"Sur la Diffraction des Ondes Electriques : à propos d'un Article de M. Macdonald." Par H. POINCARÉ, For. Mem. R.S.

Received May 4,—Read May 28, 1903.

1. Dans le No. 472 des Proceedings, M. Macdonald a publié un article intitulé : "The Bending of Electric Waves round a Conducting Obstacle," sur lequel je désire présenter quelques observations. On a annoncé récemment que M. Marconi avait réussi à envoyer des signaux de télégraphie sans fil d'Angleterre en Amérique. Quelle que soit la sensibilité du cohéreur, ce résultat est bien fait pour nous surprendre pour deux raisons : à cause de la grande distance d'abord, et à cause de la courbure de la Terre. Evidemment il faut admettre qu'une grande partie de la radiation a subi une diffraction considérable, pour pouvoir contourner l'obstacle formé par la Terre.

L'importance de cette diffraction est-elle uniquement due à la grande longueur des ondes ? M. Macdonald ne l'a pas pensé. Nous savons que M. Gouy a observé des phénomènes, qu'il appelle de diffraction éloignée, en concentrant de la lumière sur le tranchant d'un rasoir. Les rayons lumineux subissent ainsi des déviations considérables. J'ai fait dans les 'Acta Mathematica' la théorie de ces phénomènes, et j'ai montré qu'ils sont indépendants de la longueur d'onde, pourvu que le rayon de courbure du tranchant et la distance de ce tranchant au foyer où se concentre la lumière restent du même ordre de grandeur que cette longueur d'onde.

D'après M. Macdonald, il se passerait quelquechose d'analogue en télégraphie sans fil ; l'onde émanée d'un excitateur dont la distance au sol est de l'ordre de la longueur d'onde, suivrait la surface de la sphère terrestre sans s'affaiblir sensiblement. Il y a là une idée qui au premier abord est assez séduisante ; mais si on examine de plus près l'analyse de M. Macdonald on voit qu'il n'a pas supposé que la source de lumière soit à une distance du sol comparable à la longueur d'onde. Ses formules restent, ou semblent rester, applicables quelle que soit cette distance. Si alors la lumière reste sensible quelle que soit la longueur d'onde et quelle que soit la position de la source, cela veut dire qu'il fait jour pendant toute la nuit ; cette conclusion est trop manifestement contredite par l'expérience.

Il est vrai que M. Macdonald suppose que le point d'où l'on observe la lumière est situé sur la surface même de la sphère terrestre ; on pourrait imaginer alors qu'il y a une couche très mince, d'épaisseur comparable à la longueur d'onde où la lumière est sensible, et qu'en dehors de cette couche elle est insensible. Mais en regardant de plus près, on voit que l'analyse de M. Macdonald s'applique tout aussi bien si on observe d'un point quelconque de l'espace. Il y a donc dans cette analyse un point faible, et il importe de le découvrir afin de voir ce qui reste de ses conclusions.

2. Rappelons le principe de l'analyse de M. Macdonald. Introduisons les fonctions de Bessel :

$$J_n(x) = A_n x^n \int_{-i}^{+i} e^{zx} (z^2+1)^{\frac{2n-1}{2}} dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

et

$$I_n(x) = A_n' x^n \int_{i}^{\infty} e^{zx} (z^2+1)^{\frac{2n-1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Toutes deux satisfont à l'équation différentielle

$$J'' + \frac{J'}{x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

La première est caractérisée par ce fait qu'elle reste finie dans toute l'étendue du plan, et la seconde parce que pour x très grand elle est sensiblement proportionnelle à

$$\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}:$$

Elle ne diffère que par un facteur constant de celle que M. Macdonald appelle K_n. Quant à A_n et A'_n ce sont des coefficients constants sur lesquels nous reviendrons.

Revenons au problème qui nous occupe. Prenons pour axe des z la droite qui joint le centre de la Terre à l'excitateur ; appelons r la distance du point considéré au centre de la Terre, et ρ la distance à l'axe des z. Prenons pour unité le rayon de la Terre de telle sorte que $r = 1$ soit l'équation de la surface de la Terre. Posons enfin $z = r\mu$.

