i},$$

ce qui donne la perturbation séculaire de l'époque.

Perturbations périodiques du premier ordre.

Reprenons l'équation $\theta_1 = \varphi_1$, qui peut s'écrire, en tenant compte de (27) et (28),

$$\sum a_i \frac{dS_1}{d\omega_i} = F_1 - \varphi_1.$$

Le second membre est une fonction périodique des ω dont la valeur moyenne est nulle en vertu de (29).

L'équation pourra donc s'intégrer par le procédé A, ce qui donnera $S_1 - [S_1]$.

On aura ensuite

$$X_i^1 = X_i^1 - [X_i^1] = \frac{d(S_1 - [S_1])}{dY_i^0}, \quad Y_i^1 - [Y_i^1] = \frac{-d(S_1 - [S_1])}{dz_i},$$

$$x_k^1 - [x_k^1] = \frac{d(S_1 - [S_1])}{dy_k^0}, \quad y_k^1 - [y_k^1] = \frac{-d(S_1 - [S_1])}{dx_k^0}.$$

Comme les dérivées sont prises ici par rapport aux variables z_i , Y_i^0 , x_k^0 , y_k^0 , c'est la fonction de ces variables qu'il conviendra d'exprimer S_1 et F_1 et non en fonctions des z , des ρ , des ω et des ω ; remarquons :

1° Que, Y_i^0 étant égal à ω_i plus une quantité indépendante des ω ,

$$\frac{dS_1}{d\omega_i} = \frac{dS_1}{dY_i^0},$$

de sorte que notre équation peut être remplacée par la suivante

$$\sum a_i \frac{dS_1}{dY_i^0} = F_1 - \varphi_1;$$

2° Que toute fonction périodique des ω_i est aussi une fonction périodique des Y_i^0 et que sa valeur moyenne par rapport aux Y_i^0 est la même que par rapport aux ω_i .

Le calcul qui précède ne diffère pas d'ailleurs du calcul habituel; le mode d'exposition seul diffère.

Perturbations séculaires du second ordre.

Déterminons maintenant $[X_i^2]$, $[Y_i^1]$, $[x_k^1]$, $[y_k^1]$.

Nous avons

$$dS_2 = \Sigma (X_i^2 dY_i^0 + X_i^1 dY_i^1 - Y_i^2 dz_i + x_k^2 dy_k^0 - y_k^2 dx_k^0 + x_k^1 dy_k^1),$$

d'où

$$(31) \quad \frac{dS_2}{d\omega_i} = X_i^2 + \sum \left(x_k^1 \frac{dy_k^1}{d\omega_i} + X_k^1 \frac{dY_k^1}{d\omega_i} \right).$$

La valeur moyenne du premier membre est nulle, celle du second terme du second membre est connue; car on a, par exemple,

$$\left[x_k^1 \frac{dy_k^1}{dw_i} \right] = \left[(x_k^1 - [x_k^1]) \frac{d}{dw_i} (y_k^1 - [y_k^1]) \right] + [x_k^1] \left[\frac{dy_k^1}{dw_i} \right],$$

équation dans le second membre de laquelle le premier terme est connu et le second nul.

Donc $[X_i^2]$ est connu.

Nous avons ensuite l'équation $\Theta_2 = \varphi_2$. Si nous prenons la valeur moyenne des deux membres, elle deviendra

$$\sum \frac{dR}{dx_k^0} [x_k^1] + \sum \frac{dR}{dy_k^0} [y_k^1] = \Phi + \varphi_2.$$

D'un autre côté, on trouve

$$d[S_1] = \Sigma([- Y_i^1] dz_i + [x_k^1] dy_k^0 - [y_k^1] dx_k^0),$$

ou, en regardant pour un instant les z comme des constantes,

$$d[S_1] = \Sigma([x_k^1] dy_k^0 - [y_k^1] dx_k^0).$$

Pour pouvoir appliquer le procédé H à ces équations il convient de prendre pour variables nouvelles, au lieu des x_k^0 et y_k^0 , les u_k et les v_k . Toute fonction développable suivant les puissances des x_k^0 et y_k^0 le sera également suivant celles des u_k et des v_k , et inversement.

