

à sa bienveillance inépuisable. Il appartenait à presque toutes les Sociétés savantes du monde entier. Toutes, comme nous, se sentiront diminuées par sa mort.

» Un nouveau deuil vient encore s'ajouter à celui qui nous a attristés la semaine dernière. Une lettre que je viens de recevoir de notre Confrère M. Joannès Chatin nous apprend la mort de son père, décédé dans la journée d'hier, dans sa maison de campagne des Essarts-le-Roi.

» Il y a longtemps déjà que cet événement fatal était redouté de la famille et des amis du défunt. L'affaiblissement graduel dû aux progrès de l'âge a fini par triompher de la robuste constitution de notre regretté Confrère et des soins affectueux dont il était entouré.

» Aucune vie n'a été plus heureuse que la sienne. Durant tout le cours de sa longue et laborieuse carrière, il a aimé et cultivé avec ardeur la Botanique, la plus jolie et la plus délicate de toutes les sciences, celle qui procure les jouissances esthétiques les plus délicieuses et qui ouvre en même temps les aperçus les plus mystérieux sur le développement des organismes vivants. La fortune l'a comblé de ses faveurs et les honneurs se sont accumulés sur sa tête. Le plus précieux de tous les biens, l'élément essentiel du bonheur, la santé, ne lui a jamais fait défaut. Enfin, il a eu l'immense satisfaction de voir son fils occuper une chaire à la Sorbonne et ensuite de le recevoir à ses côtés sur les bancs de notre Académie. Il a conservé presque jusqu'au dernier moment la plénitude de son intelligence et s'est éteint doucement au milieu des siens, sans subir les angoisses de l'agonie. »

La séance est levée en signe de deuil, après le dépouillement de la Correspondance.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur la théorie de la précession.*

Note de M. H. POINCARÉ.

« Stockwell a cherché à déterminer les variations séculaires de l'équateur terrestre qui sont la conséquence des variations séculaires de l'écliptique.

» Mais, récemment, M. Backlund (*Bulletin de l'Académie de Saint-Petersbourg*, mai 1900) a repris ces calculs par la méthode de Gylden et est arrivé à des résultats entièrement différents. C'est ainsi que le coeffi-

cient d'une de ces inégalités serait, d'après Stockwell, 20438" et d'après notre éminent correspondant 5681".

» Le principe de la méthode employée par M. Backlund consiste à ne pas supprimer tout de suite dans ses équations les termes à courte période qui produisent la nutation; dans les équations qu'on obtient après quelques transformations figurent certains coefficients périodiques qui dépendent de ces termes; et pour l'intégration, au lieu de supprimer purement et simplement ces coefficients périodiques comme on le fait d'ordinaire, M. Backlund en conserve la partie constante qu'il appelle v_0^2 et v_0^3 .

» Pour apprécier la légitimité de cette analyse, il suffira d'étudier l'équation simple

$$(1) \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = a \sin(nt + v) + b \sin pt,$$

considérée par M. Backlund (page 397). Nous supposerons que a et n sont très petits, mais que b et p soient beaucoup plus petits et cela de telle façon que $\frac{b}{p^2}$ soit notablement plus grand que $\frac{a}{n^2}$, et que p^2 soit du même ordre de grandeur que $\frac{a^2}{n^2}$.

» Le premier terme du second membre de (1) est alors un terme à courte période et le second un terme séculaire. Les équations de la précession peuvent être ramenées à cette forme, avec cette différence qu'il y a un grand nombre de termes à courte période et un grand nombre de termes séculaires.

» Soit alors

$$(1 \text{ bis}) \quad \frac{d^2 v_0}{dt^2} = a \sin(nt + v_0),$$

une équation analogue à (1) mais où l'on a fait $b = 0$, et posons

$$v = v_0 + \varepsilon.$$

» Nous aurons alors en négligeant ε^2

$$(2) \quad \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = a \varepsilon \cos(nt + v_0) + b \sin pt.$$

» Si l'on appliquait la méthode de Stockwell, on négligerait le premier

terme et l'on trouverait

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = b \sin pt, \quad \varepsilon = -\frac{b}{p^2} \sin pt.$$