Soit $2\pi/k$ la longueur d'onde, les forces électriques ou magnétiques dépendront des lignes trigonométriques de l'angle kVt, si V est la vitesse de la lumière ; et je pourrai, par un artifice bien connu, supposer que chacune de ces forces est la partie réelle d'une expression imaginaire proportionnelle à e^{-ikVt}. Supposons donc que la force magnétique soit la partie réelle de

$$\frac{\psi}{\rho} e^{-ikVt},$$

où ψ est une expression imaginaire indépendante du temps. M. Macdonald indique d'abord quelle est la forme générale de l'expression ψ, il trouve :

$$\psi = \sqrt{r} \Sigma \left[B_n J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + C_n I_{n+\frac{1}{2}}(kr)\right] (1-\mu^2) \frac{dP_n}{d\mu} \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

P_n désignant le polynôme de Legendre.

C'est là la solution la plus générale de l'équation :

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1-\mu^2}{r^2} \frac{d^2\psi}{d\mu^2} + k^2\psi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

à laquelle doit satisfaire ψ (en dehors des sources) toutes les fois que les sources sont distribuées de telle façon que tout soit de révolution autour de l'axe des z. Si nous considérons une sphère de rayon a, et si en dehors de cette sphère il n'y a pas de source, alors à *l'extérieur* de cette sphère, la fonction ψ devra être représentée par une expression de la forme (4) ; de plus, pour r très grand, nous devrons avoir des termes contenant en facteurs l'exponentielle :

$$e^{ik(r-Vt)},$$

et qui correspondent à des faisceaux divergents s'éloignant des sources, et ne pas avoir de termes contenant en facteurs l'exponentielle $e^{-ik(r+Vt)}$ et qui correspondraient à des faisceaux convergeant vers les sources. Il en résulte que les coëfficients B_n sont nuls.

Supposons au contraire qu'il n'y ait à *l'intérieur* de la sphère de rayon a ni source ni surface réfléchissante comme serait à la surface de la Terre dans le problème qui nous occupe. Alors à l'intérieur de cette sphère la fonction ψ sera encore représentée par une expression de la forme (4), mais comme cette fonction doit demeurer finie pour $r=0$ ce sont les coéfficients C_n qui seront nuls.

Dans le problème qui nous occupe nous poserons :

$$\psi = \psi_1 + \psi_2,$$

où ψ_1, sera ce que serait la fonction ψ avec la même source, si la surface réfléchissante de la Terre était supprimée. On aura alors :

$$\psi_1 = \rho \frac{d}{d\rho} \frac{e^{ikR}}{R},$$

R étant la distance du point considéré à la source ; soit a la distance de cette source au centre de la Terre, à l'extérieur de la sphère de rayon a on aura

$$\psi_1 = \sqrt{r}\Sigma C'_n I_{n+\frac{1}{2}} Q_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4\ bis),$$

et à l'intérieur

$$\psi_1 = \sqrt{r}\Sigma B'_n J_{n+\frac{1}{2}} Q_n. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4\ ter).$$

C'_n et B'_n sont des coëfficients constants, et j'ai posé pour abréger :

$$Q_n = (1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}.$$

D'autre part, à l'extérieur de la sphère de rayon 1 on devra avoir :

$$\psi_2 = \sqrt{r}\Sigma C_n'' I_{n+\frac{1}{2}} Q_n.$$

On déterminera les coéfficients constants C_n'' par la condition :

$$\frac{d\psi}{dr} = 0,$$

qui doit être satisfaite pour $r = 1$. On trouve ainsi :

$$0 = \frac{d\psi_1}{dr} + \frac{d\psi_2}{dr} = \sqrt{r}\Sigma B'_n \frac{dJ_{n+\frac{1}{2}}}{dr} Q_n + \Sigma C''_n \frac{dI_{n+\frac{1}{2}}}{dr} Q_n$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{r}} \Sigma (B'_n I_{n+\frac{1}{2}} + C''_n I_{n+\frac{1}{2}}) Q_n \quad \ldots\ldots \quad (6),$$

d'où la condition

$$\left(B'_n \frac{dJ_{n+2}}{dr} + C''_n \frac{dI_{n+2}}{dr}\right) + \frac{1}{2r}(B'_n J_{n+2} + C''_n I_{n+2}) = 0 \quad \ldots \quad (7),$$

qui doit être satisfaite pour $r = 1$ et qui détermine C''_n.