On aura alors

$$\begin{aligned} x_k^0 &= u_k + D_k, & y_k^0 &= v_k + C_k, \\ \frac{dR}{dx_k^0} &= \frac{dR}{du_k} + A_k, & \frac{dR}{dy_k^0} &= \frac{dR}{dv_k} + B_k, \end{aligned}$$

A_k, B_k, C_k, D_k étant des fonctions connues développables suivant les puissances des u et des v et commençant par des termes du second degré. D'où

$$\sum \frac{dR}{du_k} [x_k^1] + \frac{dR}{dv_k} [y_k^1] + A_k [x_k^1] + B_k [y_k^1] = \Phi + \varphi_2,$$

$$d[S_1] = \Sigma \{ [x_k^1] (dv_k + dC_k) + [y_k^1] (du_k + dD_k) \}.$$

D'autre part, φ_2 devant être fonction seulement des ρ satisfera à l'équation

$$\frac{d\varphi_2}{du_k} \frac{dR_2}{dv_k} - \frac{dR_2}{du_k} \frac{d\varphi_2}{dv_k} = 0.$$

Nous reconnaissons les équations (21 *bis*) du problème H où $[x_k^1]$, $[y_k^1]$, u_k , v_k , R , R_2 , Φ , φ_2 jouent respectivement le rôle de ξ_i , η_i , x_i , y_i , F , F_2 , P , Q . Nous pourrions donc intégrer ces équations par le procédé H et nous aurons $[S_1]$, $[x_k^1]$, $[y_k^1]$ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances des u_k et des v_k , ou, ce qui revient au même, suivant celles des

$$\rho_k e^{\pm \omega_k \sqrt{-1}}$$

L'équation

$$[Y_i^1] = - \frac{d[S_1]}{d\omega_i}$$

nous donnera ensuite les $[Y_i^1]$.

Nous connaissons donc toutes les perturbations séculaires du second ordre.

Perturbations périodiques du second ordre.

Reprenons l'équation $\Theta_2 = \varphi_2$, qui, les x_k^1 , ... étant désormais connus, peut s'écrire

$$\Sigma \alpha_i X_i^2 = \Phi - \varphi_2.$$

D'autre part, l'équation (31) peut désormais s'écrire

$$\frac{dS_2}{d\omega_i} = X_i^2 + \Phi.$$

Il vient donc

$$\Sigma \alpha_i \frac{dS_2}{d\omega_i} = \Phi - \varphi_2.$$

Le second membre est une fonction périodique connue des ω ; et la valeur moyenne en est nulle puisque nous venons précisément de déterminer les perturbations séculaires du second ordre de façon à annuler cette valeur moyenne.

L'équation s'intégrera donc par le procédé A et nous donnera

$$S_2 - [S_2], \quad X_i^2, \quad Y_i^2 - [Y_i^2], \quad x_k^2 - [x_k^2], \quad y_k^2 - [y_k^2].$$

Et ainsi de suite.

Examen d'une difficulté.

Mais une grave difficulté, que j'ai, jusqu'ici, passée sous silence, se présente. Pour que les procédés F, G, H soient applicables, il faut qu'il n'y ait, entre les quantités que nous avons appelées λ_k , aucune relation linéaire à coefficients entiers. Or il n'en est pas ainsi dans le *Problème des trois corps* : l'un des λ_k est nul.

Il est facile de s'en rendre compte.

En effet, les équations canoniques

$$(32) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dR_2}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dR_2}{dx_i}$$

admettent trois intégrales correspondant aux trois intégrales des aires et qui peuvent s'obtenir de la façon suivante : R_2 est de la forme

$$R_2 + R'_2,$$

où R'_2 dépend seulement des excentricités et des inclinaisons, c'est-à-dire des quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2 et où R_2 dépend des quatre variables x_3, x_4, y_3, y_4 et est proportionnel au carré de l'angle infiniment petit des plans des deux orbites.

On en conclut aisément que les équations (32) admettent pour intégrales

$$\beta \sqrt{\alpha} x_3 + \beta' \sqrt{\alpha'} x_4 = \text{const.}$$

$$\beta \sqrt{\alpha} y_3 + \beta' \sqrt{\alpha'} y_4 = \text{const.}$$

Ces deux intégrales sont linéaires et leur présence suffit pour montrer que l'un des λ est nul ; c'est, en effet, la fonction R qui joue le même rôle que la fonction F dans le problème F ; et c'est R_2 qui joue le rôle de F_2 dans les problèmes D et F. Les quantités que nous avons appelées λ sont donc définies à l'aide des équations (32).