» M. Backlund trouve d'abord en première approximation

$$\varphi_0 = -\frac{a}{n^2} \sin nt,$$

d'où

$$\cos(nt + \varphi_0) = \cos nt + \frac{a}{n^2} \sin^2 nt.$$

» L'équation (2) devient

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = \varepsilon \left(a \cos nt + \frac{a^2}{n^2} \sin^2 nt \right) + b \sin pt,$$

ou, en conservant la valeur moyenne du coefficient de ε ,

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = \frac{a^2}{2n^2} \varepsilon + b \sin pt,$$

d'où

$$\varepsilon = -\frac{b \sin pt}{\frac{a^2}{2n^2} + p^2}.$$

» Telles sont les deux analyses entre lesquelles il s'agit de décider; la chose est d'autant plus facile que les équations (1 bis) et (2) peuvent s'intégrer rigoureusement.

» Posons, en effet,

$$nt + \varphi_0 = 2W,$$

l'équation (1 bis) devient

$$\frac{d^2 W}{dt^2} = a \sin W \cos W,$$

d'où

$$\frac{dW}{dt} = i \sqrt{p(u) - e_1}, \quad \sin W = \frac{i}{\sqrt{a}} \sqrt{p(u) - e_2}, \quad \cos W = \frac{i}{\sqrt{a}} \sqrt{p(u) - e_3},$$

$$e_2 - e_3 = a, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

$$\cos(nt + \varphi_0) = \frac{1}{a} [2p(u) + e_1],$$

où $p(u)$ est la fonction doublement périodique de Weierstrass et où u est égal à z plus une constante imaginaire.

» L'équation (2), qui peut alors s'écrire

$$(2 \text{ bis}) \quad \frac{d^2 \varepsilon}{du^2} = \varepsilon [2p(u) + e_1] + b \sin pt,$$

a ses coefficients périodiques.

» Nous sommes ainsi amenés à envisager des équations linéaires à second membre de la forme

$$(3) \quad \varepsilon'' - \varphi \varepsilon = X,$$

où φ est périodique en t (et où je désigne les dérivées par des lettres accentuées). D'après un théorème bien connu, l'équation sans second membre

$$\varepsilon'' - \varphi \varepsilon = 0$$

admettra deux intégrales de la forme suivante :

$$\varepsilon_1 = e^{\alpha t} \psi_1, \quad \varepsilon_2 = e^{-\alpha t} \psi_2,$$

ψ_1 et ψ_2 étant périodiques. Je puis toujours supposer que l'on a

$$(4) \quad \varepsilon'_1 \varepsilon_2 - \varepsilon'_2 \varepsilon_1 = 1,$$

et l'on trouve alors, pour l'intégrale de l'équation (3),

$$(5) \quad \varepsilon = \beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2$$

avec

$$\beta_1 = \int X \varepsilon_2 dt; \quad \beta_2 = - \int X \varepsilon_1 dt.$$

» Nous pouvons d'ailleurs traiter séparément chacun des termes de X ; prenons alors

$$X = e^{ipt}.$$

» Soit (en supposant que l'unité de temps ait été choisie de telle façon que la période de la fonction φ soit égale à 2π)

$$\psi_1 = \sum a_k e^{ikt}, \quad \psi_2 = \sum c_k e^{ikt}.$$

» Dans les intégrales β_1 et β_2 , les seuls termes sensibles sont ceux qui contiendront un petit diviseur (en considérant p et α comme très petits). Ces termes sont

$$\beta_1 = \frac{c_0 e^{(-\alpha+ip)t}}{-\alpha+ip}; \quad \beta_2 = \frac{a_0 e^{(\alpha+ip)t}}{\alpha+ip}.$$