Mais si la longueur d'onde est très petite, k est très grand et $I_{n+\frac{1}{2}}$ est sensiblement égal à :

$$A \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}.$$

A étant une constante, sa dérivée par rapport à r est sensiblement

$$ikA \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}},$$

de sorte que l'on a sensiblement

$$\frac{dI_{n+\frac{1}{2}}}{dr} = ikI_{n+\frac{1}{2}},$$

et par conséquent,

$$\frac{d\psi_2}{dr} = ik\psi_2 + \frac{1}{2r}\psi_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

ou encore comme k est très grand par rapport à $1/r$

$$\frac{d\psi_2}{dr} = ik\psi_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8\ bis).$$

La condition (6) devient donc

$$\frac{d\psi_1}{dr} + ik\psi_2 = 0$$

de sorte qu'on a pour $r = 1$,

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_1 + i\frac{d\psi_1}{kdr}$$

Il est aisé de constater que cette expression ne s'annulle pas, et même n'est pas très petite, de sorte que sur la surface même de la sphère terrestre il devrait rester de la lumière.

Si nous supposons maintenant $r > 1$; et si nous appelons $I^\circ_{n+\frac{1}{2}}$, ψ_2°, ψ_1°, $\frac{d\,\psi_2^\circ}{dr}$, $\frac{d\,\psi_1^\circ}{dr}$ les valeurs de $I_{n+\frac{1}{2}}$, ψ_2, ψ_1, $\frac{d\,\psi_2}{dr}$ $\frac{d\,\psi_1}{dr}$ pour $r = 1$, nous aurons :—

$$I_{n+\frac{1}{2}} = I^{\circ}_{n+\frac{1}{2}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}; \qquad \psi_2 = \psi_2^{\circ} e^{ikr} = i \frac{d\psi_1^{\circ}}{dr} \frac{e^{ikr}}{k};$$

et on aurait

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_1 + i \frac{d\psi_1^{\circ}}{kdr} e^{ikr}.$$

Ainsi il devrait y avoir encore de la lumière, même *à l'extérieur* de la sphère terrestre ; c'est ce que j'avais annoncé plus haut.

3. Ce résultat étant manifestement erroné, il faut chercher quel est le point faible de l'analyse précédente. C'est évidemment la façon dont nous avons établi les égalités (8) et (8 *bis*). Nous avons :

$$\frac{d\psi_2}{dr} - ik\psi_2 - \frac{1}{2r}\psi_2 = \sqrt{r}\Sigma C''_n \left(\frac{dI_{n+\frac{1}{2}}}{dr} - ikI_{n+\frac{1}{2}}\right) Q_n \quad \ldots \quad (9).$$

Le second membre de (9) est une série dont tous les termes tendent vers zéro quand k croît indéfiniment. Nous en avons conclu que la somme de la série tendait aussi vers zéro, et que par conséquent le premier membre de (9) était sensiblement nul pour k très grand, ce qui nous donnait l'égalité (8). *Mais cette conclusion ne serait légitime que si la série était uniformément convergente, j'entends uniformément par rapport à k.*

Or, la condition n'est pas remplie pour notre série, et il est aisé de constater d'abord qu'elle ne l'est pas pour la série analogue

$$\sqrt{r}\Sigma C'_n \left(\frac{dI_{n+\frac{1}{2}}}{dr} - ikI_{n+}\right) Q_n$$

formée à l'aide de la série (4 *bis*). Si elle l'était en effet, on aurait :

$$\frac{d\psi_1}{dr} - ik\psi_1 - \frac{1}{2r}\psi_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

et comme l'expression de ψ_1 est connue et très simple, on voit immédiatement qu'il n'en est pas ainsi. Cette relation (10) si elle était exacte, entraînerait comme conséquence que

$$\psi_1 = \rho \frac{d}{d\rho} \frac{e^{ikR}}{R}$$

serait le produit d'une fonction de r par une fonction de μ, ce qui manifestement n'est pas vrai.

