l'influence de l'effluve, ont plutôt une constitution cyclique, c'est-à-dire celle de corps relativement saturés : ce qui les rapproche des séries pyridique et quinoléique, dérivées elles-mêmes, comme on sait, des aldéhydes par condensation moléculaire. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Les fonctions fuchsiennes et l'équation* $\Delta u = e^u$. Note de M. **H. Poincaré**.

« Parmi les équations de la forme

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v, \tag{1}$$

où φ est une fonction rationnelle de deux variables x et y liées par une relation algébrique *donnée*

$$f(x, y) = 0, \tag{2}$$

parmi toutes ces équations, dis-je, qui admettent des points singuliers donnés et de telle façon que la différence des racines de chaque équation déterminante soit un entier donné, il y a toujours une équation fuchsienne, c'est-à-dire engendrant des fonctions fuchsiennes.

» Nous avons donné de ce fait, M. Klein et moi, une première démonstration fondée sur le principe de continuité. Plus tard, M. Picard a ramené la question à l'intégration de l'équation

$$\Delta u = e^u \tag{3}$$

et il a démontré l'intégrabilité de cette équation par une méthode qu'il a imaginée et qui consiste à l'établir d'abord pour un domaine assez petit pour l'étendre ensuite au plan entier.

» Voulant éviter ce détour, j'ai cherché une méthode nouvelle dont je vais exposer maintenant le principe.

» J'introduis la *surface de Klein* : c'est une surface fermée; à tout point *réel* de cette surface correspond un point imaginaire de la courbe (2) et inversement. Je pose d'ailleurs

$$Du = \Delta u \frac{d\Omega}{d\omega},$$

où $d\omega$ est un élément de la surface de Klein et $d\Omega$ l'élément correspondant du plan des x. L'équation (3) se ramène alors à la forme

$$DU = \theta e^{U} - \Phi, \tag{4}$$

où θ et Φ sont deux fonctions données, la première toujours positive.

» Le problème de la formation de l'équation fuchsienne se ramène à la détermination de la fonction U qui doit être partout finie.

» L'analyse repose sur certaines inégalités très simples qui se déduisent d'une remarque unique : si U est maximum, DU est négatif; si U est minimum, DU est positif.

» Je commence par intégrer l'équation

$$Du = \varphi, \tag{5}$$

où φ est donnée; cette intégration n'est possible que si

$$\int \varphi \, d\omega = 0,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface de Klein. L'équation (5) est de même forme que l'équation bien connue de la théorie du potentiel

$$\Delta u = \varphi,$$

que l'on intègre par la fonction de Green. L'équation (5) s'intègre par un procédé analogue; la fonction qui joue le rôle de la fonction de Green est la partie réelle d'une intégrale abélienne de troisième espèce facile à former.

» J'étudie ensuite l'équation

$$Du = \lambda \eta u - \varphi - \lambda \psi, \tag{6}$$

où η, φ, ψ sont trois fonctions données, la première toujours positive et où λ est un paramètre positif.

» Je montre d'abord que l'équation est intégrable pour les petites valeurs de λ et que l'intégrale peut se développer suivant les puissances de λ. Je montre ensuite que, si elle est intégrable pour $\lambda = \lambda_0$, elle le sera encore pour les petites valeurs de $\lambda - \lambda_0$ et que l'intégrale peut se développer suivant les puissances de $\lambda - \lambda_0$. Je conclus que l'équation est intégrable pour toutes les valeurs positives de λ.

» Il y a un cas où cette méthode est en défaut. C'est quand le polygone fuchsien a des sommets sur le cercle fondamental; dans ce cas il y a des points où les fonctions η et θ deviennent infinies comme

$$\frac{1}{x^2 \log^2 x}.$$

» Dans ce cas d'ailleurs, la méthode de M. Picard est également en défaut. Je ne puis entrer dans le détail des artifices que j'ai dû employer pour triompher de cette difficulté. Cela a été la partie la plus longue de mon travail.