» Si l'on ne conserve dans β_1 et β_2 que ces termes à petit diviseur, le

terme en e^{ipt} dans ε sera, d'après la formule (5),

$$\frac{-2\alpha_0 c_0 \alpha e^{ipt}}{\alpha^2 + p^2}.$$

» Dans le cas où la fonction φ est petite (ce qui arrive ici, puisque le facteur α est petit), les termes α_0 et c_0 sont notablement plus importants que les autres termes de ψ_1 et ψ_2 ; de tous les termes de ε , le plus important est le terme en e^{ipt} que je viens d'écrire; enfin, à cause de la relation (4), on a sensiblement

$$2\alpha_0 c_0 \alpha = 1,$$

de sorte qu'il reste sensiblement

$$(6) \quad \varepsilon = \frac{-e^{ipt}}{\alpha^2 + p^2}.$$

» Dans le cas où α s'annule, il y a une dégénérescence et l'intégrale générale de l'équation sans second membre serait de la forme

$$\varepsilon = \gamma_1 \psi_1 + \gamma_2 (t\psi_1 + \zeta),$$

ζ étant périodique comme ψ_1 , tandis que les γ sont les constantes d'intégration. Mais à la limite, la formule (6) subsiste.

» Comparons maintenant cette formulè (6) avec celles de Stockwell et de Backlund. Nous voyons que, pour obtenir celle de Stockwell, il faut faire $\alpha = 0$, et pour obtenir celle de Backlund,

$$\alpha = \frac{a}{n\sqrt{2}}.$$

» Or quelle est la véritable valeur de α ? on le voit tout de suite : l'équation (2 bis), quand on y supprime le second membre, admet pour intégrale

$$\varepsilon_1 = \sqrt{p(u) - e_1},$$

qui est une fonction périodique. Donc α est nul; donc c'est Stockwell qui a raison.

» Il faut attribuer aux inégalités en question les coefficients de Stockwell, dont quelques-uns sont 4 fois plus forts que ceux de Backlund.

» La critique qui précède ne saurait, en aucune façon, s'adresser à notre savant correspondant, puisqu'il n'a fait qu'appliquer une méthode classique que tout le monde croyait correcte.

» Mais c'est là une raison de plus pour que j'aie cru devoir mettre en évidence le vice fondamental de la méthode de Gylden, dont on pourrait être tenté de faire d'autres applications.

» Il est singulier que Gylden soit tombé dans cette erreur, puisqu'il avait lui-même intégré les équations (1 bis) et (2). »

THERMOCHIMIE. — *Recherches sur la formation des composés organiques sulfurés*; par M. BERTHELOT.

« Le cours de mes recherches sur la chaleur de formation des divers groupes de composés organiques m'a conduit à l'étude des combinaisons sulfurées.

» J'ai déjà examiné le sulfure de carbone (1), le thiophène (2), la taurine (3), l'isomérisie des composés sulfocyaniques (4); mais certains corps fondamentaux, tels que les alcools et les éthers simples, me restaient à aborder. Il s'agit donc aujourd'hui des alcools sulfurés, autrement dits *mercaptans*.

» 1. MERCAPTAN ÉTHYLIQUE (alcool sulfuré, sulphydrate d'éthyle) $C^2H^6S = 62$.

» Distillé à point fixe et analysé.

2 combustions, avec formation de CO^2 gaz, H^2O liquide, SO^4H^2 étendu :

1 ^{er} à volume constant	8313 ^{cal} ,6
Chaleur de combustion moléculaire à pression constante.....	+ 517 ^{cal} ,2
Formation par les éléments (état actuel) : $C^2 + H^6 + S = C^2H^6S$ liq..	+ 19 ^{cal} ,5

» 2. SULFURE D'ÉTHYLE (éther sulphydrique) $C^2H^{10}S = 90$. — Distillé à point fixe. Analysé. 4 combustions :

1 ^{er} à volume constant.....	9191 ^{cal} ,5
Chaleur de combustion moléculaire à pression constante.....	+ 829 ^{cal} ,6
Formation par les éléments (état actuel) : $C^2 + H^{10} + S = C^2H^{10}S$ liq.	+ 33 ^{cal} ,7

(1) *Thermochimie : Données et lois numériques*, t. II, p. 165.

(2) Même Ouvrage, p. 516.

(3) *Id.*, p. 671.

(4) *Ann. de Ch. et de Phys.*, 7^e série, t. XX, p. 197.

Voir aussi les Travaux de M. Joannis, sur les sulfocyanures (*Thermochimie : Données et lois numériques*, t. II, p. 174); ceux de M. Matignon, sur l'urée sulfurée et les dérivés uriques (même Ouvrage, t. II, p. 658, 665).