4. Ce qui précède se rattache immédiatement à l'étude des potentiels généralisés. Je désigne ainsi les intégrales de la forme

$$W = \int h \frac{e^{ikR}}{R} d\sigma,$$

où l'intégration doit être étendue à tous les éléments $d\sigma$ d'une surface ou d'un volume attirant ; où h est une fonction des coordonnées de l'élément $d\sigma$, représentant la densité de la matière attirante; où enfin R désigne la distance de cet élément $d\sigma$ au point de coordonnées courantes.

On aura d'ailleurs pour W une formule analogue à (4)

$$W = \Sigma \left[E_n J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + F_n I_{n+\frac{1}{2}}(kr)\right] P_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

où P_n est une fonction sphérique d'ordre n, qui se réduit au polynôme de Legendre, si comme nous le supposons ici tout est de révolution autour de l'axe des z.

Soient

$$x' = r' \sqrt{1-\mu'^2} \cos\theta' \qquad y' = r' \sqrt{1-\mu'^2} \sin\theta', \qquad z' = r'\mu',$$

les coordonnées de l'élément $d\sigma$; si tout est de révolution autour de l'axe des z comme nous le supposons, h ne dépendra que de r' et de μ'. On aura d'ailleurs :

$$\psi = \rho \frac{dW}{d\rho}.$$

Si toutes les masses attirantes sont à l'intérieur de la sphère de rayon a, on aura à l'extérieur de cette sphère: $E_x = 0$; et d'un raisonnement tout pareil à celui qui précède, il semblera résulter que l'on doit avoir :

$$\frac{dW}{dr} = ikW.$$

Seulement ici, il sera plus aisé de voir dans quels cas ce raisonnement est légitime.

Commençons par étudier le cas d'un potentiel de simple couche répandu à la surface d'une sphère de rayon 1; nous devons donc supposer que l'on a

$$r = 1, \qquad d\sigma = d\mu' d\theta',$$

et que h est fonction de μ' seulement.

Nous examinerons seulement deux cas : 1° celui où h est une fonction continue indépendante de k; 2° celui où l'on a :

$$h = e^{ikZ} h_0,$$

Z et h_0 étant des fonctions continues indépendantes de k.

Dans le premier cas, la densité de la matière attirante ne varie que lentement sur la surface de la sphère; dans le second cas, au contraire, elle varie très rapidement, et d'autant plus rapidement que k est plus grand. On aura alors :

$$W = \int e^{ik(R+Z)} \frac{h_0}{R} d\mu' d\theta'.$$

Dans le premier cas, Z se réduit à zéro et h_0 à h.

Pour aller plus loin, envisageons d'abord l'intégrale simple :

$$\int_a^b e^{ik\phi(z)}\psi(z)\,dz,$$

où ϕ et ψ sont des fonctions de z que nous supposerons holomorphes et indépendantes de k dans la région envisagée. Nous supposons que a et b sont réels, que l'intégration se fait le long d'un chemin réel, et que pour z réel les fonctions ϕ et ψ sont réels.

Nous allons déformer ce chemin d'intégration de façon que le long du nouveau chemin la partie imaginaire de $\phi(z)$ soit positive sauf en certains points exceptionnels pour lesquels elle sera nulle.