» Je me bornerai à dire que l'intégrale est toujours finie, qu'elle peut se développer suivant les puissances de λ, mais que les termes du développement peuvent devenir infinis.

» C'est ainsi que la fonction x^λ reste finie pour $x = 0$, si λ est positif; qu'elle peut se développer suivant les puissances de λ

$$x^\lambda = 1 + \lambda \log x + \frac{\lambda^2}{2}(\log x)^2 + \ldots,$$

mais que les termes du développement deviennent infinis pour $x = 0$.

» Cette difficulté vaincue, j'aborde l'équation

$$(7) \qquad \mathrm{D}u = \theta e^u - \varphi - \lambda\psi,$$

où θ, φ et ψ sont connus et positifs, et où λ est un paramètre positif.

» Je suppose qu'on sache intégrer l'équation (7) pour $\lambda = 0$; je puis alors former une série procédant suivant les puissances de λ et satisfaisant à (7). J'obtiens chaque terme par l'intégration d'une équation de la forme (6); et, grâce aux inégalités établies au début, je montre facilement que la série converge, si λ est assez petit.

» On peut démontrer alors de proche en proche, comme pour l'équation (6), que l'équation est intégrable pour toutes les valeurs positives de λ.

» En résumé, l'équation (4) est intégrable si Φ est toujours positif, et il est aisé de conclure qu'elle l'est encore pourvu que

$$(8) \qquad \int \Phi \, d\omega > 0.$$

» Cette condition est nécessaire et suffisante. Il reste à vérifier que cette condition (8) est remplie dans les applications que l'on a à faire aux fonctions fuchsiennes. Cette vérification est facile.

» On peut entrevoir la possibilité d'une démonstration rigoureuse fondée sur le calcul des variations. Il est aisé de former une intégrale double qui doit être minimum si l'équation (4) est satisfaite. Mais ce genre de raisonnement n'est pas satisfaisant parce que, cette intégrale dépendant d'une fonction arbitraire, il n'est pas certain qu'elle ait un minimum proprement dit.

» Heureusement, dans le problème qui nous occupe, la fonction inconnue $\varphi(x, y)$ doit satisfaire à certaines conditions; elle dépend seulement d'un nombre *fini* de *constantes* inconnues. La fonction u dépendra donc elle-même d'un nombre fini de constantes inconnues. Notre intégrale double, ne dépendant plus d'une fonction arbitraire, mais d'un certain nombre de paramètres arbitraires, aura certainement un minimum et la démonstration pourra devenir rigoureuse. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

MÉCANIQUE. — *Sur un cas particulier du mouvement des liquides.* Mémoire de M. **E. Fontaneau.** (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires : MM. Boussinesq, Sarrau, Callandreau.)

« Ce Travail est la suite d'une Communication faite à l'Académie dans sa séance du 23 novembre 1896. Par une transformation très simple des équations générales de l'Hydrodynamique, mais à laquelle me paraît correspondre une proposition qui a quelque analogie avec le principe des aires, j'y ai mis en évidence une fonction Π définie par l'égalité

$$Lp + Mq + Nr = \Pi,$$

où p, q, r désignent les composantes de la vitesse du liquide et L, M, N les composantes de la rotation élémentaire, ou, suivant une expression due à Helmholtz et plus usitée, du tourbillon.

» Je me suis actuellement proposé d'abord d'intégrer les équations de l'Hydrodynamique dans le cas particulier ou l'on aurait $\Pi = 0$, c'est-à-dire lorsque l'axe de la rotation élémentaire est, en tous les points de la masse fluide, perpendiculaire à la direction de la vitesse. J'ai dû pour cela employer le système de coordonnées curvilignes biorthogonales. Comme ce système n'a encore donné lieu à aucune application importante et n'est qu'imparfaitement connu, j'ai été obligé d'en exposer les principales propriétés.

» La suite naturelle des idées m'a conduit à rechercher s'il était possible de donner plus d'extension au procédé dont je m'étais servi dans un cas particulier. C'est un but que j'ai atteint, grâce à une légère modification