On pourrait donc craindre que la présence d'un coefficient λ égal à zéro n'empêche l'application des procédés F, G, H. Il n'en est rien, et il est aisé de tourner la difficulté de la façon suivante.

Considérons les intégrales des aires et écrivons-les sous la forme suivante :

$$U = U_0, \quad V = V_0, \quad W = W_0;$$

U, V, W sont des fonctions données des variables X, Y, x, y ;
 U_0, V_0, W_0 sont des constantes.

Supposons qu'on ait pris pour premier plan de coordonnées le plan du maximum des aires, de façon que les constantes U_0 et V_0 soient nulles. Posons

$$F' = F + U^2 + V^2$$

et considérons les équations canoniques

$$(25 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \frac{dX_i}{dt} = \frac{dF'}{dY_i}, & \frac{dY_i}{dt} = -\frac{dF'}{dX_i}, \\ \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF'}{dy_i}, & \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF'}{dx_i}, \end{cases}$$

qui sont les équations (25) où F est remplacé par F' .

Nous envisageons celles des intégrales des équations (25) qui sont telles que $U = V = 0$; on voit immédiatement que ces intégrales appartiennent également aux équations (25 bis). Nous pouvons donc, au lieu des équations (25), envisager les équations (25 bis) qui sont de même forme, mais telles qu'aucun des coefficients λ_k ne soit nul.

La difficulté a donc disparu et le calcul peut se pousser jusqu'au bout sans obstacle. Il faut maintenant, parmi les intégrales de (25 bis), distinguer celles qui conviennent également aux équations (25).

Pour cela, remarquons que les équations (25 bis) donnent

$$\frac{dW}{dt} = 0, \quad \frac{dU}{dt} = WV, \quad \frac{dV}{dt} = -2WU,$$

d'où

$$W = \text{const.} \quad U + \sqrt{-1}V = Ce^{2tW\sqrt{-1}},$$

C étant une nouvelle constante.

La fonction $U + \sqrt{-1}V$ est donc égale, à un facteur constant près, à une exponentielle dont l'exposant est une fonction linéaire du temps; de plus, elle doit être développable suivant les puissances des $\rho e^{\pm\omega\sqrt{-1}}$; cela ne peut avoir lieu que si elle est divisible par une expression de la forme

$$\prod \rho_k^{\alpha_k + \beta_k} e^{(\alpha_k - \beta_k)\omega_k\sqrt{-1}} e^{\sqrt{-1}(m_1 w_1 + m_2 w_2)},$$

où les α , les β et les m sont des entiers.

Dans le développement de $U + \sqrt{-1} V$ suivant les puissances des u et des v , considérons les termes du premier degré; on verrait qu'ils se réduisent à $\rho_4 e^{\omega_4 \sqrt{-1}}$ (à un facteur constant près qui n'est pas nul).

Donc

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = m_1 = m_2 = 0, \quad \alpha_4 = 1$$

et $U + \sqrt{-1} V$ est divisible par $\rho_4 e^{\omega_4 \sqrt{-1}}$.

De même $U - \sqrt{-1} V$ est divisible par $\rho_4 e^{-\omega_4 \sqrt{-1}}$.

Les intégrales de (25 *bis*) qui conviennent à (25) sont celles qui sont telles que $U = V = 0$; c'est-à-dire telles que $u_4 = v_4 = 0$; c'est-à-dire telles que $\rho_4 = 0$ et qui, par conséquent, ne dépendent pas de l'argument ω_4 ; d'où cette conséquence :

Les intégrales des équations (25) ne dépendent pas de six arguments linéaires par rapport au temps,

$$\omega_1, \omega_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4,$$

mais de cinq seulement

$$\omega_1, \omega_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3.$$

Il n'est pas nécessaire, pour faire le calcul de ces intégrales, de former les équations (25 *bis*); il suffit d'opérer sur les équations (25) elles-mêmes; la considération des équations (25 *bis*) n'est qu'un artifice dont je me suis servi pour démontrer la possibilité du calcul.

REMARQUE.

Nous venons de voir que les coordonnées des trois corps sont fonctions de cinq arguments

$$\omega_1, \omega_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3.$$

Leurs distances dépendront des différences de ces cinq arguments, c'est-à-dire de quatre arguments seulement.