Il est toujours possible de déformer le chemin de cette manière, et les seuls points exceptionnels qu'on est obligé de laisser subsister, et pour lesquels la partie imaginaire de $\phi(z)$ doit rester nulle, ce sont les extrémités du chemin a et b, et d'autre part les points où le chemin doit traverser l'axe des z réels, parce que la région où la partie imaginaire de $\phi(z)$ est positive, passe d'un côté à l'autre de cet axe des z réels ; ces points sont ceux pour lesquels la dérivée $\phi'(z)$ est nulle. Par exemple si on suppose $\phi(z) = z^2$; et $z = x + iy$; la région où la partie imaginaire est positive est donnée par l'inégalité $yx > 0$; donc pour $x < 0$, on doit avoir $y < 0$, et pour $x > 0$ on doit avoir $y > 0$; donc quand x passe par la valeur zéro, notre région passe d'un côté à l'autre de l'axe des x ; si donc nous voulons que notre chemin d'intégration reste constamment dans cette région, nous ne pouvons éviter de le faire passer par l'origine.

Toutes les fois que la partie imaginaire de $\phi(z)$ est positive, l'exponentielle $e^{ik\phi(z)}$ tend rapidement vers 0 quand on fait croître k. Si donc k est très grand, on aura une valeur très approchée de l'intégrale, en réduisant le chemin d'intégration aux parties très voisines des points exceptionnels. Soit donc α l'un des points exceptionnels autres que a et b ; notre intégrale se réduira à fort peu près à :

$$\int_a^{a+\epsilon} + \Sigma \int_{\alpha-\epsilon}^{\alpha+\epsilon} + \int_{b-\epsilon}^{b}.$$

Nous sommes donc ramenés au calcul d'intégrales de la forme :

$$\mathrm{K} = \int_\alpha^{\alpha+\epsilon} e^{ik\phi}\psi\,dz, \qquad \mathrm{K}' = \int_{\alpha-\epsilon}^{\alpha} e^{ik\phi}\psi\,dz.$$

Soit alors $\mathrm{H} + \mathrm{A}(z-\alpha)^m$, $\mathrm{B}(z-\alpha)^p$ les premiers termes du développement de ϕ et de ψ suivant les puissances de $z-\alpha$; on aura toujours avec la même approximation :

$$\mathrm{K} = e^{ik\mathrm{H}} \int_0^\infty \mathrm{B} e^{ik\mathrm{A}z^m} z^p\,dz, \qquad \mathrm{K}' = e^{ik\mathrm{H}} \int_{-\infty}^0 \mathrm{B} e^{ik\mathrm{A}z^m} z^p\,dz.$$

On doit dans ces intégrales faire tendre z vers l'infini (limite supérieure ou inférieure d'intégration) avec un argument tel que e^{ikAz^m} tende vers zéro. Ces intégrales sont des fonctions eulériennes faciles à calculer.

Si maintenant les fonctions $\phi(z)$ et $\psi(z)$ sont périodiques de période $b-a$, nous pouvons supprimer les termes correspondant aux deux extrémités a et b et ne plus considérer ces points a et b comme exceptionnels. On a en effet

$$\int_h^b = \int_{a+h}^{b+h},$$

et nous pouvons donner à h une valeur imaginaire telle que $\phi(a+h) = \phi(b+h)$ ait sa partie imaginaire positive.

Les seules parties du chemin d'intégration qu'il y a lieu de conserver sont celles qui avoisinent les points où $\phi'(z)$ est nul.

Les mêmes considérations peuvent s'appliquer aux intégrales doubles de la forme :

$$\iint e^{ik\phi(x,y)}\psi(x,y)\,dx\,dy$$

étendues à une aire plane S limitée par une ligne fermée L. On verrait sans peine (soit en intégrant d'abord, par rapport à y, puis par rapport à x, et appliquant chaque fois les principes que nous venons d'établir, soit en s'appuyant sur les propriétés des intégrales doubles imaginaires), comme nous venons de le faire sur celles des intégrales simples imaginaires, on verrait, dis-je, que l'on peut réduire l'aire d'intégration tout entière aux parties voisines de la ligne L, et aux parties voisines des maxima, minima et minimax de la fonction $\phi(x, y)$, et dont le calcul pourrait se faire aisément.

Il en serait de même pour l'intégrale

$$\int e^{ik\phi}\psi d\sigma,$$

étendue à tous les éléments $d\sigma$ d'une aire courbe S limitée par une ligne fermée L, et située sur une surface fermée Σ. Quant à ϕ et ψ, ce sont bien entendu des fonctions analytiques des coordonnées de l'élément $d\sigma$.

