COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SEANCE DU LUNDI 1er MAI 1899,

PRÉSIDENCE DE M. VAN TIEGHEM.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les groupes continus.* Note de M. **H. Poincaré**.

« Je désirerais faire quelques observations au sujet de cette belle théorie des groupes continus, dont la Science est redevable au génie de notre regretté correspondant M. Lie. Je voudrais, en particulier, faire voir que l'on peut démontrer l'existence d'un groupe de structure donnée par un procédé un peu différent de celui qu'a employé ce grand géomètre.

» Soit f une fonction quelconque de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et soient $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$, n fonctions de ces mêmes variables. Je poserai, suivant l'usage,

$$X(f) = X^{(1)}\frac{df}{dx_1} + X^{(2)}\frac{df}{dx_2} + \ldots + X^{(n)}\frac{df}{dx_n}.$$

» On voit que $YX(f) = Y[X(f)]$ n'est pas égal, en général, à $XY(f)$; je supprimerai généralement l'indication (f) et j'écrirai X et YX au lieu de $X(f)$ et $YX(f)$. Un opérateur quelconque, combinaison des opérateurs X, Y, Z se présentera sous la forme d'un *polynome symbolique* en X, Y, Z. Seulement il convient d'observer que dans un produit symbolique on n'a pas le droit d'intervertir l'ordre des facteurs.

» Ainsi XY n'est pas égal à YX; et $(X+Y)^2$ n'est égal ni à

$$X^2 + 2XY + Y^2,$$

ni à

$$X^2 + 2YX + Y^2,$$

mais bien à

$$X^2 + XY + YX + Y^2.$$

» Un polynome symbolique sera dit *normal*, si tous les termes qui ne diffèrent que par l'ordre des facteurs ont même coefficient; en général, un polynome symbolique ne peut pas être mis sous la forme d'une somme de puissances et de polynomes linéaires; les polynomes normaux le peuvent seuls.

» Je poserai, suivant l'usage,

$$XY - YX = [X, Y],$$

et je supposerai que nos opérateurs sont liés par certaines relations (que j'appellerai *relations de structure* parce qu'elles définissent la structure du groupe) et qui seront de la forme

$$[X, Y] = U,$$

U étant un polynome linéaire par rapport à nos opérateurs. Les coefficients de ces polynomes linéaires U ne seront pas quelconques; mais ils devront être choisis de façon à satisfaire aux *identités associatives*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

» Les relations de structure permettent de transformer les polynomes symboliques et l'on commence par démontrer que si les identités associatives ont lieu, on peut toujours transformer d'une manière, et *d'une seule*, un polynome symbolique quelconque en un polynome normal.

» Cela posé, considérons n opérateurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$, satisfaisant à un système de relations de structure et d'identités associatives; envisageons les substitutions infinitésimales qui changent f en $f+\varepsilon_k X_k(f)$ où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sont n constantes infiniment petites ; et les puissances de ces substitutions. On sait qu'une puissance quelconque de la substitution $1+\varepsilon_k X_k$ est égale à

$$1+\frac{tX_k}{1!}+\frac{t^2X_k^2}{2!}+\frac{t^3X_k^3}{3!}+\ldots,$$

où t est une constante et peut être représentée symboliquement par e^{tX_k}.

» Considérons plus généralement une combinaison linéaire quelconque de ces substitutions infinitésimales

$$1+\varepsilon_1 X_1+\varepsilon_2 X_2+\ldots+\varepsilon_n X_n;$$

une puissance quelconque de cette combinaison pourra s'écrire

$$1+\frac{t_1X_1+t_2X_2+\ldots+t_nX_n}{1}+\ldots+\frac{(t_1X_1+\ldots+t_nX_n)^p}{p!}+\ldots,$$

où les t sont des constantes, et se représentera symboliquement par

$$e^{t_1X_1+t_2X_2+\ldots+t_nX_n}.$$

» Soient maintenant deux combinaisons linéaires

$$T=t_1X_1+\ldots+t_nX_n, \qquad V=v_1X_1+\ldots+v_nX_n.$$

» Considérons l'opérateur

$$e^T e^V = e^T[e^V(f)].$$

Cet opérateur se présentera sous la forme d'une série dont tous les termes sont des polynomes symboliques en $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Grâce aux relations de structure, ces polynomes peuvent être transformés en polynomes normaux.

» *Je dis qu'une fois cette transformation faite, notre opérateur se présentera sous la forme d'une série symbolique*

$$e^W=\sum\frac{W^p}{p!},$$

où

$$W=w_1X_1+w_2X_2+\ldots+w_nX_n.$$

» Ce théorème serait évident si nous savions d'avance que le groupe existe; encore faudrait-il chercher à déterminer les w en fonction des t et des v, ou ce qu'on pourrait appeler les règles de multiplication des substitutions du groupe.