DEUXIÈME REMARQUE.

Les intégrales (25 *bis*) pour lesquelles U et V ne sont pas nuls à la fois ne conviennent pas au système (25); les expressions des

coordonnées en fonctions du temps ne sont pas les mêmes avec les équations (25 *bis*) et avec les équations (25); mais les expressions des distances mutuelles des trois corps sont les mêmes.

Calcul des périodes.

Nous avons vu que les ω et les ω sont des fonctions linéaires du temps. Les quantités

$$\frac{d\omega_i}{dt} = n_i, \quad \frac{d\omega_k}{dt} = \nu_k$$

sont donc des constantes. Le calcul de ces constantes est facile. En effet, nous avons formé la fonction φ qui dépend des constantes z_i et ρ_k^2 , et nous aurons

$$n_i = -\frac{d\varphi}{dz_i}, \quad \nu_k = \frac{d\varphi}{\sqrt{-1} d(\rho_k^2)}.$$

La fonction φ étant développable suivant les puissances de μ et des ρ_k^2 , il en sera donc de même de n_i et de ν_k ; les n et les ν sont représentés par des séries ordonnées suivant les puissances de μ et des ρ_k^2 et dont les coefficients dépendent des z_i .

Il est aisé de voir que les n et les ν sont réels; en effet, les coordonnées des trois corps doivent être réelles; les termes de leurs développements devront donc être réels ou imaginaires conjugués deux à deux. Or chacun de ces termes est égal à une constante multipliée par une exponentielle dont l'exposant est de la forme

$$\sqrt{-1}(m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3),$$

les m et les α étant entiers. Ces exponentielles devront donc être ou réelles, ou imaginaires conjuguées deux à deux. Si deux exponentielles sont imaginaires conjuguées, elles devront le rester par continuité quand μ et les ρ sont très petits; or, dans ce cas, il est aisé de voir que deux exponentielles sont imaginaires conjuguées quand les exposants sont égaux et de signe contraire, et ne le sont que dans ce cas.

Dans tout couple d'exponentielles conjuguées, les exposants doivent donc être égaux et de signe contraire. Cela revient à dire que les ω et les ω (et par conséquent les n et les ν) doivent être réels.

C. Q. F. D.

D'autre part, il est aisé de voir que le développement des n suivant les puissances de μ commence par un terme d'ordre 0, tandis que le développement des ν commence par un terme d'ordre 1.

Il en résulte que les ω varient très rapidement et les ω très lentement; ce qui justifie le nom de *termes séculaires* que nous avons donné aux termes qui ne dépendent que des ω .

Les quantités n_1 et n_2 représentent ce que l'on pourrait appeler les *moyens mouvements moyens*.

Les quantités ν sont au contraire de l'ordre des moyens mouvements des périhélie et des nœuds.

RÉSUMÉ.

En résumé, les coordonnées des trois corps peuvent s'exprimer par des séries qui procèdent suivant les puissances d'un petit paramètre μ de l'ordre des masses et de plusieurs constantes ρ de l'ordre des excentricités et des inclinaisons; ces séries sont des fonctions périodiques de cinq arguments

$$\omega_i = n_i t + \varpi_i, \quad \omega_i = \nu_i t + \varepsilon_i'$$

où les ϖ_i et les ε_i sont des constantes d'intégration. Les n_i et les ν_i sont des fonctions de μ , des ρ et de deux nouvelles constantes z_1 et z_2 , et peuvent se développer suivant les puissances de μ et des ρ^2 .

Les coefficients de nos séries dépendent encore des constantes z_1 et z_2 .

Les carrés de ces constantes z peuvent être assimilés à des *grands axes moyens*.

La constante ϖ_i correspond à la longitude de l'époque, tandis que les ρ jouent un rôle analogue à celui des excentricités et des inclinaisons et les ω un rôle analogue à celui des longitudes des périhélie et des nœuds.

Inutile d'ajouter que ces résultats s'étendent sans changement au cas où l'on a plus de trois corps.

Ce calcul n'est pas sans analogie avec ceux que j'ai exposés dans les Chapitres XIV et XV de mon Ouvrage sur les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*. Il en diffère cependant et j'y ai apporté d'importantes simplifications.