Si nous supposons que l'intégration soit étendue à la surface fermée tout entière, et qu'il n'y ait plus de ligne L, il suffira de réduire la surface d'intégration aux parties voisines des maxima, minima ou minimax de la fonction ϕ.

Revenons au problème qui nous occupe, et commençons par le premier cas, celui où

$$W = \int e^{ikR}\frac{h}{R}\,d\sigma,$$

h étant indépendant de k; il suffira alors de réduire le champ d'intégration aux parties voisines des maxima de R. Soit M le point de coordonnées courantes, P le centre de gravité de l'élément $d\sigma$; R n'est autre chose que la distance MP. Le maximum et le minimum de la distance MP = R correspondant aux deux intersections de la sphère avec la droite MO qui joint le point M au centre de la sphère; leur valeur est $r+1$ et $r-1$. Soit alors P_0 et P_1 les deux points d'intersection de la sphère avec MO; pour un point P voisin de P_0 on aura sensiblement $MP^2 = (r+1)^2 + PP_0^2$ et pour un point voisin de P^1 ou aura $MP^2 = (r-1)^2 + PP_1^2$ d'où :

$$R = (r+1) + \frac{PP_0^2}{2(r-1)}, \qquad R = (r-1) + \frac{PP_1^2}{2(r-1)}.$$

On voit alors que l'intégrale W peut se réduire aux parties provenant du voisinage des points P_0 et P_1; le voisinage de P_0 nous donne sensiblement un terme de la forme:

$$\frac{e^{ik(r+1)}}{k} f,$$

et le voisinage de P_1 un terme de la forme

$$\frac{e^{ik(r-1)}}{k} f_1,$$

f et f_1 étant indépendants de k. Nous aurons donc sensiblement

$$W = \frac{e^{ik(r+1)} f + e^{ik(r-1)} f_1}{k}.$$

Le terme le plus important de dW/dr, celui devant lequel les autres doivent être négiglés, est alors:

$$\frac{dW}{dr} = i\left[e^{ik(r+1)} f + e^{ik(r-1)} f_1\right].$$

On a donc

$$\frac{dW}{dr} = ikW,$$

ce qui est bien le résultat auquel aurait conduit le raisonnement de M. Macdonald.

Mais passons maintenant au second cas, et pour préciser davantage, soit Q un point fixe extérieur à la sphère et que nous appellerons la source; nous supposerons que Z n'est autre chose que la distance P Q.

Voici ce qui justifie ce choix. Nous avons vu plus haut que ψ_2 devait être défini par la condition

$$\frac{d\psi_2}{dr} = -\frac{d\psi_1}{dr}$$

qui doit être satisfaite pour $r = 1$. Or, précisément $\frac{d\psi_1}{dr}$ pour $r = 1$ est de la forme

$$e^{ik\mathrm{PQ}}h_0,$$

le point Q étant l'excitateur, et h_0 restant fini pour k très grand. L'analogie des deux problèmes est ainsi mise en évidence.

Soit donc :

$$\mathrm{W} = \int e^{ik(\mathrm{R}+\mathrm{Z})} \frac{h_0}{\mathrm{R}} d\sigma.$$

On pourra réduire la surface d'intégration aux parties de la sphère voisines des maxima, minima et minimax de

$$\mathrm{R}+\mathrm{Z} = \mathrm{MP}+\mathrm{PQ}.$$

Les minima de M P + P Q correspondront évidemment aux points P qui sont en ligne droite avec M et Q, c'est à dire, aux deux points d'intersection P_0 et P_1 de la sphère avec la droite M Q.