» Mais nous voulons précisément démontrer l'existence du groupe dont nous ne connaissons que la structure.

» Supposons d'abord que V soit infiniment petit, et soit $W = V + U_0$,

$$U_0 = u_1 X_1 + \ldots + u_n X_n$$

étant un opérateur infiniment petit. Posons maintenant

$$[T, U_0] = U_1, \qquad [T, U_1] = U_2, \qquad [T, U_2] = U_3, \qquad \ldots;$$

on trouvera aisément, en s'aidant des relations de structure et négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$V = \sum \frac{(-1)^q U_q}{q!}.$$

Cette équation nous donne les v en fonctions des u et des t, linéaires par rapport aux u; et l'on aura

$$v_i = \sum u_k \varphi_{i,k}(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Les $\varphi_{i,k}$ sont des fonctions entières des t, d'une forme toute particulière; car elles s'expriment rationnellement en fonctions : 1° des t; 2° des racines $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ d'une équation de degré n en θ, dont le premier membre est un polynome entier par rapport à θ et aux t; 3° et enfin des exponentielles $e^{\theta_1}, e^{\theta_2}, \ldots, e^{\theta_n}$.

» Cela posé, je vais démontrer, en me bornant à indiquer la marche générale et le principe de la démonstration, que $e^T e^{hV}$ est, quel que soit le coefficient h, de la forme e^W.

» En effet, d'après ce que nous venons de voir, le théorème est vrai pour h infiniment petit; je dis maintenant que, s'il est vrai pour $h = h_0$, il sera vrai aussi pour $h = h_0 + \delta h$; car si l'on a

$$e^T e^{h_0 V} = e^{W_0},$$

on aura aussi, puisque δh est infiniment petit,

$$(1) \qquad e^{W_0} e^{\delta h V} = e^{W_0 + \delta W},$$

ou, à cause de l'associativité,

$$e^T e^{(h_0 + \delta h) V} = e^{W_0 + \delta W}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous voyons en même temps, par l'équation (1), que les w, considérés comme fonctions de h, satisfont aux équations différentielles

$$v_i\,dh = \sum dw_k\,\varphi_{i,k}(w_1, w_2, \ldots, w_n). \tag{2}$$

On achèvera de déterminer les w en remarquant que w_k doit se réduire à t_k pour $h = 0$. Les règles de multiplication des substitutions du groupe sont donc établies, sans connaître autre chose que la structure de ce groupe.

» L'existence du groupe est en même temps démontrée, puisque nous avons formé la *Parametergruppe*.

» La considération du groupe adjoint permettrait d'intégrer les équations (2) en termes finis ou du moins par quadrature. »

PHYSIQUE DU GLOBE. — *L'iode dans l'eau de mer.* Note de M. ARMAND GAUTIER.

« Il est généralement admis et enseigné que l'iode existe, dissous dans l'eau de mer, principalement à l'état d'iodures alcalins ou alcalino-terreux. Mais lorsqu'on veut se renseigner sur la quantité d'iodures ou d'iode de ces eaux, on constate chez les auteurs presque autant de divergences qu'il y en a eu, avant mes recherches, relativement à l'iode de l'air atmosphérique. Depuis Marchand (de Fécamp) qui donna jadis le chiffre excessif de 9^{mgr} d'iode par litre d'eau de mer (1), jusqu'à Stephenson Macadam qui assurait qu'il faut évaporer plusieurs gallons d'eau de l'Océan pour y trouver $\frac{1}{500000}$ de grain d'iode (2), à Koettstorffer qui en trouva 1^{mgr} en 50 litres (3), et à J. Boussingault qui déclarait qu'il est à peu près impossible de trouver de l'iode dans l'eau de mer (4), cette question est restée irrésolue.

» En fait jusqu'ici la présence de l'iode en quantité dosable dans ces eaux demeure incertaine. D'ailleurs, pour affirmer l'existence des iodures dans l'eau de mer, on s'est fondé seulement sur deux considérations indirectes :

(1) Il opérait sur l'eau du rivage où l'iode se concentre, comme on verra plus loin.

(2) *Journ. f. prakt. Chem.*, t. VIII. Le gallon étant de $4^{lit},54$ et le grain de 53^{mgr}, ce serait, d'après cet auteur, *au maximum* $0^{mgr},00012$ d'iode qu'on trouverait par litre d'eau de mer.

(3) *Zeitsch. f. analyt. Chem.*, III. Heft; octobre 1878.

(4) *Ann. de Chim. et de Phys.*, 2e série, t. XXX; p. 94 et 95.