ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les périodes des intégrales doubles.* Note de M. H. POINCARÉ.

« Je considère l'intégrale double

$$J = \int\int \frac{P\,dx\,dy}{\sqrt{F - z}},$$

où P et F sont deux polynomes entiers en x et y, et où z est un paramètre arbitraire.

» Considérons, d'autre part, l'intégrale simple

$$j = \int \frac{P\,dx}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}.$$

Dans cette intégrale simple, je suppose que y est lié à x par la relation algébrique

$$F = t,$$

où t est un autre paramètre arbitraire. Ainsi j est une intégrale abélienne relative à la courbe algébrique $F = t$.

» Soit ω une des périodes de j; cette période sera une fonction de t, et l'on sait que cette fonction ω satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes entiers en t.

» Soit

$$\sum \Pi_k \frac{d^k\omega}{dt^k} = 0 \tag{1}$$

cette équation; Π_k est un polynôme entier en t.

» L'ordre de l'équation (1) sera égal au nombre des périodes, c'est-à-dire à $2p$, en appelant p le genre de la courbe $F = t$.

» Soient

$$t_1,\quad t_2,\quad \ldots,\quad t_q$$

les points singuliers de l'équation (1), c'est-à-dire les racines distinctes du polynome Π_{2p}.

» Alors les périodes Ω de l'intégrale J seront représentées par la formule

$$\Omega = 2\int_{t_k}^{z} \frac{\omega\, dt}{\sqrt{t-z}}$$

» Il y a donc, en général, $2pq$ périodes Ω, puisque l'on peut prendre pour ω l'une des $2p$ périodes de j et pour t_k l'un des q points singuliers de (1).

» Nous devons dire également comment cette formule devrait être transformée si ω devenait infini pour $t = t_k$.

» Soient alors

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_{2p}$$

$2p$ intégrales de l'équation (1) qui deviennent

$$\lambda_1 v_1, \quad \lambda_2 v_2, \quad \ldots, \quad \lambda_{2p} v_{2p}$$

quand t tourne autour de t_k.

» Soit, dans le voisinage de l'origine O,

$$\omega = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{2p} v_{2p}$$

les α étant des coefficients constants.

» On aura alors

$$\Omega = 2\int \left(\frac{\alpha_1 v_1}{1-\lambda_1} + \frac{\alpha_2 v_2}{1-\lambda_2} + \ldots + \frac{\alpha_{2p} v_{2p}}{1-\lambda_{2p}}\right) \frac{dt}{\sqrt{t-z}} - \int \frac{\omega\, dt}{\sqrt{t-z}},$$

la première intégrale étant prise le long d'un lacet partant de l'origine et y revenant après avoir entouré le point t_k, et la seconde le long d'un lacet partant de l'origine et y revenant après avoir entouré le point z.

» Il est clair que Ω est une fonction de z qui va satisfaire à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes entiers en z. Soit

$$\Sigma\, Q_k \frac{d^k \Omega}{dz_k} = 0 \tag{2}$$

cette équation; les Q_k sont des polynomes entiers en z.

» L'équation (2) se déduit de l'équation (1) par une transformation bien connue qui se rattache à la théorie des dérivées d'ordre fractionnaire.

» Les points singuliers de l'équation (2) sont les mêmes que ceux de l'équation (1); mais le point sur lequel je voudrais surtout insister, c'est sur la manière de déduire le groupe de l'équation (2) de celui de l'équation (1).

» Pour fixer les idées, je supposerai

$$2p = 2, \qquad q = 3.$$

» L'équation (1) est alors du second ordre et l'équation (2) est, en général, du sixième ordre.

» Soient alors

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{vmatrix}$$

les substitutions fondamentales du groupe de (1); les substitutions correspondantes du groupe de (2) seront

$$\begin{vmatrix} -a & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & -b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 1-d & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-a & -b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c & 1-d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-a' & -b' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c' & 1-d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a' & -b' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c' & -d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a' & -b' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c' & 1-d' & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1-a'' & -b'' \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -c'' & 1-d'' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1-a'' & -b'' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c'' & 1-d'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a'' & -b'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c'' & -d'' \end{vmatrix}.$$

» Le groupe de (1) a tous ses coefficients entiers; on voit qu'il en sera de même du groupe de (2), ainsi qu'il était aisé de le prévoir. »

BOTANIQUE. — *Signification du nombre et de la symétrie des faisceaux libéroligneux du pétiole dans la mesure de la perfection des végétaux;* par M. **Ad. Chatin.**

« Comme pour les Corolliflores, pour les Gamopétales périgynes et les Dialypétales périgynes, le simple exposé des faits observés chez les Dialy-