On obtiendra encore des maxima et des minimax en construisant des ellipsoïdes de révolution ayant M et Q pour foyers et tangents à la sphère. Si les deux points M et Q sont voisins de la sphère, on obtiendra ainsi deux points réels P_2 et P_3. Alors notre champ étant réduit au voisinage des points P_0, P_1, P_2, P_3, et comme d'ailleurs

$$\mathrm{MP}_0+\mathrm{P}_0\mathrm{Q} = \mathrm{MP}_1+\mathrm{P}_1\mathrm{Q} = \mathrm{MQ},$$

on aura sensiblement, par un calcul tout pareil à ceux qui précèdent :

$$\mathrm{W} = \frac{1}{k}\left[e^{ik\mathrm{MQ}}f_1 + e^{ik(\mathrm{MP}_2+\mathrm{P}_2\mathrm{Q})}f_2 + e^{ik(\mathrm{MP}_3+\mathrm{P}_3\mathrm{Q})}f_3\right],$$

f_1, f_2, et f_3 restant finis pour k infini, et on en déduit

$$\frac{d\mathrm{W}}{dr} = i\left[e^{ik\mathrm{MQ}}f_1 \cos\alpha_1 + e^{ik(\mathrm{MP}_2+\mathrm{P}_2\mathrm{Q})}f_2 \cos\alpha_2 + e^{ik(\mathrm{MP}_3+\mathrm{P}_3\mathrm{Q})}f_3 \cos\alpha_3\right],$$

où α_1, α_2 et α_3 désignent les angles que font les trois droites M Q, M P_2 et M P_3 avec le rayon vecteur MO. On voit ainsi que la condition

$$\frac{d\mathrm{W}}{dr} = ik\mathrm{W},$$

à laquelle conduirait le raisonnement de M. Macdonald n'est pas remplie.

Il est donc certain dans ce cas que la convergence des séries procédant suivant les fonctions de Bessel n'est pas uniforme.

Ces considérations suffiront, je pense, pour faire comprendre le point faible du raisonnement de M. Macdonald; il serait important de reprendre les calculs en tenant compte de cette difficulté, car il y a lieu de se demander si les résultats obtenus par M. Marconi peuvent s'expliquer par les théories actuelles, et sont dus simplement à l'exquise sensibilité du cohéreur, ou s'ils ne prouvent pas que les ondes se réfléchissent sur les couches supérieures de l'atmosphère rendues conductrices par leur extrême raréfaction.

"The Measurement of Tissue Fluid in Man. Preliminary Note." By GEORGE OLIVER, M.D., F.R.C.P. Communicated by Sir LAUDER BRUNTON, F.R.S. Received in revised form May 18, —Read June 11, 1903.

The object of this preliminary note is to indicate a method by which the tissue fluid in man may be measured, thus enabling the observer to ascertain the conditions under which it is effused and disposed of.

In the course of some observations made with the view of eliminating tissue fluid as a cause of variability in the samples of blood obtained for examination, I found that the rolling of a tight rubber ring over the finger from the tip to beyond the interphalangeal joints will, as a rule, considerably raise the percentages of the blood corpuscles, and of the hæmoglobin. I could not arrive at any other conclusion, than that the ring not merely empties the vessels, but likewise clears away any tissue fluid present in the skin and subcutaneous tissues. The needle, in puncturing the capillaries, liberates a certain portion of lymph from the areolar tissue which surrounds them, and this dilutes the blood. When, however, both fluids have been dispersed as much as possible by the compression of the firm rubber ring, a puncture made just before removing the ring yields blood *per se*; for the blood instantly returns to the vessels, whereas an appreciable interval must elapse before the lymph reappears, or is exuded afresh. I, therefore, inferred that the reading of the difference in the percentage of the corpuscles, or of the hæmoglobin, before and after the use of the ring, provides a measure of the tissue-lymph, and makes the study of the circulation of it in man possible.

This simple method having furnished somewhat unexpected results, I naturally accepted them at first with reserve; and, for some time, the data were allowed to accumulate, until at last it was quite apparent that they invariably fell into the same order. Inasmuch as the method did not provide results which were exceptional or erratic, or contradictory and unaccountable, reliability on it became gradually established by the mere repetition of the observations.

A number of observations have been made on normal subjects leading a quiescent life, with comparative rest of the muscles; and on persons subjected to varying degrees of exercise, and to different